EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2024 - 2025
Matematică

Varianta 7

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Prețul unui pix este $\frac{75}{100}\cdot x=\frac{3}{4}\cdot x$, unde x reprezintă prețul unui caiet	**1p**
	Opt pixuri costă $8\cdot\frac{3}{4}\cdot x=6x$ și, cum $6x\neq 5x,$ nu este posibil ca prețul a opt pixuri să fie egal cu prețul a cinci caiete	**1p**
	b) Prețul unui creion este $\frac{40}{100}\cdot\frac{3}{4}\cdot x=\frac{3}{10}\cdot x$, unde x reprezintă prețul unui caiet	**1p**
	$3x+4\cdot\frac{3}{4}\cdot x+5\cdot\frac{3}{10}\cdot x=45$	**1p**
	$15x=90$, de unde obținem $x=6$, deci prețul unui caiet este 6 lei	**1p**
2.	**a)** $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x}+\frac{2}{x+3}=\frac{2x(x+3)-3(x-3)(x+3)+2x(x-3)}{x(x-3)(x+3)}=$	**1p**
	$=\frac{2x^2+6x-3x^2+27+2x^2-6x}{x(x-3)(x+3)}=\frac{x^2+27}{x(x-3)(x+3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$, $x\neq 0$ și $x\neq 3$	**1p**

	b) $E(x)=\dfrac{x^2+27}{x(x-3)(x+3)}\cdot\dfrac{x(x-3)}{1}=\dfrac{x^2+27}{x+3}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$, $x\neq 0$, $x\neq 3$	**1p**
	$E(n)-6=\dfrac{(n-3)^2}{n+3}$, pentru orice număr natural n, $n\neq 0$ și $n\neq 3$	**1p**
	Cum $n+3>0$ și $(n-3)^2>0$, rezultă că $E(n)-6>0$, deci $E(n)>6$, pentru orice număr natural n, $n\neq 0$ și $n\neq 3$	**1p**
3.	**a)** $f(2)=0$	**1p**
	$f(0)=-4$, deci $f(2)-f(0)=0-(-4)=4$	**1p**
	b) $A(2,0)$, $B(0,-4)$	**1p**
	Punctul C este simetricul punctului A față de axa $Oy \Rightarrow OC=OA=2$, deci $CA=4$	**1p**
	$AB=BC=2\sqrt{5}$, de unde rezultă că $P_{\Delta ABC}=2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+4=4\left(\sqrt{5}+1\right)$	**1p**
4.	**a)** $AB=12\text{cm}$, $AC=12\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	$P_{\Delta ACE}=3\cdot AC=36\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	b) $\Delta ADE\equiv\Delta CDE$, deci $\mathcal{A}_{\Delta ADE}=\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta ACE}-\mathcal{A}_{\Delta ACD}}{2}=36\left(\sqrt{3}-1\right)\text{cm}^2$	**1p**
	$DM\perp AE$, $M\in AE$, deci $d(D,AE)=DM$ și $\mathcal{A}_{\Delta ADE}=\dfrac{AE\cdot DM}{2}$	**1p**
	$DM=\dfrac{2\cdot\mathcal{A}_{\Delta ADE}}{AE}=3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** $CN\perp AB$, $N\in AB$, deci $CN=4\text{cm}$ și $NB=4\text{cm}$	**1p**
	$BC=\sqrt{CN^2+BN^2}=4\sqrt{2}$ cm	**1p**
	b) $DM\parallel AB\Rightarrow\Delta DPM\sim\Delta BPA\Rightarrow\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{DM}{BA}=\dfrac{1}{4}$	**1p**
	$EF\perp AB$, $P\in EF$, $E\in CD$, $F\in AB$, $\Delta PME\sim\Delta PAF\Rightarrow\dfrac{PE}{PF}=\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{1}{4}$, de unde obținem că	**1p**
	$PF=\dfrac{16}{5}\text{cm}$, deci $\mathcal{A}_{\Delta APB}=\dfrac{AB\cdot PF}{2}=\dfrac{64}{5}\text{cm}^2$	
	$\mathcal{A}_{ABCM}=20\text{cm}^2$, deci $\mathcal{A}_{MPBC}=\mathcal{A}_{ABCM}-\mathcal{A}_{\Delta APB}=\dfrac{36}{5}=7{,}2\text{ cm}^2$	**1p**
6.	**a)** $V_{ABCDA'B'C'D'}=AB^3=$	**1p**
	$=8^3=512\text{cm}^3$	**1p**
	b) FO este linie mijlocie în triunghiul $ACC'\Rightarrow FO\parallel AC'$, deci $\sphericalangle(FO,DE)=\sphericalangle(AC',DE)$	**1p**
	$AB'\parallel DC'$, deci $\Delta AQE\sim\Delta C'QD\Rightarrow\dfrac{AQ}{C'Q}=\dfrac{QE}{QD}=\dfrac{AE}{C'D}=\dfrac{1}{2}$, unde $\{Q\}=DE\cap AC'$, de unde	**1p**
	obținem $QD=\dfrac{2}{3}\cdot DE$ și $C'Q=\dfrac{2}{3}\cdot C'A$	
	$DE=4\sqrt{6}\text{cm}$, $C'A=8\sqrt{3}\text{cm}\Rightarrow QD=\dfrac{8\sqrt{6}}{3}\text{cm}$, $C'Q=\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ cm și, cum $C'D=8\sqrt{2}$ cm și	**1p**
	$QD^2+C'Q^2=128=C'D^2\Rightarrow\sphericalangle DQC'=90°$, obținem că $\sphericalangle(FO,DE)=90°$, deci dreptele FO și DE sunt perpendiculare	

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:.....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $4+12:2$ este egal cu:

a) 6
b) 8
c) 10
d) 12

5p **2.** Știind că $\frac{a}{2}=\frac{2}{3}$, atunci $\frac{a}{4}$ este egal cu:

a) $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{4}{3}$ **c)** 2 **d)** 3

5p **3.** Produsul numerelor -2 și 5 este egal cu:

a) -10
b) -3
c) 3
d) 10

5p **4.** Soluția ecuației $6x-2=1$ este numărul:

a) $-\frac{1}{3}$ **b)** $-\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{2}$

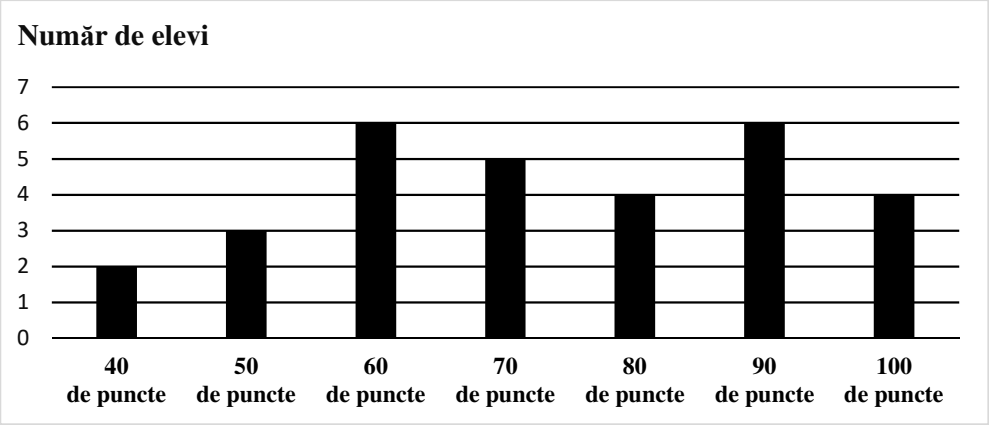
5p **5.** Patru elevi, Ana, Maria, Dan și Vlad, calculează suma numerelor $a=\sqrt{3^2+4^2}$ și $b=\sqrt{3^2\cdot 4^2}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ana	Maria	Dan	Vlad
17	19	37	43

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Ana
b) Maria
c) Dan
d) Vlad

5p **6.** În diagrama de mai jos, sunt prezentate rezultatele obținute de elevii participanți la un concurs.



Afirmația „Conform informațiilor din diagramă, 5 dintre elevii participanți au obținut exact 80 de puncte.” este:

a) adevărată
b) falsă

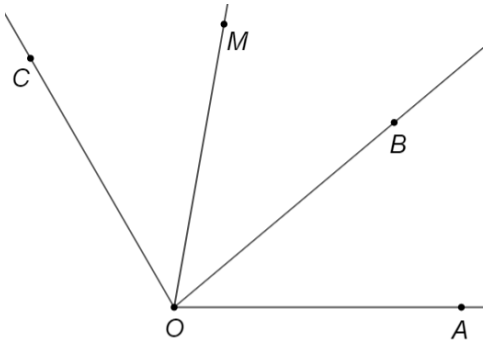
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctul B este mijlocul segmentului AC și punctul D este simetricul punctului B față de C. Știind că $AD = 12$ cm, lungimea segmentului AC este egală cu:

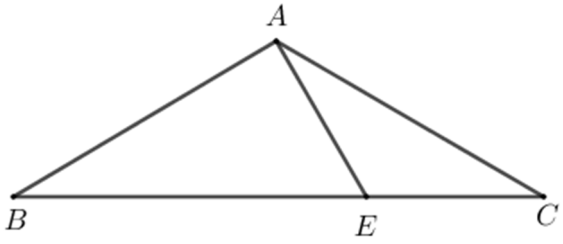
a) 3 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm

5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente AOB și BOC, $\sphericalangle BOC = 2 \cdot \sphericalangle AOB$. Măsura unghiului AOC este egală cu 120° și semidreapta OM este bisectoarea unghiului BOC. Măsura unghiului AOM este egală cu:



a) 30°
b) 40°
c) 60°
d) 80°

5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, cu $\sphericalangle BAC = 120°$. Punctul E aparține segmentului BC, astfel încât $CE = 4$ cm, iar dreptele AB și AE sunt perpendiculare. Lungimea segmentului BC este egală cu:

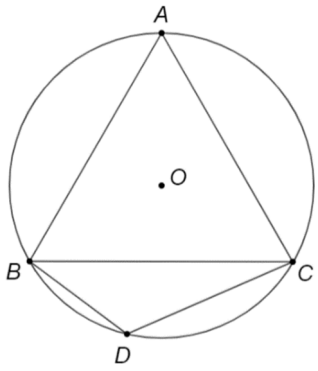


a) 16 cm
b) 12 cm
c) 8 cm
d) 6 cm

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 3 \cdot BC$. Perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu $32\,\text{cm}$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu:

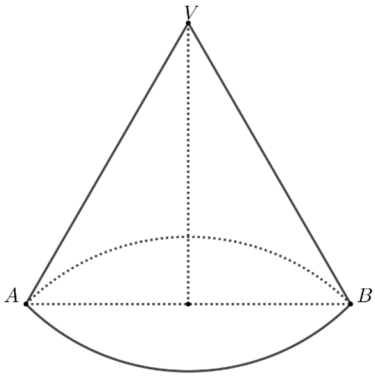
a) $16\,\text{cm}^2$
b) $32\,\text{cm}^2$
c) $48\,\text{cm}^2$
d) $64\,\text{cm}^2$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, înscris în cercul de centru O. Punctul D aparține arcului mic BC. Măsura unghiului BDC este egală cu:



a) $60°$
b) $90°$
c) $120°$
d) $150°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat conul circular drept cu secțiunea axială triunghiul echilateral VAB, cu $AB = 6$ cm. Aria laterală a conului este egală cu:



a) $18\pi\,\text{cm}^2$
b) $27\pi\,\text{cm}^2$
c) $36\pi\,\text{cm}^2$
d) $54\pi\,\text{cm}^2$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Ana a cumpărat de la o librărie caiete, pixuri și creioane. Prețul unui pix este egal cu 75% din prețul unui caiet, iar prețul unui creion este egal cu 40% din prețul unui pix.

(2p) a) Este posibil ca prețul a opt pixuri să fie egal cu prețul a cinci caiete? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Dacă Ana a plătit pentru trei caiete, patru pixuri și cinci creioane suma de 45 de lei, determină prețul unui caiet.

5p

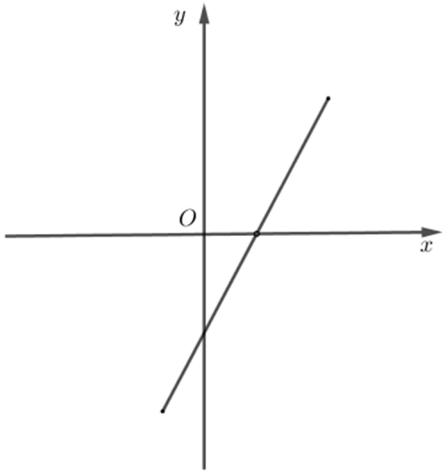
2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x}+\frac{2}{x+3}\right):\frac{1}{x^2-3x}$, unde x este număr real, $x\neq -3$, $x\neq 0$ și $x\neq 3$.

(2p) a) Arată că $\frac{2}{x-3}-\frac{3}{x}+\frac{2}{x+3}=\frac{x^2+27}{x(x-3)(x+3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$, $x\neq 0$ și $x\neq 3$.

(3p) b) Demonstrează că $E(n)>6$, pentru orice număr natural n, $n\neq 0$, $n\neq 3$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$.

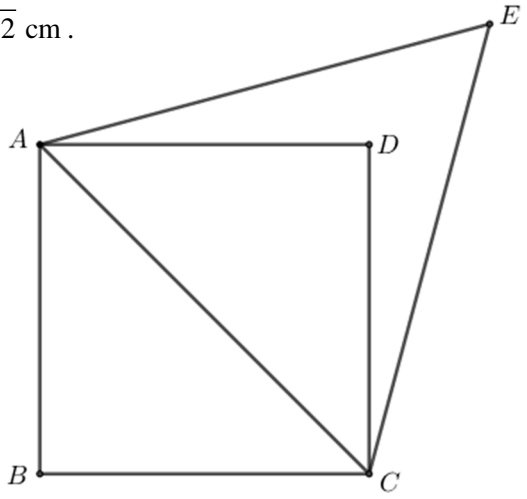
(2p) a) Arată că $f(2)-f(0)=4$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Punctul C este simetricul punctului A față de axa Oy. Arată că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $4\left(\sqrt{5}+1\right)$.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral ACE, astfel încât punctele D și E sunt situate de aceeași parte a dreptei AC. Perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 48cm.

(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ACE este egal cu $36\sqrt{2}$ cm.

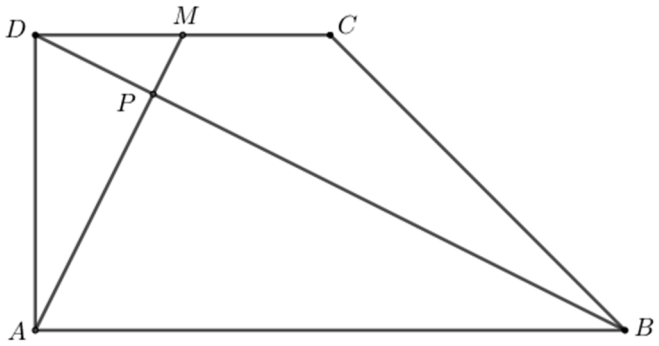


(3p) b) Arată că distanța de la punctul D la dreapta AE este egală cu $3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\text{cm}$.

5p

5. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \| DC$, $\sphericalangle DAB = 90°$, $AB = 8\,\text{cm}$ și $AD = DC = 4\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului DC și P este punctul de intersecție a dreptelor AM și BD.

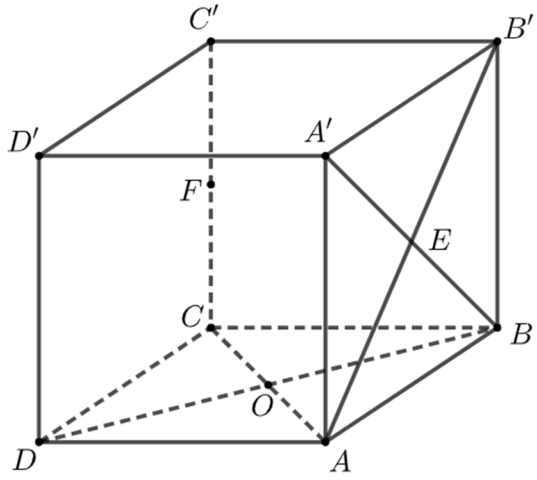
(2p) a) Arată că $BC = 4\sqrt{2}$ cm.



(3p) b) Calculează aria patrulaterului $MPBC$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 8$ cm. Dreptele AC și BD se intersectează în punctul O, iar dreptele $A'B$ și AB' se intersectează în punctul E. Punctul F este mijlocul segmentului CC'.

(2p) a) Arată că volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$ este egal cu 512 cm^3.



(3p) b) Demonstrează că dreptele FO și DE sunt perpendiculare.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2024 - 2025
Matematică

Varianta 2

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Maria are $2(x-10)$ lei, unde x reprezintă suma de bani a lui Alin	**1p**
	Obținem $x+2(x-10)=140$, deci $x=\frac{160}{3}$ care nu este număr natural, deci nu este posibil ca suma S să fie egală cu 140 de lei	**1p**
	b) $2(x-10)=y,\ x+15=y-15$, unde x reprezintă suma de bani a lui Alin și y reprezintă suma de bani a Mariei	**1p**
	$x=50,\ y=80$	**1p**
	$S=50+80=130$ lei	**1p**
2.	**a)** $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{(x+2)(x-2)}+\frac{1}{x+2}=$	**1p**
	$=\frac{1+x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$ și $x\neq 2$	**1p**
	b) $E(x)=\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}\cdot\frac{x(x+2)(x-2)}{1}=x(x-1)$, pentru orice număr real x, $x\neq 0$, $x\neq -2$ și $x\neq 2$	**1p**

	$E\left(\sqrt{2}-1\right)=4-3\sqrt{2}$	**1p**
	$E\left(\sqrt{2}+1\right)=2+\sqrt{2}$, deci numărul $N=4-3\sqrt{2}+3\left(2+\sqrt{2}\right)=4+6=10$ este natural	**1p**
3.	**a)** $f\left(1\right)=1$	**1p**
	$f\left(0\right)=2$, deci $f\left(1\right)\cdot f\left(0\right)=1\cdot 2=2$	**1p**
	b) $A\left(2,0\right)$, $B\left(0,2\right)$	**1p**
	$OA=OB=2\Rightarrow \Delta AOB$ este dreptunghic isoscel, deci $\sphericalangle OBA=45^\circ$	**1p**
	$CT\perp AB$, $T\in AB$, deci ΔBCT este dreptunghic isoscel, de unde obținem că $CT=d\left(C,AB\right)=3\sqrt{2}$ cm	**1p**
4.	**a)** $AG=GM$	**1p**
	Cum $CG=AG\Rightarrow CG=\dfrac{AM}{2}\Rightarrow$ triunghiul ACM este dreptunghic, cu $\sphericalangle ACM=90^\circ$	**1p**
	b) $\sphericalangle BAC=\sphericalangle MTC=60^\circ\Rightarrow AB\parallel TM$ și, cum $\sphericalangle ABM=90^\circ$, obținem $ABMT$ trapez dreptunghic	**1p**
	$AT=TM=2\cdot TC\Rightarrow TM=4$ cm, $BM=\dfrac{AM}{2}=2\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$\mathcal{A}_{ABMT}=\dfrac{\left(6+4\right)\cdot 2\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$ cm^2	**1p**
5.	**a)** $\sphericalangle MAB=60^\circ\Rightarrow \sphericalangle SAD=30^\circ$	**1p**
	Triunghiurile TBA și SAD sunt congruente, deci $AT=DS$	**1p**
	b) Triunghiul AMB dreptunghic și $\sphericalangle ABM=30^\circ\Rightarrow AM=\dfrac{AB}{2}=4$ cm	**1p**
	Triunghiul AMQ dreptunghic și $\sphericalangle MAD=30^\circ\Rightarrow MQ=\dfrac{AM}{2}=2$ cm, unde $MQ\perp AD$, $Q\in AD$, de unde obținem $AQ=2\sqrt{3}$ cm, deci $DQ=2\left(4-\sqrt{3}\right)$cm	**1p**
	În triunghiul dreptunghic MDQ, DM este ipotenuză, deci $DM>DQ$	**1p**
6.	**a)** $MB=2$cm	**1p**
	În triunghiul dreptunghic CBM, $CM=\sqrt{MB^2+BC^2}\Rightarrow CM=\sqrt{2^2+8^2}=2\sqrt{5}$cm	**1p**
	b) $SOBM$ paralelogram, unde S este mijlocul muchiei $A'D'\Rightarrow BO\parallel MS$, deci $\sphericalangle\left(BO,MP\right)=\sphericalangle\left(MS,MP\right)$	**1p**
	Triunghiurile SAM, MCP și $PD'S$ sunt congruente, deci $SM=MP=PS$	**1p**
	Triunghiul SMP este echilateral, deci $\sphericalangle\left(MS,MP\right)=\sphericalangle SMP=60^\circ$	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:.....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

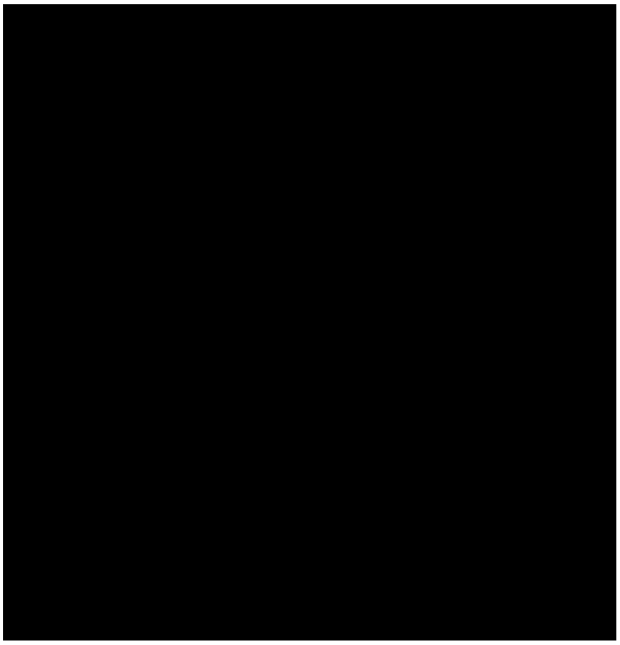
Anul școlar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Cel mai mare număr întreg de două cifre este: **a)** -99 **b)** -10 **c)** 10 **d)** 99
5p	**2.** Știind că $\frac{x-1}{7}=\frac{y}{2}$, rezultatul calculului $2x-7y$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 5
5p	**3.** Luni, temperatura înregistrată la ora 9 la o stație meteo a fost de $-4°C$, iar marți, la aceeași oră, au fost înregistrate $2°C$. Temperatura înregistrată marți este mai mare decât temperatura înregistrată luni cu: **a)** $-6°C$ **b)** $-2°C$ **c)** $2°C$ **d)** $6°C$
5p	**4.** Dintre numerele $\frac{7}{2}$, $\frac{7}{3}$, $\frac{7}{4}$ și $\frac{7}{5}$, cel mai mic este: **a)** $\frac{7}{5}$ **b)** $\frac{7}{4}$ **c)** $\frac{7}{3}$ **d)** $\frac{7}{2}$

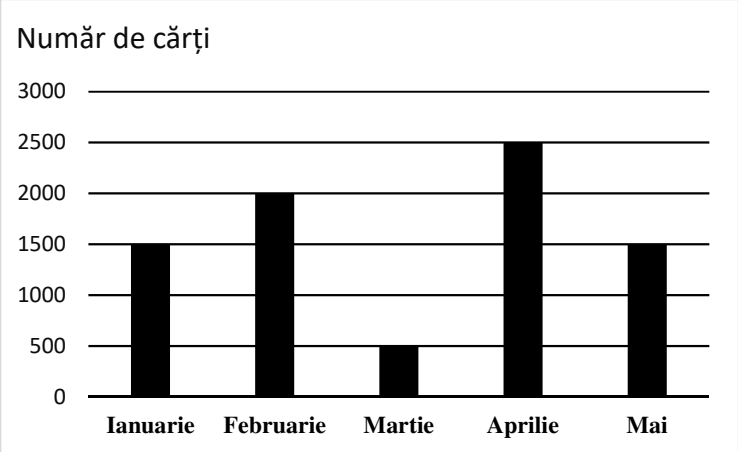
5p **5.** Patru elevi, Elena, Sofia, Petrică și Tudor, calculează produsul numerelor $a=\sqrt{5}-2$ și $b=\sqrt{5}+2$, iar rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Elena	Sofia	Petrică	Tudor
9	7	3	1

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Elena
b) Sofia
c) Petrică
d) Tudor

5p **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate informații despre numărul de cărți vândute într-o librărie în primele cinci luni ale anului 2025.



Afirmația: „Conform informațiilor din diagramă, cele mai multe cărți au fost vândute în luna aprilie .” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

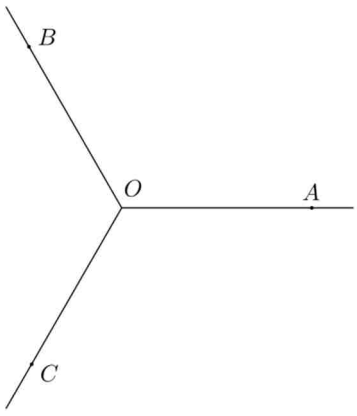
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B și C sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB=4\text{cm}$ și $BC=14\text{cm}$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, iar punctul N este mijlocul segmentului BC, lungimea segmentului MN este egală cu:

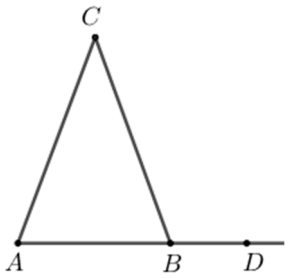
a) 9 cm
b) 7 cm
c) 4 cm
d) 2 cm

5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile congruente AOB, BOC și COA. Măsura unghiului AOB este egală cu:

a) $60°$
b) $90°$
c) $120°$
d) $150°$

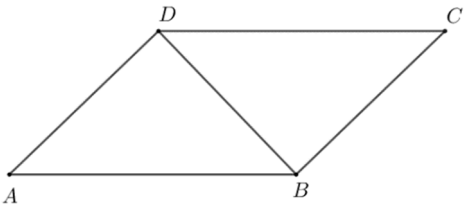


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, cu $AC = BC$ și măsura unghiului ACB este de $40°$. Punctele A, B și D sunt coliniare, în această ordine. Măsura unghiului CBD este egală cu:



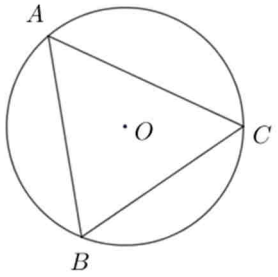
a) $40°$
b) $70°$
c) $100°$
d) $110°$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu $AD = BD = 4\sqrt{2}$ cm. Măsura unghiului ADB este egală cu $90°$. Lungimea segmentului CD este egală cu:



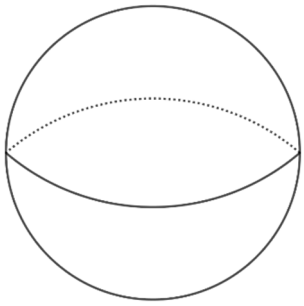
a) 4 cm
b) $4\sqrt{2}$ cm
c) $4\sqrt{3}$ cm
d) 8 cm

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și raza de 10 cm. Triunghiul echilateral ABC este înscris în acest cerc. Lungimea laturii triunghiului echilateral ABC este egală cu:



a) $10\sqrt{2}$ cm
b) 15 cm
c) $10\sqrt{3}$ cm
d) 20 cm

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o sferă cu raza de 3 cm. Volumul sferei este egal cu:



a) 108π cm^3
b) 36π cm^3
c) 27π cm^3
d) 12π cm^3

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Doi copii, Alin și Maria, au împreună o sumă de bani S. Sumele de bani ale fiecărui copil sunt exprimate prin numere naturale. Dacă Alin ar cheltui 10 lei, atunci lui Alin i-ar rămâne de două ori mai puțini bani decât are Maria.

(2p) a) Este posibil ca suma S să fie egală cu 140 de lei? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină suma *S,* știind că, dacă Maria i-ar da 15 lei lui Alin, atunci cei doi copii ar avea sume egale de bani.

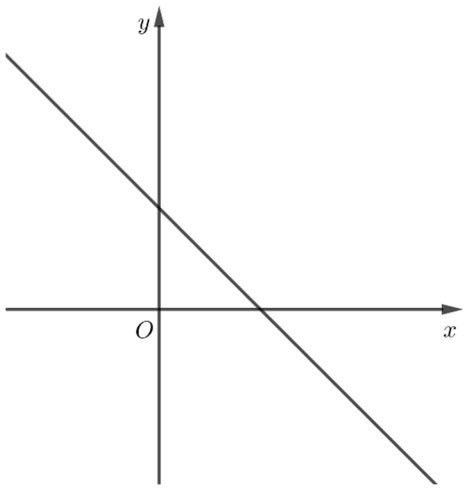
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}\right):\frac{1}{x^3-4x}$, unde x este număr real, $x\neq 0$, $x\neq -2$ și $x\neq 2$.

(2p) a) Arată că $\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x+2}=\frac{x-1}{(x+2)(x-2)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$ și $x\neq 2$.

(3p) b) Arată că numărul $N=E\left(\sqrt{2}-1\right)+3\cdot E\left(\sqrt{2}+1\right)$ este natural.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$.

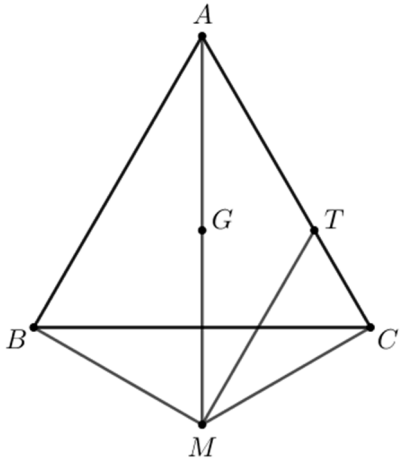
(2p) a) Arată că $f(1)\cdot f(0)=2$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Determină distanța de la punctul $C(0,-4)$ la dreapta AB.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 6$ cm. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC și punctul M este simetricul punctului A față de punctul G.

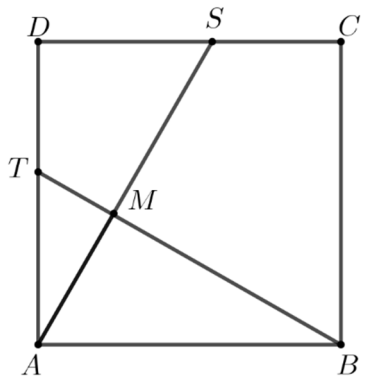
(2p) a) Arată că măsura unghiului ACM este egală cu $90°$.



(3p) b) Bisectoarea unghiului AMC intersectează dreapta AC în punctul T. Arată că aria patrulaterului $ABMT$ este egală cu $10\sqrt{3}$ cm^2.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, cu $AB = 8$ cm. Punctul T aparține laturii AD, astfel încât măsura unghiului ABT este egală cu $30°$. Perpendiculara din punctul A pe dreapta BT intersectează dreptele BT și DC în punctele M, respectiv S.

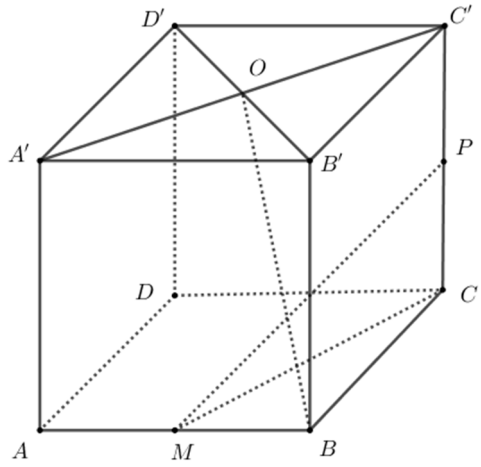
(**2p) a)** Demonstrează că segmentele AT și DS sunt congruente.



(3p) b) Arată că $DM > 2\left(4-\sqrt{3}\right)$ cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 4$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul P este mijlocul segmentului $C'C$.

(2p) a) Arată că lungimea segmentului CM este egală cu $2\sqrt{5}$ cm.



(3p) b) Arată că măsura unghiului dreptelor BO și MP este egală cu $60°$, unde $A'C' \cap B'D' = \{O\}$.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2024 - 2025
Matematică

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $3(A+4)=45-4$, unde A reprezintă numărul alunelor din coșul lui Alin	**1p**
	$A+4=\frac{41}{3}$, nu este număr natural, deci nu este posibil ca Ioana să aibă în coș exact 45 de alune	**1p**
	b) $3(A+4)=I-4$, unde I reprezintă numărul alunelor din coșul Ioanei	**1p**
	$6(A-2)=I+2$	**1p**
	$I=46$, deci Ioana are în coș 46 de alune	**1p**
2.	**a)** $x^2+2x-3=x^2-x+3x-3=$	**1p**
	$=x(x-1)+3(x-1)=(x-1)(x+3)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=\frac{(x+3)(x+3)+4x}{(x-1)(x+3)}\cdot\frac{x-1}{x+9}=$	**1p**
	$=\frac{x^2+10x+9}{x+3}\cdot\frac{1}{x+9}=\frac{x+1}{x+3}$, pentru orice număr real x, $x\neq-9$, $x\neq-3$ și $x\neq1$	**1p**
	$E(3)\cdot E(4)\cdot E(5)\cdot E(6)=\frac{5}{18}$, de unde obținem $T=\sqrt{90\cdot\frac{5}{18}}=5$, deci numărul T este natural	**1p**

3.	**a)** $f(4)=0$	**1p**
	$f(4)\cdot f(6)=0\cdot f(6)=0$	**1p**
	b) $A(4,0)$, $B(0,-2)$	**1p**
	$AC=\sqrt{AO^2+OC^2}=5$, $BC=5$, AB=$\sqrt{\text{AO}^2+\text{BO}^2}=2\sqrt{5}$	**1p**
	În triunghiul isoscel ACB, CD este mediană, deci CD $\perp$ AB, de unde obținem $CD=2\sqrt{5}$	**1p**
4.	**a)** $\mathcal{A}_{\Delta AHC}=\dfrac{HM\cdot AC}{2}=$	**1p**
	$=\dfrac{2\cdot 9}{2}=9\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\Delta AHM\sim\Delta ACD\Rightarrow\dfrac{AH}{AC}=\dfrac{HM}{CD}$	**1p**
	Cum $AH=2\cdot CD\Rightarrow\dfrac{2\cdot CD}{9}=\dfrac{2}{CD}$	**1p**
	$CD=3\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** ΔABC este dreptunghic isoscel, deci $\sphericalangle ACB=45^\circ$	**1p**
	ΔBCQ este dreptunghic isoscel $\Rightarrow\sphericalangle BCQ=45^\circ$, deci $\sphericalangle ACQ=\sphericalangle ACB+\sphericalangle BCQ=90^\circ$	**1p**
	b) $\sphericalangle DOC=\sphericalangle OCQ=90^\circ\Rightarrow DO\parallel CQ$, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD	**1p**
	$\Delta OCB\equiv\Delta QCB$, deci $CO=CQ$ și $CO=DO$, deci $DO=CQ$ și, cum $DO\parallel CQ$, obținem că $DOQC$ este paralelogram	**1p**
	$OT=TC=\dfrac{CO}{2}$, $AT=AO+OT=CO+\dfrac{CO}{2}=3\cdot\dfrac{CO}{2}=3\cdot TC$	**1p**
6.	**a)** $V=AB^3=$	**1p**
	$=6^3=216\text{cm}^3$	**1p**
	b) $AN\cap A'B'=\{P\}$, $D'M\cap DC=\{Q\}$	**1p**
	$\Delta ABN\equiv\Delta PB'N\Rightarrow AB=PB'$ și $\Delta D'C'M\equiv\Delta QCM\Rightarrow D'C'=QC$	**1p**
	$PB'=QC$ și $PB'\parallel QC\Rightarrow CQPB'$ este paralelogram, deci $PQ=B'C=6\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:.....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

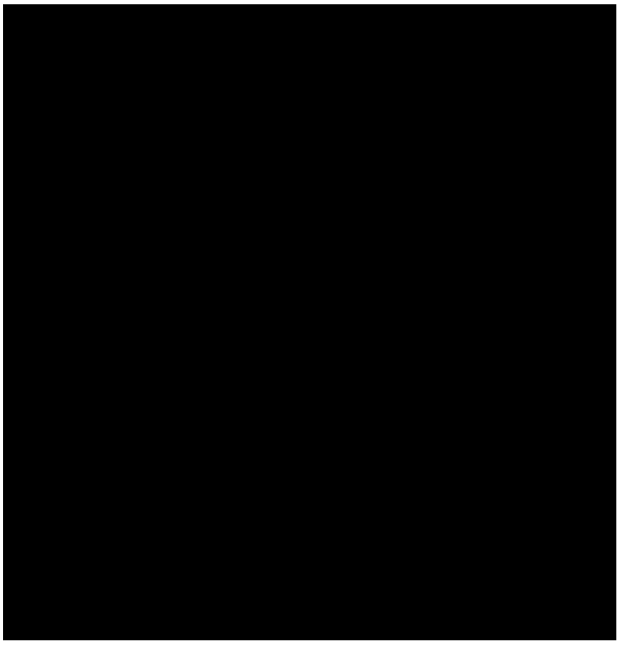
Anul școlar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $25-5\cdot 3$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 10 **c)** 60 **d)** 90
5p	**2.** Din cei 400 de pomi fructiferi ai unei livezi, 50% sunt pruni. Numărul prunilor din livadă este egal cu: **a)** 40 **b)** 50 **c)** 100 **d)** 200
5p	**3.** Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-3,5]$ este egal cu: **a)** -3 **b)** -2 **c)** 0 **d)** 5
5p	**4.** Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $3x-1\geq 5$ este: **a)** $(-\infty,2]$ **b)** $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right]$ **c)** $[2,+\infty)$ **d)** $\left[\frac{4}{3},+\infty\right)$

5p **5.** Patru elevi, Ioana, Mara, Petrică și Ștefan, calculează produsul numerelor $a=\sqrt{3}+\sqrt{2}$ și $b=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, iar rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ioana	Mara	Petrică	Ștefan
7	5	1	-1

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Ioana
b) Mara
c) Petrică
d) Ștefan

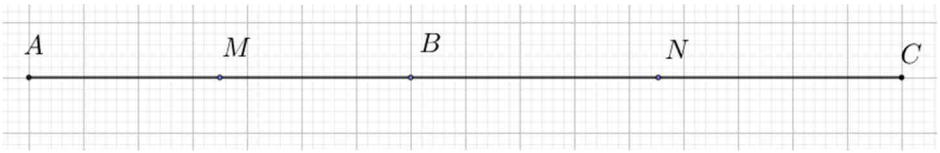
5p **6.** O mașină se deplasează în intervalul orar $12:00-14:00$ cu o viteză medie de $80\,\text{km/h}$. Mihai afirmă că: „În acest interval de timp, mașina a parcurs o distanță egală cu $160\,\text{km}$.”. Afirmația lui Mihai este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

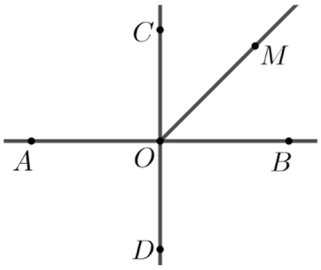
5p **1.** În figura alăturată punctele A, B și C sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AC=16\,\text{cm}$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, iar punctul N este mijlocul segmentului BC, lungimea segmentului MN este egală cu:

a) $4\,\text{cm}$
b) $8\,\text{cm}$
c) $12\,\text{cm}$
d) $16\,\text{cm}$



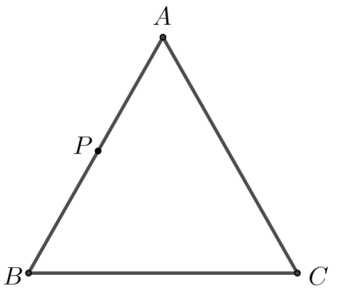
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele perpendiculare AB și CD. Punctul O este intersecția celor două drepte și semidreapta OM este bisectoarea unghiului BOC. Măsura unghiului AOM este egală cu:

a) $45°$
b) $125°$
c) $135°$
d) $180°$

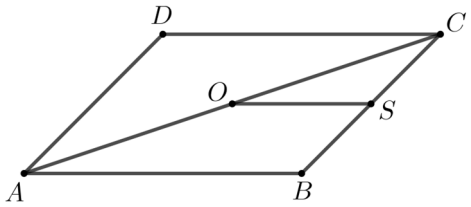


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $BC=4\,\text{cm}$. Punctul P este mijlocul segmentului AB. Distanța de la punctul P la dreapta AC este egală cu:

a) $1\,\text{cm}$
b) $\sqrt{3}\,\text{cm}$
c) $2\,\text{cm}$
d) $\sqrt{5}\,\text{cm}$

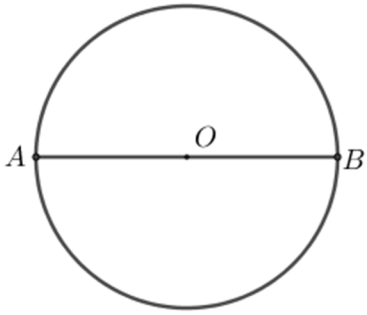


5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$. Punctul O este mijlocul diagonalei AC, iar punctul S este mijlocul laturii BC. Raportul dintre aria triunghiului COS și aria paralelogramului $ABCD$ este egal cu:



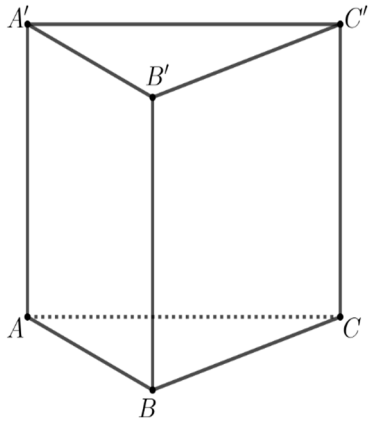
a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{4}$
c) 4
d) 8

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și diametru $AB = 50\text{cm}$. Lungimea acestui cerc este egală cu:



a) $2500\pi\text{cm}$
b) $100\pi\text{cm}$
c) $50\pi\text{cm}$
d) $25\pi\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC. Dacă $AB = AA' = 6\text{cm}$, atunci aria laterală a prismei este egală cu:



a) 216cm^2
b) 108cm^2
c) $54\sqrt{3}\text{cm}^2$
d) $18\sqrt{3}\text{cm}^2$

SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Doi copii, Alin și Ioana, au fiecare câte un coș cu alune. Dacă Alin ar primi de la Ioana 4 alune, atunci Ioana ar avea de 3 ori mai multe alune decât Alin.
(2p) a) Este posibil ca Ioana să aibă în coș exact 45 de alune? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Dacă Ioana ar primi de la Alin două alune, atunci Alin ar avea de 6 ori mai puține alune decât Ioana. Determină numărul alunelor din coșul Ioanei.

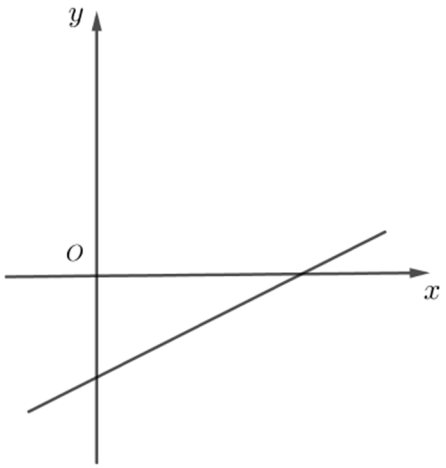
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x+3}{x-1}+\frac{4x}{x^2+2x-3}\right):\frac{x+9}{x-1}$, unde x este număr real, $x\neq -9$, $x\neq -3$ și $x\neq 1$.

(2p) a) Arată că $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arată că numărul $T=\sqrt{90\cdot E(3)\cdot E(4)\cdot E(5)\cdot E(6)}$ este natural.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}\cdot x-2.$

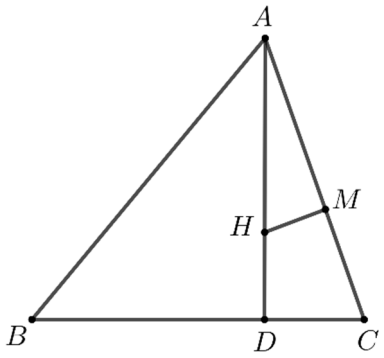
(2p) a) Arată că $f(4)\cdot f(6)=0$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Calculează lungimea medianei din C a triunghiului ABC, unde $C(0,3)$.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, cu $AC = 9\text{cm}$. Punctul H este ortocentrul triunghiului ABC, punctul M este proiecția punctului H pe dreapta AC și $HM = 2\text{cm}$.

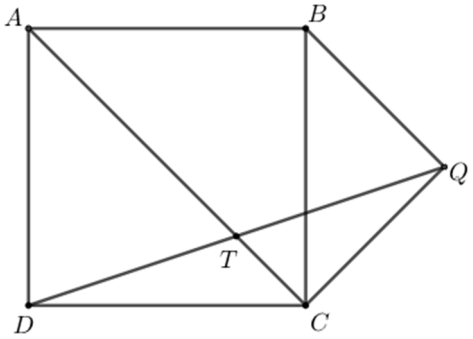
(2p) a) Arată că aria triunghiului AHC este egală cu 9cm^2.



(3p) b) Știind că $AH = 2 \cdot CD$, unde $\{D\} = AH \cap BC$, determină lungimea segmentului CD.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic isoscel BCQ, cu $QB = QC$, unde punctul Q este situat în exteriorul pătratului.

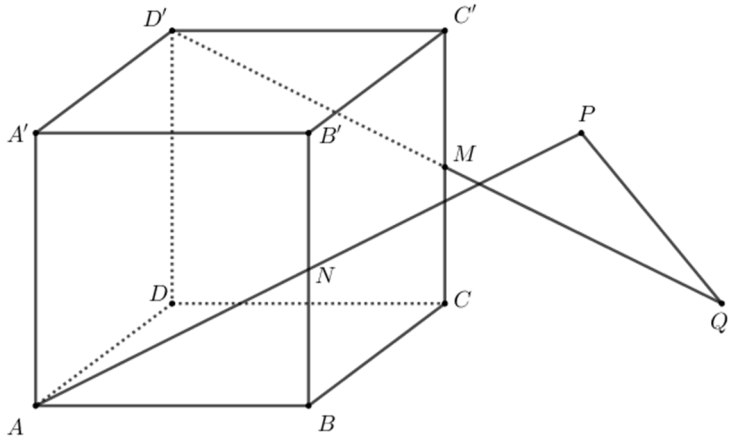
(**2p**) **a)** Arată că măsura unghiului ACQ este egală cu $90°$.



(3p) b) Arată că $AT = 3 \cdot TC$, unde T este punctul de intersecție a dreptelor AC și DQ.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6\,\text{cm}$.

(2p) a) Arată că volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$ este egal cu $216\,\text{cm}^3$.



(3p) b) Punctul N este mijlocul segmentului BB', punctul M este mijlocul segmentului CC', $AN \cap (A'B'C') = \{P\}$ și $D'M \cap (ABC) = \{Q\}$. Determină lungimea segmentului PQ.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2025 - 2026
Matematică

Model

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Bogdan ar avea în prezent $4\cdot 3+8=20$ de ani	**1p**
	Peste un an Tudor ar avea vârsta $4+1=5$ ani, iar Bogdan ar avea vârsta $20+1=21$ de ani și, cum $5\cdot 5=25$, iar $25\neq 21$, obținem că Tudor nu poate avea în prezent 4 ani.	**1p**
	b) $b=3a+8$ **,** unde a reprezintă vârsta lui Tudor în prezent și b reprezintă vârsta lui Bogdan în prezent	**1p**
	$b+1=5(a+1)$	**1p**
	$b=14$ ani	**1p**
2.	**a)** $\frac{1}{x+3}+\frac{3}{x^2-9}=\frac{1}{x+3}+\frac{3}{(x-3)(x+3)}=$	**1p**
	$=\frac{x-3+3}{(x-3)(x+3)}=\frac{x}{(x-3)(x+3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$, $x\neq 3$	**1p**
	b) $E(x)=\frac{3}{(x+3)^2}\cdot\frac{x}{x-3}\cdot\frac{(x-3)(x+3)}{x}=\frac{3}{x+3}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$, $x\neq 0$ și $x\neq 3$	**1p**

	$N=\dfrac{n+3+n+4+n+5}{3}=\dfrac{3n+12}{3}=$	**1p**
	$=n+4$, care este număr natural, pentru orice număr natural n, $n>3$	**1p**
3.	**a)** $f(2)=8$	**1p**
	$f(-2)=0$, de unde obținem $f(2)+f(-2)=8$	**1p**
	b) $A(-2,0)$ și $B(0,4)$	**1p**
	Triunghiul BOM este dreptunghic în O, deci $BM=5$	**1p**
	$AM=5$, de unde obținem $AM=BM$, deci triunghiul AMB este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle MBA$	**1p**
4.	**a)** AC este bisectoarea unghiului $BAD \Rightarrow \sphericalangle DAC=\sphericalangle CAB$	**1p**
	$CD \parallel AB \Rightarrow \sphericalangle CAB=\sphericalangle DCA$, de unde obținem $\sphericalangle DAC=\sphericalangle DCA \Rightarrow$ triunghiul ADC este isoscel, deci $AD=DC=16\text{cm}$	**1p**
	b) $CD=AD \Rightarrow \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \sphericalangle AOD=\sphericalangle DOC$	**1p**
	$CD \parallel AB \Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BC}$, de unde obținem $\sphericalangle AOD=\sphericalangle BOC$	
	$\sphericalangle AOB=180^\circ \Rightarrow \sphericalangle AOD=\sphericalangle DOC=\sphericalangle BOC=60^\circ$, deci triunghiurile AOD, DOC și BOC sunt echilaterale și congruente	**1p**
	$\mathcal{A}_{ABCD}=3\cdot\mathcal{A}_{\Delta AOD}=192\sqrt{3}\text{cm}^2$	**1p**
5.	**a)** $AD=AM=\dfrac{2}{3}\cdot 15=10\text{cm}$	**1p**
	$P_{ABCD}=2(AB+AD)=2\cdot 25=50$ cm	**1p**
	b) $\mathcal{A}_{\Delta ADM}=\dfrac{AM\cdot d(D,AM)}{2}=\dfrac{8\cdot 10}{2}=40\text{cm}^2$	**1p**
	$\sphericalangle ADM \equiv \sphericalangle DNC$, $\sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle DCN$, deci $\Delta ADM \sim \Delta CND$	**1p**
	$\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta ADM}}{\mathcal{A}_{\Delta NCD}}=\left(\dfrac{AM}{CD}\right)^2=\dfrac{4}{9}$, deci $\mathcal{A}_{\Delta NCD}=\dfrac{9}{4}\cdot 40=90\text{cm}^2$	**1p**
6.	**a)** MN este linie mijlocie în triunghiul DAC, deci $MN=\dfrac{AC}{2}=\dfrac{8\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	$NP=MP=4\sqrt{2}\text{cm}$, deci triunghiul MNP este echilateral $\Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{\left(4\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=8\sqrt{3}\text{cm}^2$	**1p**
	b) $DD'\cap(MNP)=\{P\}$, P mijlocul lui DD', de unde obținem $d(D',(MNP))=d(D,(MNP))$	**1p**
	$DM=DN=DP$, deci $DMNP$ este piramidă regulată cu baza triunghiul echilateral MNP	**1p**
	$\Rightarrow d(D,(MNP))=DT$, unde T este centrul cercului circumscris triunghiului MNP	
	$PQ\perp MN$, $Q\in MN$, $DQ=\dfrac{1}{4}\cdot BD=2\sqrt{2}\text{cm}$, $DP=4\text{cm}$ și, cum $PQ=2\sqrt{6}\text{cm} \Rightarrow$	**1p**
	$DT=\dfrac{DP\cdot DQ}{PQ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm}$, deci $d(D',(MNP))=DT=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ cm	

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:…….....
…….....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
…….....……..……
Școala de proveniență: .....…
…….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

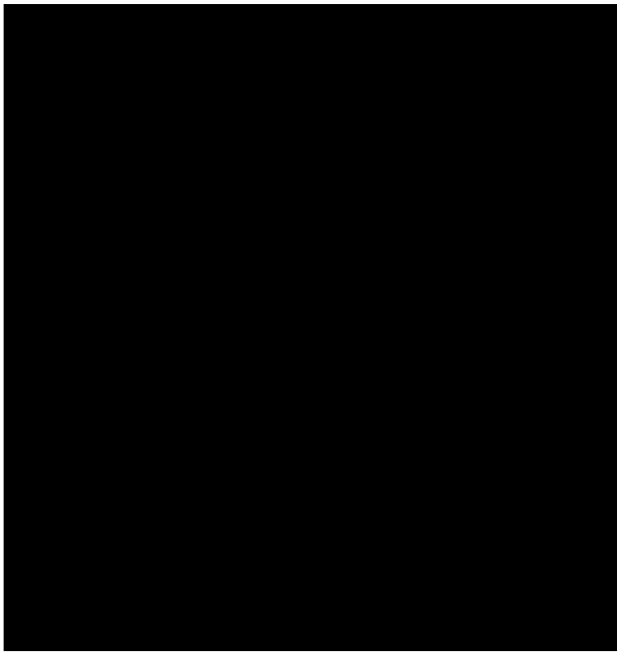
Anul școlar 2025 – 2026

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $36:4-4\cdot 2$ este egal cu: **a)** 17 **b)** 10 **c)** 1 **d)** 0
5p	**2.** Cel mai mare număr natural divizibil cu 5 din intervalul $[3,20)$ este: **a)** 20 **b)** 15 **c)** 5 **d)** 3
5p	**3.** Dacă $\frac{a}{4}=\frac{5}{2}$, atunci rezultatul calculului $2a+10$ este egal cu: **a)** 30 **b)** 20 **c)** 15 **d)** 10
5p	**4.** Dintre cei 250 de elevi participanți la un concurs, 40% sunt băieți. Numărul băieților care participă la concurs este egal cu: **a)** 160 **b)** 150 **c)** 100 **d)** 90

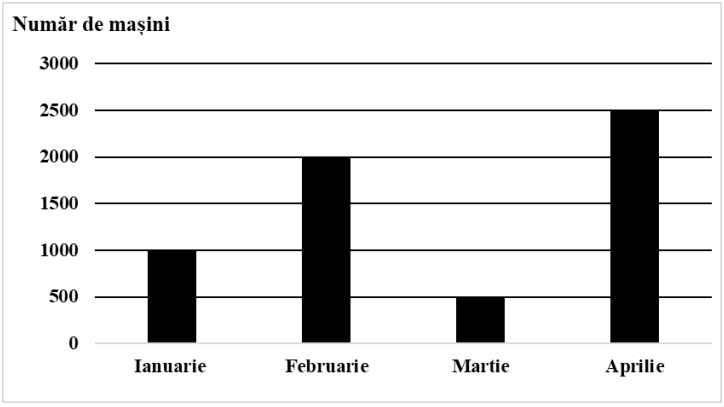
5p **5.** Patru elevi, Ioan, Mihai, Gabriela și Maria, au calculat media aritmetică a numerelor $a=\sqrt{12}$ și $b=10-2\sqrt{3}$. Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ioan	Mihai	Gabriela	Maria
10	$5+2\sqrt{3}$	5	$5-2\sqrt{3}$

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Ioan
b) Mihai
c) Gabriela
d) Maria

5p **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate informații despre numărul de mașini vândute de un comerciant în primele patru luni ale anului 2025.



Afirmația: „Conform informațiilor din diagramă, cele mai multe mașini au fost vândute în luna februarie.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

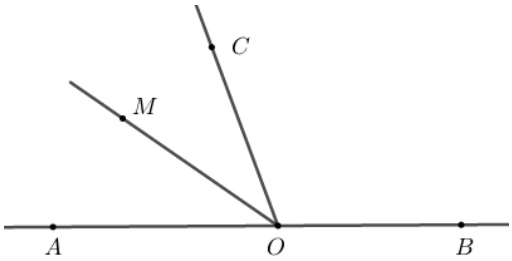
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $CD=3\text{cm}$, $BD=3\cdot CD$ și $AD=3\cdot BD$. Lungimea segmentului AC este egală cu:

a) 27cm
b) 24cm
c) 21cm
d) 18cm

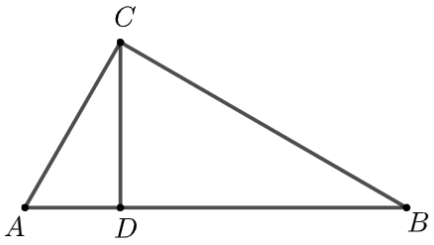
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente suplementare AOC și COB. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOC, iar măsura unghiului MOC este egală cu $35°$. Măsura unghiului BOC este egală cu:

a) $35°$
b) $70°$
c) $110°$
d) $145°$



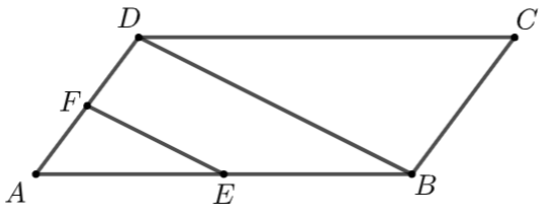
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în C, cu $AB=12\text{cm}$ și măsura unghiului B egală cu $30°$. Proiecția punctului C pe dreapta AB este punctul D. Lungimea segmentului CD este egală cu:

a) 3cm
b) $2\sqrt{3}\text{cm}$
c) $3\sqrt{3}\text{cm}$
d) 6cm



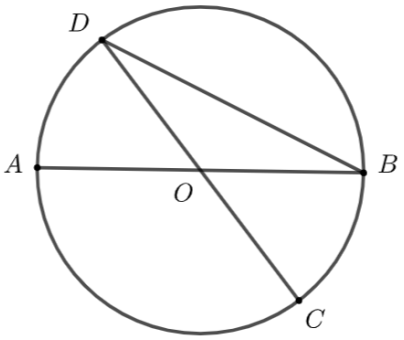
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu aria egală cu 96cm^2. Punctele E și F sunt mijloacele laturilor AB, respectiv AD. Aria triunghiului AEF este egală cu:

a) 12 cm^2
b) 24cm^2
c) 48 cm^2
d) 72cm^2



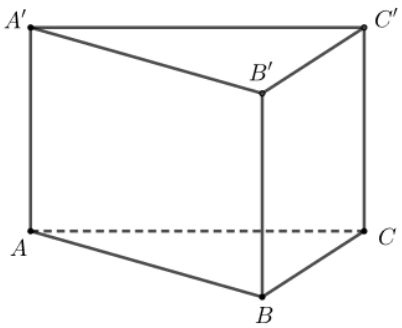
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centrul în punctul O, iar AB și CD sunt diametre. Arcul AD are măsura egală cu $52°$. Măsura unghiului BDC este egală cu:

a) $26°$
b) $30°$
c) $52°$
d) $60°$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC, $AA'=2\sqrt{3}\text{cm}$ și $AB=4\text{cm}$. Volumul prismei $ABCA'B'C'$ este egal cu:

a) $4\sqrt{3}\text{cm}^3$
b) 8cm^3
c) $8\sqrt{3}\text{cm}^3$
d) 24cm^3



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p

1. În prezent, vârsta lui Bogdan este cu 8 ani mai mare decât triplul vârstei lui Tudor. Peste un an vârsta lui Bogdan va fi de 5 ori mai mare decât vârsta lui Tudor.

(2p) a) Verifică dacă Tudor poate avea în prezent 4 ani. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină vârsta lui Bogdan în prezent.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{3}{x^2+6x+9}\cdot\dfrac{x}{x-3}:\left(\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x^2-9}\right)$, unde x este număr real, $x\neq -3$, $x\neq 0$ și $x\neq 3$.

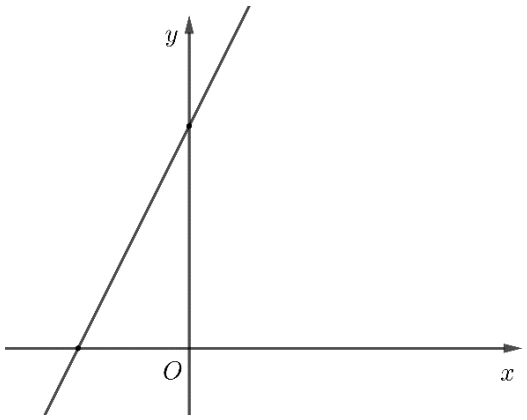
(2p) a) Arată că $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{3}{x^2-9}=\dfrac{x}{(x-3)(x+3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$ și $x\neq 3$.

(3p) b) Arată că numărul $N=\frac{1}{E(n)}+\frac{1}{E(n+1)}+\frac{1}{E(n+2)}$ este natural, pentru orice număr natural n, $n>3$.

5p

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$.

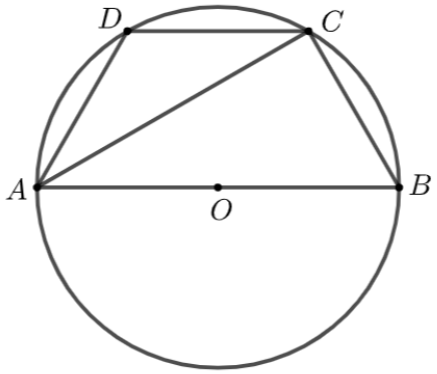
(2p) a) Arată că $f(2)+f(-2)=8$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele *Ox* și *Oy* ale sistemului de axe ortogonale *xOy* în punctele A, respectiv B. Arată că unghiurile *BAM* și *MBA* sunt congruente, știind că $M(3,0)$.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O. Punctele A, B, C și D aparțin cercului, astfel încât AB este diametru. Dreaptele CD și AB sunt paralele, semidreapta AC este bisectoarea unghiului BAD și $CD = 16\text{cm}$.

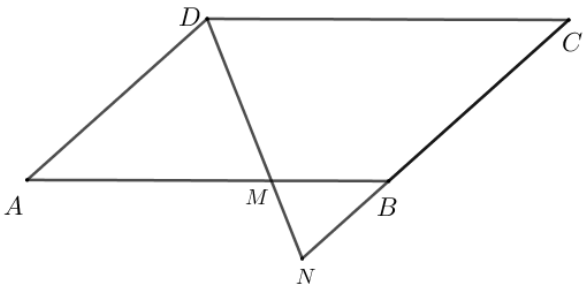
(2p) a) Arată că $AD = 16\text{cm}$.



(3p) b) Calculează aria patrulaterului $ABCD$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AB = 15\,\text{cm}$. Punctul M aparține segmentului AB, astfel încât $AM = AD = \frac{2}{3}AB$.

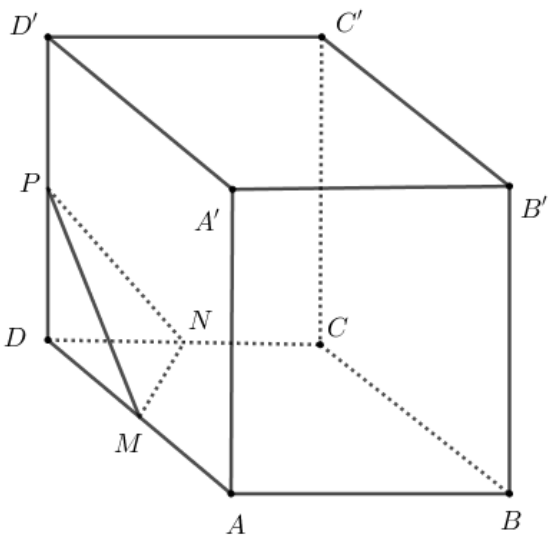
(**2p) a)** Arată că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu $50\,\text{cm}$.



(3p) b) Știind că distanța de la punctul D la dreapta AB este egală cu 8 cm și că dreapta DM intersectează dreapta BC în punctul N, calculează aria triunghiului NCD.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB=8\text{cm}$. Punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor AD, DC, respectiv DD'.

(2p) a) Arată că aria triunghiului MNP este egală cu $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.



(3p) b) Arată că distanta la punctul D' la planul (MNP) este egală cu $\frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm}$.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2025-2026

Probă scrisă
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $e=2(b+1)$, deci e este număr par, unde e reprezintă numărul elevilor, iar b reprezintă numărul băncilor din acea clasă	**1p**
	Cum 25 este număr impar, obținem că nu este posibil ca în acea clasă să fie 25 de elevi	**1p**
	b) $e=4(b-6)+2$	**1p**
	$2(b+1)=4(b-6)+2 \Rightarrow 2b=24$	**1p**
	$b=12$	**1p**
2.	**a)** $x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=$	**1p**
	$=x(x-1)-2(x-1)=(x-2)(x-1)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=\left(\dfrac{1}{(x-2)(x-1)}-\dfrac{x-2}{(x-2)(x-1)}\right):\dfrac{(x-3)^2}{x-1}=$	**1p**

	$=\frac{3-x}{(x-2)(x-1)}\cdot\frac{x-1}{(x-3)^2}=-\frac{x-3}{x-2}\cdot\frac{1}{(x-3)^2}=-\frac{1}{(x-2)(x-3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq 1$, $x\neq 2$ și $x\neq 3$	**1p**
	$T=-\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}\right)=-\frac{4}{5}$ și, cum $-\frac{\sqrt{64}}{10}<-\frac{\sqrt{50}}{10}$, obținem că $T<-\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1p**
3.	**a)** Punctul $C(10,0)$ este proiecția punctului B pe axa Ox, deci $AC=8$, $BC=4$	**1p**
	$AB^2=AC^2+BC^2=64+16=80\Rightarrow AB=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$	**1p**
	b) $M(m,0)\Rightarrow AM=\lvert m-2\rvert$	**1p**
	Triunghiul BMC este dreptunghic în C, $BM=\lvert m-2\rvert$, $CM=\lvert 10-m\rvert$, deci	**1p**
	$(m-2)^2=16+(10-m)^2$	
	$m=7$	**1p**
4.	**a)** $BD=4\sqrt{2}$ cm	**1p**
	$MO=OB=\frac{BD}{2}$, deci $MO=2\sqrt{2}$ cm	**1p**
	b) În triunghiul isoscel OAD, OM este bisectoare, deci OQ este înălțime și mediană, Q este punctul de intersecție a dreptelor OM și AD, de unde obținem $OQ=2$ cm și $MQ=2\left(\sqrt{2}-1\right)$cm	**1p**
	$MQ\parallel AB\Rightarrow\Delta MPQ\sim\Delta BPA\Rightarrow\frac{MQ}{BA}=\frac{PQ}{PA}\Rightarrow\frac{BA+MQ}{BA}=\frac{PA+PQ}{PA}$, deci $\frac{2+2\sqrt{2}}{BA}=\frac{2}{PA}$	**1p**
	În triunghiul BAP, dreptunghic în A, $\operatorname{tg}(\sphericalangle BPA)=\frac{BA}{PA}=\frac{2+2\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{2}$	**1p**
5.	**a)** $MC=\frac{AC}{2}=4$cm	**1p**
	$MP\perp BC$, $\sphericalangle PMC=30°$, deci $PC=\frac{MC}{2}=2$ cm	**1p**
	b) $PQ\perp AB$, $\sphericalangle PBQ=60°$, de unde obținem $PQ=3\sqrt{3}$cm	**1p**
	$QT\perp MP$, unde $T\in MP$, $\sphericalangle MPQ=60°$, deci $\sin(\sphericalangle TPQ)=\frac{QT}{QP}$, de unde $QT=\frac{9}{2}$ cm	**1p**
	$MP=2\sqrt{3}$ cm, deci $\mathcal{A}_{\Delta MPQ}=\frac{QT\cdot MP}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ cm^2	**1p**
6.	**a)** $BM=CM$ și $PM=BM\Rightarrow BP=2\cdot CM$, deci triunghiul PCB este dreptunghic în C	**1p**
	$CM=3\sqrt{3}$cm, $PC=\sqrt{PB^2-BC^2}=6\sqrt{2}$cm	**1p**
	b) ME este linie mijlocie în triunghiul PDB, unde E este mijlocul segmentului BD, deci $ME\parallel DP\Rightarrow\sphericalangle(DP,CM)=\sphericalangle(ME,CM)$	**1p**
	$ME=\frac{AB}{2}=3$ cm și, cum $CE=CM$, obținem că triunghiul MCE este isoscel	**1p**
	$CF\perp ME$, $F\in ME\Rightarrow CF=\sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{11}}{2}$ cm, iar din triunghiul dreptunghic CFM	**1p**
	rezultă că $\sin(\sphericalangle CMF)=\frac{CF}{MC}=\frac{3\sqrt{11}}{2}\cdot\frac{1}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{33}}{6}$	

Prezenta lucrare conține _____ pagini

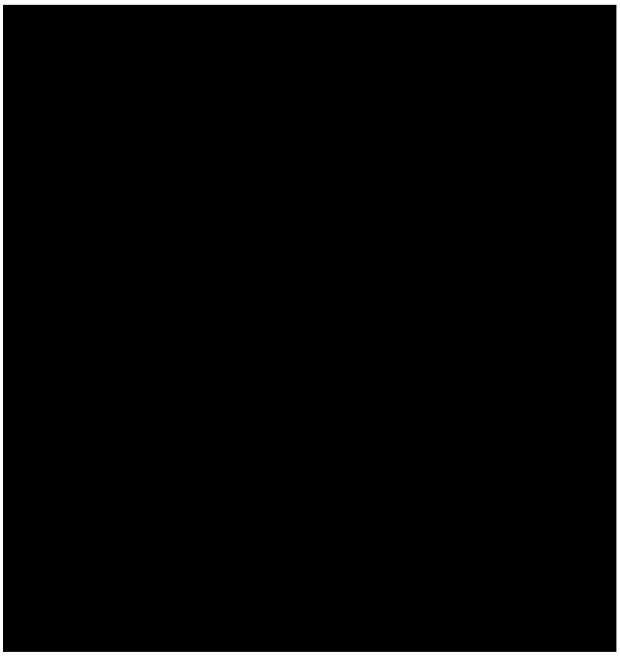
Numele:…….....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....……..……
Școala de proveniență: …….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ
PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A

Anul școlar 2025-2026

Disciplina: Matematică



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $12-8:4$ este egal cu: **a)** 16 **b)** 10 **c)** 5 **d)** 1
5p	**2.** Din cei 26 de elevi ai unei clase, 50% sunt băieți. Numărul băieților din acea clasă este egal cu: **a)** 5 **b)** 12 **c)** 13 **d)** 20
5p	**3.** Cel mai mare număr natural din intervalul $\left(\frac{2}{3},\frac{9}{4}\right]$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 9
5p	**4.** Dacă $2x=\frac{3}{2}$, atunci $4x$ este egal cu: **a)** $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{8}{3}$ **c)** 3 **d)** 6

5p **5.** Patru elevi, Alin, Mihai, Ioana și Maria, au calculat produsul numerelor $a=3+2\sqrt{2}$ și $b=3-2\sqrt{2}$. Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Alin	Mihai	Ioana	Maria
17	6	5	1

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Alin
b) Mihai
c) Ioana
d) Maria

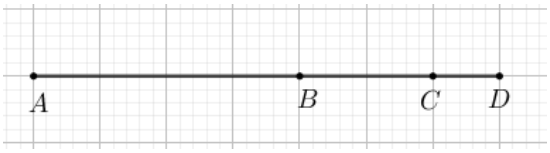
5p **6.** Două pixuri și un caiet costă 20 de lei. Enunțul: „Patru pixuri și două caiete, de același tip, costă 40 de lei.” este:

a) adevărat
b) fals

SUBIECTUL al II-lea

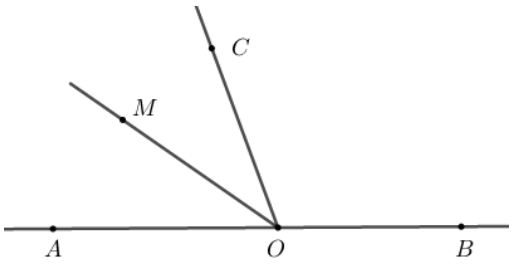
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât lungimea segmentului BC este jumătate din lungimea segmentului AB și lungimea segmentului CD este jumătate din lungimea segmentului BC. Dacă $BC=4$ cm, atunci lungimea segmentului AD este egală cu:



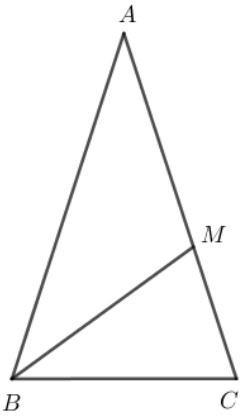
a) 20 cm
b) 14 cm
c) 12 cm
d) 7 cm

5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente suplementare AOC și COB. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOC, iar măsura unghiului MOB este egală cu $145°$. Măsura unghiului BOC este egală cu:



a) $35°$
b) $70°$
c) $105°$
d) $110°$

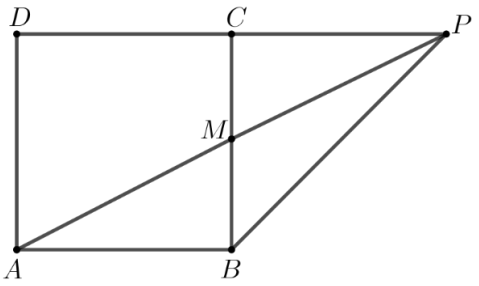
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, cu $AB=AC$ și măsura unghiului BAC este egală cu $36°$. Punctul M aparține laturii AC, astfel încât $AM=BM$. Măsura unghiului MBC este egală cu:



a) $18°$
b) $36°$
c) $54°$
d) $72°$

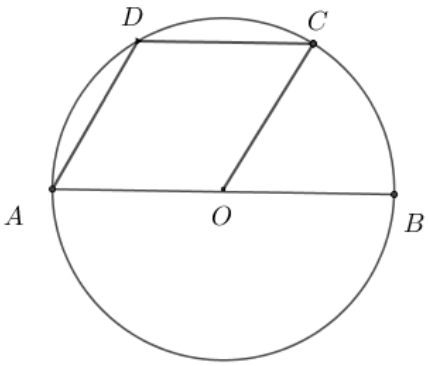
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, cu $AB = 4$ cm. Punctul M este mijlocul laturii BC. Dreptele AM și DC se intersectează în punctul P. Aria triunghiului ABP este egală cu:

a) 3 cm^2
b) 4 cm^2
c) 8 cm^2
d) 16 cm^2



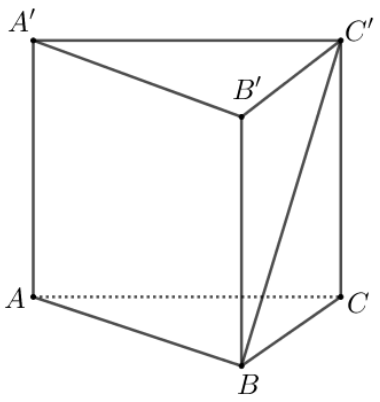
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și diametru AB. Punctele C și D aparțin cercului, astfel încât dreptele AB și CD sunt paralele și măsura unghiului BOC este egală cu $60°$. Măsura unghiului BAD este egală cu:

a) $30°$
b) $60°$
c) $90°$
d) $120°$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$, cu baza triunghiul echilateral ABC, cu $AA' = 3$ cm și $AB = 4$ cm. Lungimea segmentului BC' este egală cu:

a) 3cm
b) 4cm
c) 5cm
d) 7cm



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Pentru a putea așeza elevii unei clase câte doi în fiecare bancă, în această sală de clasă, ar mai trebui adusă încă o bancă în care să fie așezați doi elevi.

(2p) a) Verifică dacă în această clasă pot fi 25 de elevi. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Dacă elevii acestei clase se așază câte 4 în bancă, atunci într-una dintre bănci stau doar 2 elevi, iar 5 bănci rămân libere. Determină numărul băncilor din această clasă.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{1}{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{1-x}\right):\dfrac{x^2-6x+9}{x-1}$, unde x este număr real, $x\neq 1$, $x\neq 2$ și $x\neq 3$.

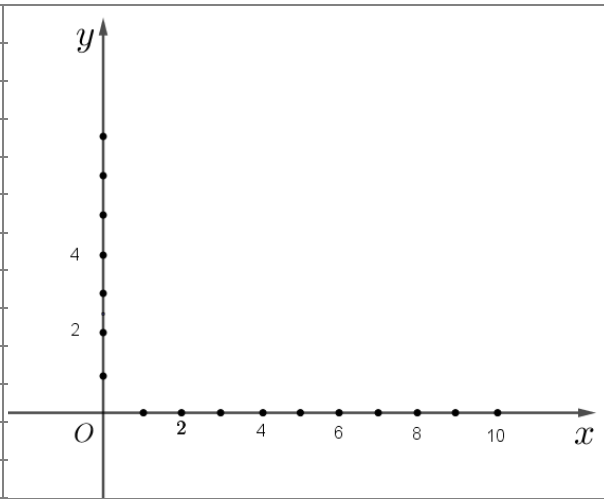
(2p) a) Arată că $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arată că numărul $T=E(4)+E(5)+E(6)+E(7)$ este mai mic decât $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5p

3. În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(2,0)$ și $B(10,4)$.

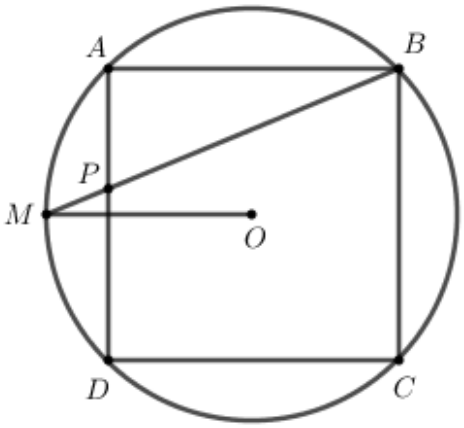
(2p) a) Arată că $AB = 4\sqrt{5}$.



(3p) b) Determină coordonatele punctului M, situat pe axa Ox, aflat la distanțe egale față de punctele A și B.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O. Punctele A, B, C și D aparțin cercului, astfel încât $ABCD$ este pătrat, cu $AB = 4$ cm. Punctul M este mijlocul arcului mic AD, iar dreptele AD și BM se intersectează în punctul P.

(2p) a) Arată că $MO = 2\sqrt{2}$ cm.

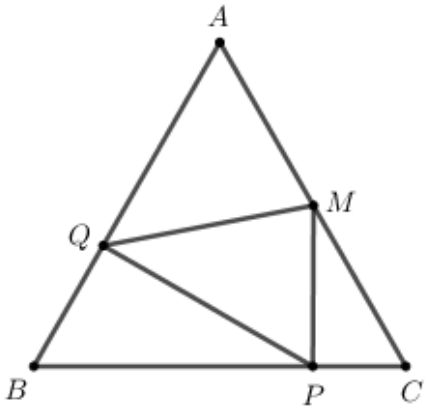


(3p) b) Demonstrează că tangenta unghiului BPA este egală cu $1+\sqrt{2}$.

5p

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 8\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AC, punctul P este proiecția punctului M pe dreapta BC și punctul Q este proiecția punctului P pe dreapta AB.

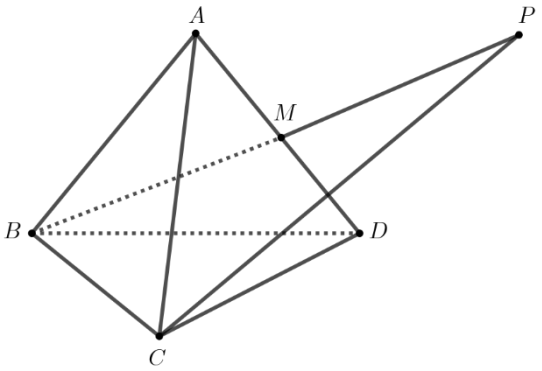
(**2p) a)** Arată că $PC = 2\,\text{cm}$.



(3p) b) Determină aria triunghiului MPQ.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$, cu $AB = 6\text{cm}$. Punctul M este mijlocul muchiei AD și punctul P este simetricul punctului B față de punctul M.

(2p) a) Arată că $CP = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.



(3p) b) Arată că sinusul unghiului dreptelor DP și CM este egal cu $\frac{\sqrt{33}}{6}$.

Prezenta lucrare conține_____pagini

Numele:.....
Inițiala tatălui:.....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență.....
.....
Localitatea.....

Nume și prenume asistent	**Semnătura**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII a
MATEMATICĂ
Anul școlar 2022-2023
Simulare județeană februarie 2023
Județul Giurgiu

Comisia de evaluare	Nota (cifre și litere)	Numele și prenumele profesorului	Semnătura
Evaluator 1			
Evaluator 2			
Nota finală			

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Se acordă zece puncte din oficiu**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore**

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 de puncte)**

5p **1**. Rezultatul calculului $25 - 25 : 25$ este:

a) 0

b) 24

c) 25

d) 6

5p **2.** Valoare numărului x din proporția $\frac{x}{6} = \frac{3}{18}$ este:

a) 6

b) 0

c) 1

d) 18

5p **3.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile înregistrate la ora 9, la o stație meteo, în fiecare zi a unei săptămâni din luna ianuarie.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (^{0} C)	-7	-8	3	5	0	-1	4

Conform tabelului, media aritmetică a temperaturilor pozitive înregistrate este egală cu:

a) 4^0 C

b) -11^0 C

c) $-\frac{4^0}{7}$ C

d) 0^0 C

5p

4. Suma elementelor mulțimii $M = \{x \in \mathbb{Z} | \ |3x + 2| \leq 11\}$ este egală cu:

a) 4

b) -4

c) 0

d) 11

5p

5. Maria, Cătălin, Cristina și Dan au calculat media gemetrică a numerelor $a = 3 + \sqrt{2}$ și $b = 3 - \sqrt{2}$. Rezultatele obținute de ei sunt trecute in tabelul următor:

Maria	Cătălin	Cristina	Dan
6	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	3

Dintre cei patru elevi,cel care a răspuns corect este:

a) Cătălin

b) Maria

c) Dan

d) Cristina

5p

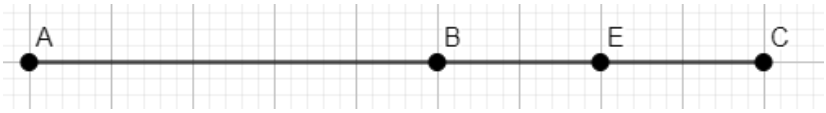
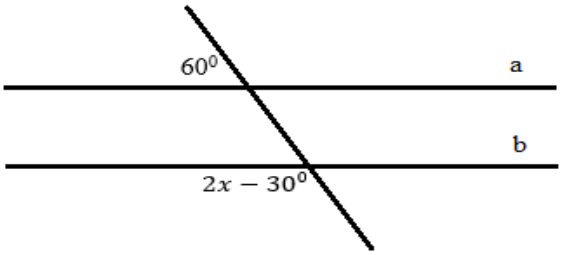
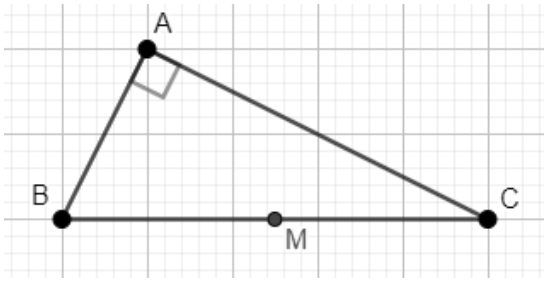
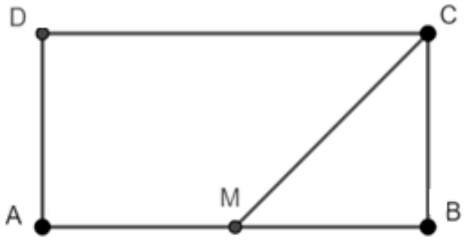
6. Alina afirmă că "15% din 2600 este 390". Afirmația Alinei este:

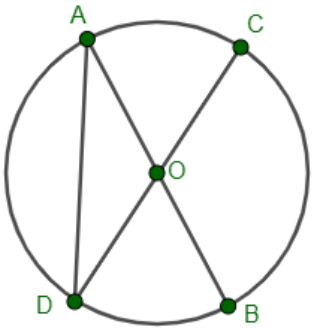
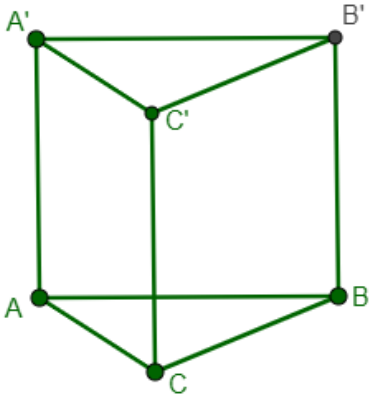
a) adevărată

b) falsă

SUBIECTUL II

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura următoare sunt reprezentate punctele coliniare A, B și C în această ordine, astfel încât AC=18 cm și BC=8 cm. Punctul E este mijlocul segmentului BC. Lungimea segmentului AE este egală cu: a) 10 cm b) 14 cm c) 5 cm c) 13 cm 
5p	**2.** Valoarea lui x din figura alăturată, astfel încât dreptele a și b să fie paralele, este de: a) 75^0 b) 45^0 c) 30^0 d) 15^0 
5p	**3.** Pe terenul de sport al școlii au fost instalate pentru proba de atletism patru obstacole reprezentate în figura de mai jos prin punctele A, B, C și M, astfel încât triunghiul ABC este dreptunghic în A cu $\sphericalangle ABC = 60^o$ și punctul M este situat la mijlocul distanței dintre B și C. Știind că distanța dintre obstacolele A și M este de 10 m, atunci distanța dintre A și C este egală cu: a) 10 m b) $10\sqrt{2}$ m c) $10\sqrt{3}$ m d) 20 m 
5p	**4.** În figura de mai jos este reprezentat dreptunghiul ABCD. Bisectoarea unghiului $\sphericalangle BCD$ intersectează latura AB în punctul M situat la mijlocul distanței dintre A și B. Știind că MB= 5 cm, aria dreptunghiului ABCD este egală cu: a) 30 cm^2 b) 40 cm^2 c) 50 cm^2 d) 25 cm^2 

5p	**5.** În cercul de centru O, AB și CD sunt diametre iar măsura unghiului ∢DOB este de 60^0. Măsura unghiului ∢CDA este de: a) 30^0 b) 60^0 c) 90^0 d) 120^0 
5p	**6.** Figura de mai jos reprezintă un acvariu în formă de prismă triunghiulară regulată dreaptă ABCA'B'C'. Știind că perimetrul bazei ABC a acvariului este egal cu 60 cm și înălțimea acestuia este de 40 cm, suma lungimilor tuturor muchiilor acvariului este egală cu: a) 400 cm b) 120 cm c) 200 cm d) 240 cm 

SUBIECTUL III
Scrie rezolvările complete **(30 de puncte)**

5p	**1.** Mai multe persoane doresc să cumpere un obiect. Dacă fiecare persoană dă câte 32 de lei, nu ajung 24 de lei, iar dacă fiecare dă câte 40 de lei, sunt în plus 16 lei. **(2p) a)** Este posibil ca prețul obiectului să fie 190 de lei?

(3p) b) Aflați prețul obiectului.

5p **2.** Se consideră expresia :
$E(x) = x^3 + (x+3)^2 + (x-2)^2 + (x+1)(x-1) - 12$, unde $x \in \mathbb{R}$.

(3p) a) Demonstrează că $E(x) = x(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.

(2p) b) Demonstrează că $E(n) \vdots 6$, pentru orice număr natural n .

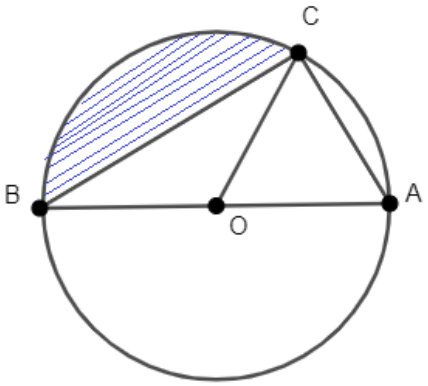
5p **3.** Fie numerele reale $a = 3\sqrt{108} + 2\sqrt{192} - 4\sqrt{12} - 2\sqrt{75}$ și $b = 5\sqrt{48} + 2\sqrt{27} - 2\sqrt{432}$.

(2p) a) Calculați numărul real a;

(3p) b) Verificați dacă media geometrică a numerelor a și b aparține intervalului $(9; 10)$.

5p **4.** Se dă cercul $\mathcal{C}(O, r)$ și punctul $C \in \mathcal{C}(O, r)$, AB diametru cu AC = OA = 6 cm. Aflati:

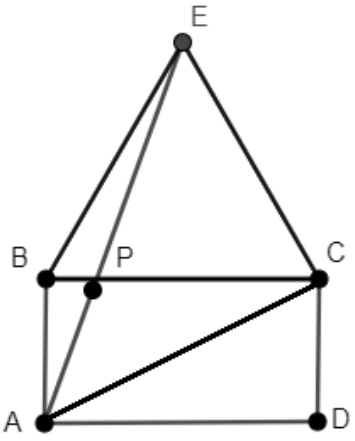
(2p) a) Măsurile unghiurilor ΔABC;



(3p) b) Aflați aria porțiunii hașurate.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentată o gradină ABECD, unde ABCD este dreptunghi, iar BCE este un triunghi echilateral. Segmentele AE, AC și BC reprezintă niște alei, iar {P}=AE ∩ BC. Se știe că AB = 16 m, iar aleile AC și CE sunt perpendiculare.

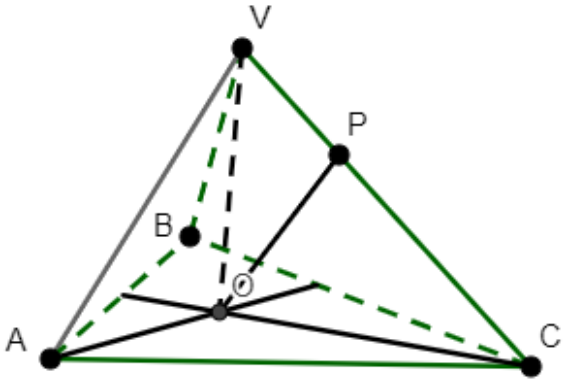
(2p) a) Calculează aria grădinii



(3p) b) Arată că lungimea segmentului BP este mai mică decât 6 m.

5p **6.** Fie VABC o piramidă triunghiulară regulată cu muchia laterală VA=15 cm şi muchia bazei AB = 18 cm. Pe muchia VC se consideră punctul P astfel încât VP = 5 cm.

(2p) a) Arătaţi că PO‖(VAB), unde O este centrul de greutate al triunghiului ABC .



(3p) b) Aflaţi sinusul unghiului format de PO şi VB**.**

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ
PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a
16 februarie 2023
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

• Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.

• Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al III-lea

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Subiectul I (30 puncte)

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

Subiectul II (30 puncte)

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

Subiectul III (30 puncte)

1.	a) $190 - 24 = 166$ lei (s-ar strange dacă fiecare persoană ar da câte 32 de lei. 166 nu se împarte exact la 32, deci prețul obiectului nu poate fi 190 de lei.	**1p** **1p**
	b) Notăm cu x, prețul obiectului și cu y, numărul de persoane. $x = 32y + 24$ $x = 40y - 16$ $32y + 24 = 40y - 16$ $y = 5$ $x = 184$, deci prețul obiectului este 184 de lei	**1p** **1p** **1p**

2.	**a** $E(x)=x^3+x^2+6x+9+x^2-4x+4+x^2-1-12$ $E(x)=x^3+3x^2+2x$ $E(x)=x(x^2+3x+2)$ $E(x)=x(x+1)(x+2)$	**1p** **1p** **1p**
	b) $E(n)=n(n+1)(n+2)$, Produsul a două numere naturale consecutive este divizibil cu 2, Produsul a trei numere natuarle consecutive este divizibil cu 3. Deci $E(n)\vdots 6$	 **1p** **1p**
3.	**a)** $a=3\cdot 6\sqrt{3}+2\cdot 8\sqrt{3}-4\cdot 2\sqrt{3}-2\cdot 5\sqrt{3}$ $a=18\sqrt{3}+16\sqrt{3}-8\sqrt{3}-10\sqrt{3}$ $a=16\sqrt{3}$	**1p** **1p**
	b) $b=5\cdot 4\sqrt{3}+2\cdot 3\sqrt{3}-2\cdot 12\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ $M_g=\sqrt{a\cdot b}=4\sqrt{6}$ $4\sqrt{6}\in(9;10)\Leftrightarrow 81<96<100$, adevărat	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** AO = OC = 6 cm (raze), AC = 6 cm⇒ ΔAOC echilateral ⇒ $\sphericalangle A=60^0$ $\sphericalangle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{180^0}{2}=90^0$ $\sphericalangle ABC=30^0$	**1p** **1p**
	b) $BC=6\sqrt{3}, A_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot AC}{2}\Rightarrow A_{\Delta ABC}=18\sqrt{3}$ cm CO mediană $\Rightarrow A_{\Delta BOC}=\frac{1}{2}\cdot A_{\Delta BAC}=9\sqrt{3}$ cm² $A_{sector}=12\pi$ cm² $A_{haşurată}=A_{sector}-A_{\Delta BOC}=12\pi-9\sqrt{3}=3(4\pi-3\sqrt{3})$ cm²	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** Dacă $AC\perp CE\Rightarrow \sphericalangle ACB=30^0$ $A_{\Delta BEC}=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}=192\sqrt{3}$ m² $A_{ABCD}=L\cdot l$ $A_{grădină}=448\sqrt{3}$ m²	 **1p** **1p**
	b) Construim $EM\perp BC\Rightarrow$ $\Delta ABP\sim\Delta EMP\Rightarrow\frac{AB}{EM}=\frac{BP}{PM}=\frac{AP}{EP}$ $EM=24$ m; $BM=\frac{16\sqrt{3}}{5}$ m $\frac{16\sqrt{3}}{5}<6$	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** Fie M mijlocul lui AB; O centru de greutate ⇒ $\frac{OM}{CM}=\frac{1}{3}; VP=5$ cm, $VC=15$ cm $\Rightarrow\frac{VP}{VC}=\frac{1}{3}$ Obţinem $\frac{OM}{CM}=\frac{VP}{VC}$; unghiul C este unghi comun (LUL) ⇒ △PCO ~ △VCM $\Rightarrow PO\parallel VM$, dar $VM\subset(VAB)\Rightarrow PO\parallel(VAB)$	**1 p** **1 p**
	b) $\sin\sphericalangle(PO,VB)=\sin\sphericalangle(VM,VB)=\sin\sphericalangle$(MVB); △ VAB isoscel ⇒ mediana VM este şi înalţime	**2p**

	$\Rightarrow \triangle VMB$ dreptunghic în $M \Rightarrow \sin \sphericalangle(MVB) = \frac{cateta\ opusă}{ipotenuză} = \frac{MB}{VB} = \frac{\frac{AB}{2}}{VB} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$	**1p**

SIMULARE JUDEȚEANĂ

EVALUAREANA ȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI aVIII-a

Anul școlar 2022-2023

Probă scrisă

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Varianta 1

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTULI **(30depuncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTULal II-lea **(30 depuncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă m și v reprezintă vârsta actuală a lui Matei, respectiv a lui Vlad, atunci avem relațiile m+v = 21 , m= 21 –v, 2(m-3) = v-3 2(21-v-3) = v-3, obținem v = 13, adică Vlad are 13 ani și nu 8 ani.	**1p** **1p**
	b) Matei are 21-13 = 8 ani Peste x ani: $8+x=\frac{2}{3}(13+x)$ x = 2 ani	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $E(x)=4x^2+4x+1-x^2+2x-1+x^2-4-3x^2+14$ $E(x)=x^2+6x+10$	**1p** **1p**

	b) $x^2+6x+9+1=(x+3)^2+1$ $(x+3)^2\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$ $(x+3)^2+1>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $a=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}-(-2)$ $a=1$	**1p** **1p**
	b) $b=\left(\frac{\sqrt{6}}{3}+\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)\cdot\sqrt{6}-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{3}$ $b=3$ $x=2$ și 2 este număr natural	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)**Deoarece ΔAPM este dreptunghic AM=4 cm și $\sphericalangle A=60^o$, rezultă AP=2 cm și CP=6 cm Din $AM\parallel CD$ rezultă $\Delta MPA\sim\Delta DPC$ de unde rezultă CD=12 cm	**1p** **1p**
	b)Deoarece CM înălțime în triunghi echilateral, rezultă CM= $4\sqrt{3}$ cm AMCD trapez dreptunghic și Aria AMCD=$\frac{(CD+AM)\cdot CM}{2}=\frac{(4+12)\cdot 4\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}cm^2$ Aria $\Delta ABC=16\sqrt{3}cm^2$, de unde rezultă Aria AMCD=$2\cdot$ Aria ΔABC	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** $A_{ABCD}=\frac{(AB+CD)\cdot AD}{2}=\frac{(12+6)\cdot 6\sqrt{2}}{2}$ $A_{ABCD}=18\cdot 3\sqrt{2}=54\sqrt{2}$ cm^2	**1p** **1p**
	b) Cum $AB\parallel CD\Rightarrow\frac{DO}{BO}=\frac{CD}{AB}=\frac{1}{2}$, iar $\frac{DF}{AF}=\frac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{DO}{BO}=\frac{DF}{AF}$, așadar $FO\parallel AB\parallel CD$ Cum $FO\parallel AB\Rightarrow FO\perp AD$, așadar $\sphericalangle OFC=90°-\sphericalangle CFD$ și $\sphericalangle OFB=90°-\sphericalangle AFB$ $\frac{DF}{AF}=\frac{DC}{AB}$ și $\sphericalangle FDC=\sphericalangle FAB\Rightarrow\Delta FDC\sim\Delta FAB\Rightarrow\sphericalangle DFC\equiv\sphericalangle AFB\Rightarrow\sphericalangle OFC\equiv\sphericalangle OFB$, => FO este bisectoare a unghiului CFB	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** Deoarece ABCD pătrat obținem $AC=12\sqrt{2}$ cm, iar $AO=6\sqrt{2}$ cm. Aplicăm teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic VOA și obținem $VO=6$ cm.	**1p** **1p**
	b) Deoarece triunghiul VAC isoscel, iar O este mijlocul segmentului AC rezultă $VO\perp AC$. Din $AC\perp BD$, iar $BD,VO\subset(VBD)$, obținem că $AC\perp(VBD)$. Cum $VB\subset(VBD)$, rezultă $AC\perp VB$. Deoarece MN linie mijlocie în ΔBAC, rezultă că $MN\parallel AC$, deci $MN\perp VB$. Notăm cu $\{F\}=MN\cap BD$ și deoarece MN linie mijlocie în ΔBAC rezultă F mijlocul lui OB. Deoarece $\frac{BE}{BO}=\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{BF}{BV}=\frac{\sqrt{6}}{6}$ și $\sphericalangle FBE\equiv\sphericalangle VBO$, rezultă $\Delta FBE\sim\Delta VBO$, deci $\sphericalangle FEB=90^o$. Obținem că $FE\perp VB$; cum $MN\perp VB$, iar $MN,FE\subset(MEN)$, rezultă $VB\perp(MEN)$.	**1p** **1p** **1p**

Evaluarea națională pentru absolvenții clasei a VIII-a
Februarie 2023
Matematică
Barem de evaluare și de notare

Simulare județeană

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:
- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea:
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

1.	b)	5p
2.	c)	5p
3.	c)	5p
4.	a)	5p
5.	d)	5p
6.	a)	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1.	c)	5p
2.	b)	5p
3.	d)	5p
4.	d)	5p
5.	c)	5p
6.	b)	5p

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1.	a) $45 = 11b + 2 \Rightarrow 11b = 43$	1p
	43 nu este divizibil cu 11 $\Rightarrow$ a nu poate fi 45	1p
	b) $\begin{cases} a = 11b + 2 \\ \frac{a+b}{2} = 25 \end{cases}$	1p
	a=46	1p
	b=4	1p
2.	a) $a = \frac{2\sqrt{5}}{15} - \frac{5-\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{5}}{3}$	1p
	$a = -1$	1p

	b) $\left(6a-b+2\sqrt{3}\right)^{2023}=\left(-6-2\sqrt{3}+5+2\sqrt{3}\right)^{2023}$ $=(-1)^{2023}$ $=-1$	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $E(x)=\frac{x^2+4x+4}{x^2-25}\cdot\frac{x^2-25}{2x+4}$ $E(x)=\frac{(x+2)^2}{2(x+2)}=\frac{x+2}{2}$	**1p** **1p**
	c) $\left\|4\cdot\frac{x+2}{2}-5\right\|=5$ $\|2x-1\|=5\Rightarrow x\in\{-2;3\}$ $x\in\mathbb{R}/\{-5;-2;5\}\Rightarrow\ \ \mathcal{S}=\{3\}$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** ΔDAB dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DAB=45^0$, ΔEAC dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle EAC=45^0$ $\sphericalangle DAE=\sphericalangle DAB+\sphericalangle BAC+\sphericalangle EAC=180^0\Rightarrow D, A, E$ coliniare	**1p** **1p**
	b) AM mediană $\Rightarrow AM=BM=MC$ $AM=BM$ și $AD=DB\Rightarrow DM$ mediatoarea segmentului $AB\Rightarrow PA=6\ cm$ și $\sphericalangle APM=90^0$ EM mediatoarea segmentului $AC\Rightarrow AQ=8\ cm$ și $\sphericalangle AQM=90^0$. $APMQ$ dreptunghi $\Rightarrow A_{APMQ}=48\ cm^2$	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** $NC\parallel AB\Rightarrow \Delta NCM\sim\Delta ABM\Rightarrow$ $\Rightarrow\frac{NC}{AB}=\frac{CM}{BM}\Rightarrow NC=6\ cm$	**1p** **1p**
	b) $AC=18\sqrt{2}\ cm, AM=9\sqrt{13}\ cm$ $A_{\Delta ACM}=81\ cm^2$ $A_{\Delta ACM}=\frac{AC\cdot AM\cdot\sin(\sphericalangle CAM)}{2}\Rightarrow\sin(\sphericalangle CAM)=\frac{1}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{26}}{26}.$	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** ΔABC dreptunghic $AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow AC=25\ cm$ $ACGE$ pătrat $\Rightarrow AE=25\ cm$	**1p** **1p**
	b) $NP\parallel EF, P\in FG$ și $EF\perp(BFC)\Rightarrow NP\perp(BFC)$ $pr_{(BFC)}MN=MP\Rightarrow \sphericalangle[MN,(BFC)]=\sphericalangle NMP$ $NP=16\ cm, MP=\sqrt{409}\ cm\Rightarrow tg(\sphericalangle NMP)=\frac{NP}{MP}=\frac{16\sqrt{409}}{409}$	**1p** **1p** **1p**

SIMULARE - EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2023-2024
Probă scrisă - Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I şi SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă ar fi 27 de elevi, atunci $27 : 2 = 13$ rest 1, deci $b - 3 = 13 \Rightarrow b = 16$	**1p**
	$3 \cdot (16 - 6) = 30 \neq 27$, imposibil. În clasă, **nu** pot fi 27 de elevi	**1p**
	b) Notăm e = numărul de elevi și b = numărul de bănci	
	Atunci $2(b-3)+1 = e$ și $3(b-6) = e$, deci	**1p**
	$2(b-3)+1 = 3(b-6) \Rightarrow b = 13.$	**1p**
	Astfel, obținem că $e = 21$	**1p**
2.	**a)** $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$	**1p**
	$\frac{x}{x+3} - \frac{x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{x(x-3)-x^2}{(x-3)(x+3)} = \frac{-3x}{(x-3)(x+3)}$	**1p**
	b) $E(x) = \left(\frac{x^2}{x+3} - \frac{x^3}{(x+3)^2}\right) : \left(\frac{x}{x+3} - \frac{x^2}{(x-3)(x+3)}\right) \cdot \frac{1}{x\cdot(3-x)}$	**1p**
	$E(x) = \frac{x^3+3x^2-x^3}{(x+3)^2} : \frac{x^2-3x-x^2}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{1}{x(3-x)} = \frac{3x^2}{(x+3)^2} \cdot \frac{(x-3)(x+3)}{-3x} \cdot \frac{1}{x(3-x)}$	**1p**

	$E(x)=\frac{1}{x+3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$	**1p**

3.	**a)** $x=\left(\frac{8}{3\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}=\frac{26}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}$	**1p**
	$x=\frac{2}{3}$	**1p**
	b) $y=\left(\frac{5}{7\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right):\frac{\sqrt{3}}{14}=\frac{-2}{7\sqrt{3}}\cdot\frac{14}{\sqrt{3}}=-\frac{4}{3}$	**1p**
	$A=\lvert y-x\rvert=\left\lvert-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right\rvert=\left\lvert-\frac{6}{3}\right\rvert=\lvert-2\rvert$	**1p**
	$A=2\in\mathbb{N}$	**1p**
4.	**a)** Cum AD și BE mediane în ΔABC și $AD\cap BE=\{G\}$, rezultă G centru de greutate în ΔABC și avem $\frac{EG}{BE}=\frac{1}{3}$	**1p**
	$GF\parallel BC\overset{TFA}{\Longrightarrow}\Delta EGF\sim\Delta EBC\Rightarrow\frac{EG}{EB}=\frac{GF}{BC}=\frac{EF}{EC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{GF}{18}=\frac{1}{3}$, deci $GF=6$ cm	**1p**
	b) $\Delta EGF\sim\Delta EBC\Rightarrow\frac{A_{EGF}}{A_{EBC}}=\left(\frac{FG}{BE}\right)^2=\frac{1}{9}$	**1p**
	Cum BE mediană în ΔABC, atunci $A_{EBC}=\frac{A_{ABC}}{2}$, deci	**1p**
	$\frac{A_{EGF}}{A_{ABC}}=\frac{A_{EBC}}{9}\cdot\frac{1}{2A_{EBC}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$	**1p**
5.	**a)** $P_{ABCD}=AB+BC+CD+DA$ Fie $BE\perp DC$, cu $E\in DC$, deci $DEBA$ este dreptunghi $\Rightarrow BE=6$ cm	**1p**
	În ΔBEC dreptunghic în E avem $\sphericalangle C=60^o$, deci $\sin(\sphericalangle ECB)=\frac{BE}{BC}\Rightarrow BC=4\sqrt{3}$ cm. Atunci $DC=6\sqrt{3}$ cm și $P_{ABCD}=14\sqrt{3}+6$ cm	**1p**
	b) $A_{DBC}=\frac{BE\cdot DC}{2}=\frac{6\cdot6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$ cm^2	**1p**
	$A_{DBC}=\frac{DB\cdot BC\cdot\sin(\sphericalangle DBC)}{2}=\frac{2\sqrt{21}\cdot4\sqrt{3}\cdot\sin(\sphericalangle DBC)}{2}=12\sqrt{7}\cdot\sin(\sphericalangle DBC)$ cm^2	**1p**
	Atunci $12\sqrt{7}\cdot\sin(\sphericalangle DBC)=18\sqrt{3}\Rightarrow\sin(\sphericalangle DBC)=\frac{3\sqrt{21}}{14}$	**1p**
6.	**a)** Din N mijlocul lui VA și P mijlocul lui VC, rezultă NP linie mijlocie în ΔVAC	**1p**
	$NP\parallel AC$ și $AC\subset(ACD)\Rightarrow NP\parallel(ACD)$	**1p**
	b) Fie d o dreaptă cu $V\in d$, $d\parallel AB$ și cum $OM\parallel AB\Longrightarrow d\parallel OM$ Atunci $(VOM)\cap(VAB)=d$ și cum $VO\perp OM$, $OM\parallel d\Rightarrow VO\perp d; VO\subset(VOM)$ Fie Q mijlocul lui AB, deci $VQ\perp AB$, $VQ\perp d; VQ\subset(VAB)$	**1p**
	Atunci $\sphericalangle\big((VOM),(VAB)\big)=\sphericalangle(VO,VQ)=\sphericalangle OVQ$ Dar $OQ=\frac{BC}{2}=5$ cm, căci OQ linie mijlocie în ΔABC	**1p**
	Din $\sphericalangle\big(VB,(ABC)\big)=45^o\Rightarrow\sphericalangle VBO=45^o\Rightarrow\Delta OVB$ dreptunghic isoscel și avem $VO=5\sqrt{2}$ cm În ΔVOQ dreptunghic în O avem $\text{tg}(\sphericalangle OVQ)=\frac{OQ}{VO}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**1p**

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ
PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a
17 ianuarie 2023

Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $161:18=8$ rest 17, $17\neq 5$, deci nu este posibil ca numărul de elevi să fie egal cu 161.	**1p** **1p**
	b) $n=12c_1+5, n=18c_2+5, n=24c_3+5$, unde n este numărul de elevi $\Rightarrow$ $n-5$ este multiplu comun al numerelor 12, 18 și 24 n este cuprins între 100 și 200, deci $n-5=144\Rightarrow n=149$	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $E(x)=2x^2-5x+x^2+10x+25-x^2-4x-4-x^2+9-30=$ $=x^2+x$, pentru orice număr real x	**1p** **1p**
	b) $E(n)=n^2+n$, pentru orice număr natural n $E(n)=n(n+1)$, unde n și $n+1$ sunt numere consecutive, deci unul dintre ele este par $\Rightarrow$ $E(n)$ este număr par.	**1p** **1p** **1p**

3.	**a)** $a=\dfrac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}-4\sqrt{2}+12\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}=$	**1p**
	$=\dfrac{2\sqrt{6}}{12\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
	b) $b=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow 2(a+b)=\dfrac{13}{5}$,	**2p**
	$2<\dfrac{13}{5}<\sqrt{7}\Leftrightarrow\sqrt{100}<\sqrt{169}<\sqrt{175}$	**1p**
4.	**a)** Teorema lui Pitagora în ΔABC: $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow BC=20$ cm.	**1p**
	$P_{\Delta ABC}=16+12+20=48$ cm.	**1p**
	b) $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AB}$ și $\sphericalangle BAC=\sphericalangle FAE\Rightarrow\Delta ABC\sim\Delta AFE\Rightarrow\sphericalangle AEF=\sphericalangle ACB$ și	**1p**
	$\Rightarrow\sphericalangle AFE=\sphericalangle ABC$	**1p**
	$\sphericalangle PAF=\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle PAE=\sphericalangle ACB$ (au același complement)$\Rightarrow$ ΔAPF, ΔAPE sunt isoscele, deci $AP=FP=PE\Rightarrow P$ mijlocul segmentului EF.	**1p**
5.	**a)** Teorema lui Pitagora în ΔABD: $AB^2+AD^2=BD^2\Rightarrow BD=4\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$A_{ABCD}=AB\cdot AD=16\sqrt{3}\text{ cm}^2$	**1p**
	b) $\sphericalangle CBE=45^0\Rightarrow\Delta CEB$ este isoscel $\Rightarrow CE=CB$,	**1p**
	$AD=\dfrac{DB}{2}\Rightarrow\sphericalangle ABD=30^0\Rightarrow\Delta CBO$ este echilateral $\Rightarrow CO=CB\Rightarrow CE=CB=CO\Rightarrow$	**1p**
	$\sphericalangle EOC=\dfrac{180^0-30^0}{2}=75^0$, $\sphericalangle OPE=\sphericalangle CPB=180^0-60^0-45^0=75^0$, deci triunghiul POE este isoscel.	**1p**
6.	**a)** $BC=AB=12$ cm, triunghiul BCD este echilateral$\Rightarrow A_{\Delta BCD}=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$	**1p**
	$A_{\Delta BCD}=\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2=36\sqrt{3}\text{ cm}^2$	**1p**
	b) MN este linie mijlocie în triunghiul $ACD\Rightarrow MN\parallel AD, AD\subset(AOD)\Rightarrow MN\parallel(AOD)$	**1p**
	O este centrul cercului circumscris triunghiului BCD, $OD\cap BC=\{R\}$, R mijlocul lui BC $\Rightarrow P$ mijlocul lui $RC\Rightarrow MP$ este linie mijlocie în triunghiul $RCD\Rightarrow$	**1p**
	$\Rightarrow MP\parallel DR$, $DR\subset(AOD)\Rightarrow MP\parallel(AOD)$, deci $(AOD)\parallel(MNP)$.	**1p**

EVALUARE NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2022-2023

MATEMATICĂ
SIMULARE_2023
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ŞI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă 5 puncte sau 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	c	**5p**
2.	b	**5p**
3.	d	**5p**
4.	d	**5p**
5.	c	**5p**
6.	a	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	b	**5p**
2.	b	**5p**
3.	c	**5p**
4.	d	**5p**
5.	d	**5p**
6.	a	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\frac{a}{5}=\frac{b}{8}\Rightarrow b=\frac{8a}{5};\ b\cdot 3=c\cdot 2\Rightarrow b=\frac{2c}{3}$	**1p**
	$\frac{8a}{5}=\frac{2c}{3}\Rightarrow c=\frac{24a}{10}=2{,}4\cdot a$	**1p**
	b) $3\cdot\frac{5b}{8}+2b-\frac{3b}{2}=57$	**1p**
	$38\cdot \mathrm{b}=16\cdot 57\Rightarrow \mathrm{b}=24$	**1p**
	$a=15; c=36$	**1p**
2.	**a)** Aducerea la același numitor	**1p**
	Efectuarea corectă a calculelor și finalizarea : $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$	**1p**
	b) $\left.\begin{matrix}x-1\mid x+1\\ x-1\mid x-1\end{matrix}\right\}\Rightarrow x-1\mid 2\Rightarrow x-1\in D_2$	**1p**
	$x\in\{-1;0;2;3\}$	**1p**
	$x\in\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}\Rightarrow x\in\{0;2;3\}$	**1p**

3.	**a)** $a = 4\sqrt{10} + 15 - 4\sqrt{10} - 6$ $a = 9 \in Z$	**1p** **1p**
	b) $b = 6\sqrt{7} + 2\sqrt{21} - 6 - 2\sqrt{21} - 6\sqrt{7} + 42$ $b = 36$ $M_g = \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{9 \cdot 36} = 18$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** $A_{AEF} = A_{ABCD} - A_{AEB} - A_{ECF} - A_{ADF} =$ $= 36 - 6 - 4 - 12 = 14cm^2$	**1p** **1p**
	b) $AF = 2\sqrt{13}cm$, $\frac{AF \cdot d(E,AF)}{2} = 14 \Rightarrow d(E,AF) = \frac{14\sqrt{13}}{13}cm$ $3 < \frac{14}{\sqrt{13}} < 4 \Leftrightarrow 9 \cdot 13 < 196 < 16 \cdot 13 \Leftrightarrow 117 < 196 < 208$ "$Adev$"	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** M mijl. Lui BC, N mijl. lui AC ⇒ MN linie mijlocie în triunghiul ABC $\Rightarrow MN \parallel AB \overset{T.F.A.}{\Rightarrow} \Delta MNG \sim \Delta ABG$	**1p** **1p**
	b) $A_{ABC} = 120$ cm^2, AM mediană ⇒ $A_{ABM} = \frac{A_{ABC}}{2} = 60\ cm^2$ G centrul de greutate în $\Delta ABC \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$ $\frac{A_{ABG}}{A_{ABM}} = \frac{2}{3} \Rightarrow A_{ABG} = 40\ cm^2$	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** fie $\{O\} = AC \cap BD$, din T $3 \perp$ sau demonstrând că $\Delta D'AC$ este isoscel, $d(D', AC) = D'O$ $d(D', AC) = 3\sqrt{6}\ cm$	**1p** **1p**
	b) fie $\{S\} = A'C' \cap B'D'$, atunci ST este linie mijlocie în $\Delta B'CD'$, $ST \parallel D'C \Rightarrow \sphericalangle(AT; D'C) = \sphericalangle(AT; ST) = \sphericalangle ATS$ ΔATS isoscel, AT=AS= $D'O = 3\sqrt{6}\ cm$ Fie P mijlocul lui TS, În ΔATP avem $cos\sphericalangle(ATP) = \frac{TP}{AT} = \frac{\sqrt{3}}{6}$	**1p** **1p** **1p**

SIMULARE JUDEŢEANĂ

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023

Ianuarie 2023

Matematică **Varianta 2**

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

• Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.

• Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al III-lea

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

. • Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	b)	**5p**
2.	d)	**5p**
3.	a)	**5p**
4.	b)	**5p**
5.	c)	**5p**
6.	d)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	c)	**5p**
2.	d)	**5p**
3.	b)	**5p**
4.	a)	**5p**
5.	a)	**5p**
6.	c)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) x reprezintă lungimea traseului, prima zi $\frac{1}{4}x$,a doua zi $\frac{1}{2}x$, lungimea traseului = 96 km $<$100 km	1 1
	b)a treia zi = $\frac{1}{4}x$, $x=96\ km$ a doua zi $=48\ km$	1 1 1
2.	a) direct proportionalitatea $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ relatia $a+b=c$	1 1

	b) din relatia $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$ =k (raport de proportionalitate), avem *a=2k,b=3k,c=5k* *din relatia a+b+c=200* ⇒ k=20 *a=40 , b=60, c=100*	1 1 1
3.	a)Dezvoltarea expresiei calculul lui E(x)	1 1
	b)Calculul expresiei E($\frac{\sqrt{2}}{2}$) E($\frac{\sqrt{2}}{2}$) = 5- 2$\sqrt{2}$ E($\frac{\sqrt{2}}{2}$) $>$ 2 ⇔ 3>2$\sqrt{2}$, adevarată	1 1 1
4.	a) Aflarea catetei AB=15cm Calculul ariei ΔABC	1 1
	b) ΔDEB ~ ΔABC, $\frac{EB}{AB}=\frac{DE}{AC}=\frac{DB}{BC}$ DE=8 cm , EB=6cm , EC=19 cm Perimetrul patrulaterului ADEC=52 cm	1 1 1
5.	a) ΔBEC isoscel cu ∢BEC = 120° si BE=EC=12cm Calculul lui BC	1 1
	b) ΔABE isoscel,AB=BE=12 si ∢ABE = 120°, ∢ABT=90°,BT=$\frac{1}{2}$AT, AT=6$\sqrt{5}$ cm CT=8$\sqrt{3}$ cm ,DT=4$\sqrt{21}$ cm Aria ΔADT scrisă in două moduri ⇒sin (∢ADT)= $\frac{\sqrt{21}}{7}$	1 1 1
6.	a) ΔABC este isoscel A´M este mediană , in A´BC⇒ A´M înălțime ⇒A'M ⊥ BC ⇒ ∢(A'M, BC) = 90o	1 1
	b) b) Prin desfășurarea în plan a prismei se obţine cea mai scurtă lungime cea a segmentului A'M In triunghiul dreptunghic A´AM, avem A´M²=A´A² +AM², A´M =$\sqrt{12^2+9^2}$, A´M=$\sqrt{225}$ 4$\sqrt{14}$ = $\sqrt{224}$ ⇒ A´M $>$ 4$\sqrt{14}$	1 1 1

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023 Matematică - Simulare județeană
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.
SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea
Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.
Nu se acordă punctaje intermediare.
SUBIECTUL al III-lea
Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I - Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

1.	d	**5p**
2.	c	**5p**
3.	c	**5p**
4.	a	**5p**
5.	b	**5p**
6.	b	**5p**

SUBIECTUL al II- lea - Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

1.	d	**5p**
2.	c	**5p**
3.	c	**5p**
4.	d	**5p**
5.	b	**5p**
6.	c	**5p**

1.	**a)** Dacă se așează câte 3 in bancă rezultă că sunt 11 bănci ocupate + 3 goale , deci 14 bănci Apoi 14x 2 +3 =31 ≠ 33 cât am presupus că ar fi. Deci răspunsul este negativ, nu pot fi 33 de elevi.	**1p** **1p**
	b) Notăm cu y = nr. bănci și x = nr. elevi . Avem $2y+ 3 = x$ și $3(y − 3) = x$ Sau $2y + 3 = 3y– 9 \Rightarrow 3 +9 = 3y – 2y \Rightarrow y = 12$ bănci. $x = 2\cdot12 + 3 = 27$ elevi	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $E(x) = 4x^2 +4x +1 −2x^2 +4x – 2 – x^2 +16 = x^2 + 8x +15$ $E(x) = x^2 +3x +5x +15 = x (x+3) +5 (x +3) = (x +3) (x + 5)$	**2p** **1p**
	b)) $x^2 + 3x + 5x +15 – x^2 – 2x = 3$ $6x = −12 \Rightarrow x = − 2$ $S = \{ −2\}$.	**1p** **1p**
3.	**a)** $a^2 = (\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}})^2 = 3 + 2\sqrt{2} – 2\sqrt{(3 + 2\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})} + 3 - 2\sqrt{2}$ $a^2 = 6 - 2\sqrt{9 - 8} = 6 - 2\cdot1 = 4$	**1p** **1p**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

	b)) $b = \|2-\sqrt{3}\| + \|\sqrt{3}+1\|$ $b = 2-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1 = 3$ Numarul $a^2+20\cdot b = 4+20\cdot 3 = 4+60=64=8^2$ este număr pătrat perfect.	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** $DE \parallel AC \overset{TFA}{\Longrightarrow} \triangle BDE \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BD}{BA}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}$ sau $\frac{6}{18}=\frac{10}{BC}=\frac{8}{AC}$ de unde $BC=\frac{18\cdot 10}{6}=30$ cm și $AC=\frac{18\cdot 8}{6}=24$ cm . $P_{\triangle ABC} = 18+30+24 = 72$ cm.	**1p** **1p** **1p**
	b) Verificăm cu RTP dacă $\triangle ABC$ este dr. $BC^2 = AB^2 + AC^2$. $30^2 = 18^2 + 24^2$ (A) Atunci $\sin(\measuredangle ECA) = \sin(\measuredangle BCA) = \frac{AB}{BC}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}$	**1p** **1p**
5.	**a) ΔADC,** $\measuredangle D = 90^0 \Rightarrow AC^2 = AD^2 + DC^2 \Rightarrow$ AD=40 cm, DP⊥AE $\Rightarrow DP=\frac{AD\cdot DC}{AC}=\frac{30\,40}{50}=24\ cm$ **ΔDCP,** $\measuredangle P = 90^0 \Rightarrow DC^2 = PD^2 + PC^2 \Rightarrow$ PC=18 cm. PC înălțime în DCF (DF=DC=r) ⇒ PD mediana ⇒ FC=2PC=36 cm	**1p** **1p**
	a) $\measuredangle EBC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{EFC}$ si $\measuredangle BEF=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCF} \Rightarrow \measuredangle EBC+\measuredangle BEF=\frac{360}{2}=180^0$, unghiuri interne de același parte a secantei⇒ BC II EF ⇒BCFE trapez (1), $BC\ II$ EF $\Rightarrow \overset{\frown}{BE} \equiv \overset{\frown}{CF} \Rightarrow$ $BE \equiv CF$ (2) Din (1) si (2) ⇒ BCFE trapez isoscel $\triangle AEF \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC} \Rightarrow$ EF= 16,8 cm P_{BCFE} = 148,8 cm	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** Avem VA= VB = VC= AB = BC = CD = 6 cm. În △VDC, MN-linie mijlocie ⇒ $MN=\frac{DC}{2}=3$cm În △VDB, MO – linie mijlocie ⇒ $MO=\frac{VB}{2}=3$cm și în △VCA, NO – linie mijlocie ⇒ $NO=\frac{VA}{2}=3$cm Avem deci MN= MO = NO ⇒$P_{\triangle MON} = 3MN = 3\cdot 3=9$ cm	**1p** **1p** **1p**
	b. Avem MN ‖ DC și DC‖ AB ⇒ MN ‖ AB și AB ⊂ (VAB) ⇒ MN ‖ (VAB) (1). NO ‖ VA , VA⊂(VAB) ⇒ NO ‖ (VAB) (2) . Din (1) și (2) ⇒ (MON) ‖ (VAB).	**1p** **1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022-2023

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă Radu ar avea 600 de lei, o cincime este 120 de lei, deci Tudor ar avea $120+200=320$ lei	**1p**
	$320 \neq 480$ $(600-120=480)$. Deci Radu nu poate avea 600 de lei	**1p**

	b) Notez cu x suma pe care o are Radu , deci Tudor are $800-x$ $x-\frac{x}{5}=800-x+\frac{x}{5}$ $x=500$ deci Tudor are 300 de lei. OBS. (Daca se incearcă rezolvarea cu sistem de ecuații, scrierea corectă a sistemului se punctează cu **2p**)	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $a=\left(\frac{18}{\sqrt{20}}-\frac{6}{\sqrt{45}}+\frac{32}{\sqrt{80}}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-1}=\left(\frac{9}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ $a=\frac{15}{3}=5$	**1p** **1p**
	b) $b=5^3$, $m_g=\sqrt{a\cdot b}$, $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{5^4}=5^2=$ pătrat perfect	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $E(x)=9x^2-12x+4+1-5x^2+4=$ $=4x^2-12x+9$.	**1p** **1p**
	b) $E(n)=(2n-3)^2, n\in\mathbb{N}$ $E(n)<36\Leftrightarrow\lvert 2n-3\rvert<6$ Se obține $n\in\{-1,0,1,2,3,4\}$. **Obs** Dacă se obțin toate valorile lui n prin încercări se acordă 1p.	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** Justifică OM linie mijlocie în triunghiul DNB , $OM=\frac{DN}{2}$, deci $OM=4$ cm	**1p** **1p**
	b) Deoarece $OM^2=AM\cdot MB\Rightarrow MB=2$ cm $\Rightarrow MN=2$ cm $\Rightarrow AN=6$ cm $tg(\sphericalangle APN)=tg(\sphericalangle AOM)\Rightarrow PN=3$ cm Justifică $PNMO$ trapez (dreptunghic) și determină aria sa de 7 cm^2 .	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** $\sphericalangle BAC=15^\circ\Rightarrow\sphericalangle ACB=75^\circ\Rightarrow\sphericalangle CBM=15^\circ$ $\sphericalangle BCD=90^\circ, BC\equiv CD\Rightarrow\Delta BCD$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow\sphericalangle CBD=45^\circ$ Se obține $\sphericalangle MBN=60^\circ\Rightarrow\sphericalangle BMN=30^\circ$.	**1p** **1p**
	b) Fie $MP\perp BC, P\in BC\Rightarrow d(M,BC)=MP$. Cum $\sphericalangle BMN=30^\circ, BN=2cm\Rightarrow MB=4cm$ și $MN=2\sqrt{3}cm$. Notând cu $\{Q\}=MN\cap BC\Rightarrow\Delta BNQ$ dreptunghic isoscel $\Rightarrow BN=NQ=2cm\Rightarrow MQ=(2\sqrt{3}-2)cm$. Cum ΔMQP este dreptunghic isoscel și $MQ=(2\sqrt{3}-2)cm\Rightarrow MP=(\sqrt{6}-\sqrt{2})cm$.	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** $QP\parallel A'B'$ (QP linie mijlocie în triunghiul $C'A'B'$) $A'B'\parallel AB$ ($A'B'BA$ dreptunghi), deci $QP\parallel AB$, $PN\parallel C'B$ (PN linie mijlocie în triunghiul $C'B'B$)	**1p**

	$QP \cap PN = \{P\}, QP \subset (QPN), PN \subset (QPN)$ $QP \parallel (C'AB), PN \parallel (C'AB) \Rightarrow (QPN) \parallel (C'AB)$	**1p**
	b) $QP \parallel AB$, $PN \parallel C'B \Rightarrow \sphericalangle(QP, C'B) = \sphericalangle ABC'$ Conform T. Pitagora în triunghiul $C'BC$ $C'B^2 = C'C^2 + BC^2 \Rightarrow C'B = 10\,\text{m}$ Fie $C'M \perp AB, M \in AB$, $\cos(\sphericalangle \text{C'BM}) = \frac{MB}{C'B} = \frac{2}{5}$	**1p** **1p** **1p**

EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

An școlar 2022-2023

Proba scrisă la matematică

Simulare ianuarie

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I ŞI SUBIECTUL al II-lea:
• Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.
• Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al III-lea
• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	d)	5p
2.	c)	5p
3.	c)	5p
4.	a)	5p
5.	c)	5p
6.	a)	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	a)	5p
2.	d)	5p
3.	d)	5p
4.	d)	5p
5.	b)	5p
6.	c)	5p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	**a)** notăm a= Ana, b= Bogdan, l=Lia a+l+b=1360 lei b=390 lei a=390+170= 560 lei l=560-120=440 lei 390+560+440=1390≠ 1360 ⟹ Bogdan nu poate avea 390 lei	2p

SIMULARE ILFOV

	b) a+l+b=1360 lei a=b+170 l=a-120=b+50 b+170+b+b+50=1360 3b=1140 b=380 lei l=430 lei	1p 1p 1p
2.	**a)** a=$(\frac{7}{3}+\frac{4}{5}\cdot\frac{15}{8})\cdot(\frac{-12}{23})=(\frac{7}{3}+\frac{3}{2})\cdot(\frac{-12}{23})$ a=$\frac{23}{6}\cdot(\frac{-12}{23})$ a=-2	 1p 1p
	b) b=2+$\sqrt{2}$ -3$\sqrt{2}$ +2$\sqrt{2}$ b= 2 (-2+2-1)^{2023}= (-1)^{2023} =-1	1p 1p 1p
3.	**a)** E(-2)=(-5)^2 –(-2$\sqrt{3}$+2)(-2$\sqrt{3}$ -2)-10 E(-2)= 25 –(12-4) -10=25-8-10 E(-2)=7	1p 1p
	b) E(x)=4x^2-4x+1-(3x^2-4)-10 E(x)=x^2-4x-5 E(x)=(x-5)(x+1) a+b=-5+1=-4	 1p 1p 1p
4.	**a)** ∢ BCD= 120^0 ⟹ ∢CBA = 60^0 ⟹ ∢BCF=30^0 BF=6 cm CF^2+FB^2=BC^2⟹ CF=6$\sqrt{3}$ cm	1p 1p
	b) CD=DB⟹ ΔCDB isoscel de bază DB ⟹ ∢CBD=∢CDB=30^0 ⟹ ∢DBA=30^0 ⟹ DB=2DS=12$\sqrt{3}$ cm, unde DS ⊥ AB Fie CP ⊥ DB⟹ d(C, DB)=CP CP=$\frac{BC}{2}$=6 cm	 1p 1p 1p
5.	**a)** A=L·l=AB·BC A=12·6=72 cm^2	1p 1p
	b) Construim ON⊥ AB. O mijlocul AC AB⊥BC ⇒ ON linie mijlocie în ΔABC ⇒ON=3 cm și NB=3$\sqrt{3}$ cm OP mediatoarea laturii DB ⇒ Δ POB dreptunghic în O ON^2=PN·NB⇒PN=$\sqrt{3}$ cm OP^2=PN· PB⇒ OP=2$\sqrt{3}$ cm	 1p 1p 1p
6.	**a)** pr$_{(ABC)}$A'C=AC ⇒ ∢(A'C; AC)= ∢A'CA tg(∢A'CA)=$\frac{AA'}{AC}$=$\frac{12}{12}$ = 1 ⇒ ∢A'CA=45^0	1p 1p
	b) Construim A'S ⊥ D'B' BB'⊥ (A'B'C') A'S ⊂ (A'B'C') ⇒ A'S ⊥ BB'	

SIMULARE ILFOV

	Dar $BB' \cap D'B' = \{B'\} \Rightarrow A'S \perp (CBB')$ $\Rightarrow d(A';(DBB'))=A'S$ $A'S=\frac{A'D' \cdot A'B'}{D'B'} = 3\sqrt{3}$ cm	 2p 1p

SIMULARE ILFOV

SIMULARE - EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2022-2023
Probă scrisă - Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I şi SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $60\%\ din\ \left(\frac{2}{3} din\ T\right) = \frac{60}{100}\cdot\frac{2}{3}\cdot T = \frac{40}{100}\cdot T = 40\%\ din\ T$. (notăm T întregul traseu) **DA.**	**1p** **1p**
	b) $\frac{40}{100}\cdot T = 180 \Rightarrow T = 450$ km. In prima zi : $\frac{1}{3}\ din\ 450 = 150$ km.	**2p** **1p**
2.	**a)** $E(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 3(x^2 - 4x + 4) - 2(x^2 - 1) + 10 =$ $= 4x^2 - 12x + 9 - 3x^2 + 12x - 12 - 2x^2 + 2 + 10 = 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$	**1p** **1p**
	b) $E\left(1+\sqrt{3}\right) = 9 - \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 9 - \left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 5 - 2\sqrt{3}$ $E\left(1-\sqrt{3}\right) = 9 - \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 9 - \left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 5 + 2\sqrt{3}$ $M_g = \sqrt{a\cdot b},\ M_g = \sqrt{(5-2\sqrt{3})\cdot(5+2\sqrt{3})} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}.$	**1p** **1p** **1p**

3.	**a)** $\left(1+5\sqrt{2}\right)^2 = 1+10\sqrt{2}+50 = 51+10\sqrt{2}$ $a^2 = \left(\sqrt{51+10\sqrt{2}}\right)^2 = 51+10\sqrt{2}$	**1p** **1p**
	b) $b = \frac{1}{3}\cdot 12\cdot 2\sqrt{2} - \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{21}{3\sqrt{2}} - \frac{99}{11\sqrt{2}}\right):\frac{1}{2} =$ $8\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1} = 5\sqrt{2}$. Din a) $\Rightarrow a = 1+5\sqrt{2}$; $(b-a)^{2023} = \left(5\sqrt{2}-1-5\sqrt{2}\right)^{2023} = (-1)^{2023} = -1$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** $AT = 24$ cm; $AB = 25$ cm. P = AB + AC + BC = 25 + 25 + 14 = 64 cm.	**1p** **1p**
	b) $A_{\Delta BCG} = \frac{BC\cdot GT}{2} = 56cm^2$. În triunghiul BCS, CG este mediană, deci $A_{\Delta SCG} = 56\ \text{cm}^2 = \frac{GC\cdot d(S;GC)}{2}$ Cum din triunghiul dreptunghic GTC obține $GC = \sqrt{113}$, obținem $d(S,CG) = \frac{112\sqrt{113}}{113}$ cm.	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** $DM = 5\text{cm}; MB = 15\text{cm}$. $AD^2 = DM\cdot BD = 100 \Rightarrow AD = 10\text{cm}$. $AB^2 = BM\cdot BD = 300 \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$ cm. $\Rightarrow A = AB\cdot AD = 100\sqrt{3}\text{cm}^2$.	**1p** **1p**
	b) ΔABD dreptunghic $\Leftrightarrow$ BD = diametrul cercului = ipotenuza. $AD = \frac{BD}{2} \Rightarrow \widehat{DBA} = 30°$, $\widehat{ADB} = 60° \Rightarrow$ arcul $AB = 120° \Rightarrow \widehat{ANB} = 60°$ $AM \perp BD \Rightarrow \Delta ADM -$ dreptunghic $\Rightarrow \widehat{DAM} = 30° \Rightarrow \widehat{NAB} = 60°$. Deci ΔANB- echilateral.	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** $\Delta VAB \equiv \Delta VBC - \Delta$echilaterale. $M -$ mijl VC, $N -$ mijl $VA \Rightarrow MN -$ linie mijl ΔVAC $MN\|\|AC, AC \subset (BDA) \Rightarrow MN\|\|(BDA)$	**1p** **1p**
	b) $MN = \frac{AC}{2} = 8\sqrt{2}$ cm. $BM = BN = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ cm. $\Delta MNB -$ isoscel, $d(B,MN) = h = 4\sqrt{10}$ cm. $A_{\Delta MNB} = \frac{MN\cdot h}{2} = 32\sqrt{5}\ \text{cm}^2$.	**1p** **1p** **1p**

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

- **SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

1.	$a_2 - a_1 = r \Rightarrow r = -1$	**2p**
	$a_3 = 0$	**2p**
	Finalizare: produsul este egal cu 0	**1p**
2.	$\Delta = 4 + 4m < 0$	**3p**
	$m \in (-\infty, -1)$	**2p**
3.	$x(x-1) = 12 \Rightarrow x = -3$ sau $x = 4$	**3p**
	$x = 4$ convine, $x = -3$ nu convine	**2p**
4.	$p = \dfrac{\text{nr.cazuri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}$	**1p**
	Numărul numerelor $\overline{abc}$ pentru care $a \cdot b \cdot c = 3$ este egal cu $3 \Rightarrow 3$ cazuri favorabile	**2p**
	Numărul numerelor naturale de trei cifre este de $900 \Rightarrow 900$ cazuri posibile	**1p**
	$p = \dfrac{1}{300}$	**1p**
5.	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 2 \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2}$	**3p**
	$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$	**2p**
6.	$B(0,1)$ şi $C(3,1) \Rightarrow BC \parallel Ox$, deci $x_H = x_A = 1$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC	**2p**
	$BH \perp AC \Rightarrow m_{BH} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow \dfrac{y_H - 1}{1} \cdot \dfrac{-2}{2} = -1$	**2p**
	$y_H = 2$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Suma elementelor matricei A este egală cu $1 + (2n+1) + n + 1 + (2n^2+1) + n^2 + 1 =$	**3p**
	$= 3n^2 + 3n + 5$	**2p**
b)	$\det A = n^2 - n$	**2p**
	Finalizare: $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$	**3p**
c)	$A = \dfrac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$	**1p**
	$n^2 + n - 6 = 0 \Rightarrow n = 2$ sau $n = -3$	**3p**
	Finalizare: $n = 2$	**1p**
2.a)	$2011 \circ 2012 = 2011 + 2012 + 1 =$	**3p**
	$= 4024$	**2p**
b)	$(x \circ y) \circ z = x + ay + az + 2$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$	**2p**
	$x \circ (y \circ z) = x + ay + a^2 z + a + 1$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$	**2p**
	$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R} \Rightarrow a = 1$	**1p**

c)	$2^x = t \Rightarrow t^2 - t = 0$ Finalizare: $x = 0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$ $f'(x) = (x + \ln x)' = 1 + \dfrac{1}{x}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
b)	$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$ $f(1) = 1,\ f'(1) = 2$ Ecuația tangentei este $y = 2x - 1$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ $f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$ Finalizare	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$\int_0^1 f_1(x)\,dx = (x+1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx =$ $= \left((x+1)e^x - e^x\right)\Big|_0^1 = e$	**2p** **3p**
b)	f_{2011} derivabilă și $f_{2011}'(x) = \left((x+2011)e^x\right)' = e^x + (x+2011)e^x = (x+2012)e^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$ $f_{2011}' = f_{2012}$	**3p** **2p**
c)	$(x+n)e^x \geq (x+n)(x+1)$, pentru orice $x \in [0, 1]$ și $n \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^1 (x+n)e^x\,dx \geq \int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx$ $\int_0^1 (x+n)(x+1)\,dx = \left(\dfrac{x^3}{3} + (n+1)\dfrac{x^2}{2} + nx\right)\Big|_0^1 = \dfrac{9n+5}{6}$ Finalizare	**1p** **1p** **2p** **1p**

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Barem de evaluare și de notare

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$9x^2+12x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=-\frac{4}{3}$	**2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=\frac{3m}{2}$	**2p**
	$\frac{3m}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$m=1$	**1p**
3.	$3^{2x}=3^2$	**2p**
	$2x=2\Rightarrow x=1$	**3p**
4.	$C_4^2=6$	**2p**
	$A_5^2=20$	**2p**
	$5C_4^2-A_5^2=10$	**1p**
5.	C mijlocul lui $(AB)\Rightarrow x_C=\frac{x_A+x_B}{2}$ și $y_C=\frac{y_A+y_B}{2}$	**1p**
	$x_C=-2$	**2p**
	$y_C=4$	**2p**
6.	$m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$	**2p**
	ΔABD este echilateral	**1p**
	$BD=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(1)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$	**2p**
	$\Delta(1)=0$	**3p**
b)	$\Delta(x)=2+2\cdot x^2+2\cdot x^2+x^2+x^2-8$	**3p**
	Finalizare	**2p**
c)	$\Delta(0)=-6$	**2p**
	$\left(A(0)\right)^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-1^2+a\cdot 1+b$	**3p**

	$a+b=0$	**2p**
b)	$f=X^3-X^2-X+1\Rightarrow f=(X-1)^2(X+1)$	**3p**
	Finalizare: $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-1$	**2p**
c)	$f(1)=0\Rightarrow a+b=0$	**1p**
	$f(2)=0\Rightarrow 2a+b=-4$	**2p**
	Finalizare: $a=-4,\ b=4$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	Finalizare	**2p**
b)	$f'(x)=0\ \Rightarrow\ x=\frac{1}{e}$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$	**3p**
c)	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\Rightarrow f$ descrescătoare pe intervalul $\left(0,\frac{1}{e}\right]$	**3p**
	Din tabelul de variație al funcției obținem $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(x-\frac{1}{x}+\ln x\right)'=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$	**3p**
	F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $F'=f$	**2p**
b)	$\int_1^e x\cdot f\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\int_1^e f\left(x^2\right)\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{e^2} f(t)\,dt=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}+\ln t\right)\Big\vert_1^{e^2}=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}+2\right)$	**2p**
c)	$\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^a=a-\frac{1}{a}$	**2p**
	$a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow a=2$ sau $a=-\frac{1}{2}$	**2p**
	Finalizare: $a=2$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2024 – 2025
12 Decembrie 2024
Matematică **Simulare**
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea:

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL II **(30 puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL III **(30 puncte)**

1.	**a)** 40 – 2 = 38 ani, vârsta mamei în urmă cu 2 ani	**1p**
	Vârsta fiicei în urmă cu 2 ani este 38:5 = 7 rest 3. Deoarece 38 nu este divizibil cu 5, vârsta mamei nu poate fi egală cu 40 ani.	**1p**
	b) m - 2 = 5 (f – 2) și m + 6 = 3(f + 6)	**1p**
	5f – 8 = 3f + 12	**1p**
	f = 10 ani	**1p**
2.	**a)** $a=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\left(\frac{21}{9}+\frac{1}{3}\right)$	**1p**
	$a=\frac{25}{4}$	**1p**
	b) $b=2\sqrt{6}(\sqrt{6}-2)+\frac{6\sqrt{6}(\sqrt{6}+2)}{6}-2\left(3-\sqrt{6}\right)=12$	**1p**
	$m_g=\sqrt{\frac{25}{4}\cdot 12}=5\sqrt{3}$	**1p**
	$-\frac{2\sqrt{3}}{5}<\frac{25\sqrt{3}}{5}<\frac{26\sqrt{3}}{5}\Rightarrow m_g\in\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5};\frac{26\sqrt{3}}{5}\right)$	**1p**

3.	**a)** $E(-7)=(-7)(-7-2)^2-(-7)^2(-7-5)-5(-7)+1=57$ $E(-7)+7=57+7=64=4^3$, cub perfect.	**1p** **1p**
	b) $E(x)=x^2-x+1$, $E(-x)=x^2+x+1$ $E(x)\cdot E(-x)=\left(x^2+x+1\right)\cdot\left(x^2-x+1\right)=x^4+x^2+1$ $x^4+x^2+1\geq 0+0+1=1$, oricare ar fi numărul real x.	**1p** **1p** **1p**
4	**a)** $\triangle ABC\left(\sphericalangle A=90^\circ\right): tgACB=\dfrac{AB}{AC}$ $tg30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{AB}{12\sqrt{3}}\Rightarrow AB=12$ cm	**1p** **1p**
	b) $\triangle ABC\left(\sphericalangle A=90^\circ\right), \sphericalangle ACB=30^\circ\Rightarrow\sphericalangle ABC=60^\circ, BD=$ bisectoarea $\sphericalangle ABC$ $\Rightarrow\sphericalangle ABD=\sphericalangle CBD=30^\circ$ $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{144+432}=\sqrt{576}=24$ cm Fie $CE\perp BD, E\in BD\Rightarrow\triangle BEC=dreptunghic$ în $E, \sphericalangle CBE=30^\circ\Rightarrow CE=\dfrac{BC}{2}=12$ cm Distanța de la C la BD este 12 cm.	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** $A_{ABCD}=AB\cdot AD\cdot\sin A, AD=18\ cm$. $A_{ABCD}=9\cdot 18\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=81\sqrt{3}\ cm^2$	**1p** **1p**
	b) Fie M mijlocul AB. $\Rightarrow AM=AD; \sphericalangle A=60^0\Rightarrow\triangle AMD\ echilateral\Rightarrow DM=AD=9\ cm.$ $G\in DM; MG=\dfrac{DM}{3}=3\ cm;\ GE\perp AB$ $d(G,AB)=GE; GE=GM\cdot\sin\sphericalangle GME=3\cdot\sin 60^0=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}cm$ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<\sqrt{7}\Leftrightarrow\dfrac{27}{4}<7\Leftrightarrow 27<28$, adevărat.	**1p** **1p** **1p**
6	a) În $\triangle ABC\Rightarrow AC^2=AB^2+BC^2\Rightarrow AB=\sqrt{192}\Rightarrow AB=8\sqrt{3}\ cm.$ $A_{ABCD}=AB\cdot BC=8\sqrt{3}\cdot 8=64\sqrt{3}\ cm^2$	**1p** **1p**
	b) $BA'\cap AB'=\{S\}$. $ABB'A'$ este dreptunghi $\Rightarrow S$ este mijlocul $A'B$. În $\triangle A'BC$: S mijlocul lui $A'B$ și M mijlocul lui $BC\Rightarrow MS$ linie mijlocie $\Rightarrow MS\parallel A'C$ $\left.\begin{array}{l}MS\parallel A'C\\MS\subset(B'AM)\end{array}\right\}\Rightarrow A'C\parallel(B'AM)$	**1p** **1p** **1p**

Prezenta lucrare conține_____pagini

Numele:.....

.....

Inițiala prenumelui tatălui: .....

Prenumele:.....

.....

Școala de proveniență: .....

.....

Centrul de examen: .....

Localitatea: .....

Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2024 – 2025

Decembrie

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect : **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $10-2\cdot\left(3^0+1\right)$ este: a) 2 b) 6 c) 8 d) 16
5p	**2.** Dacă $\frac{x-3}{8}=\frac{9}{4}$, atunci numărul x este egal cu: a) 12 b) 15 c) 18 d) 21
5p	**3.** Se consideră mulțimile $A=(-5,8]$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\,\vert\,x>2\}$. Mulțimea $A\cap B$ este egală cu: a) $(2,8]$ b) $(-5,2)$ c) $(-5,+\infty)$ d) $[2,8]$
5p	**4.** Inversul numărul real $\sqrt{5}$ este: a) $-\sqrt{5}$ b) 5 c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

5p **5.** Patru elevi, Eva, David, Maria și Valentin, au calculat media aritmetică a numerelor $a=\sqrt{13^2-12^2}$ și $b=\sqrt{15^2+20^2}$.
Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

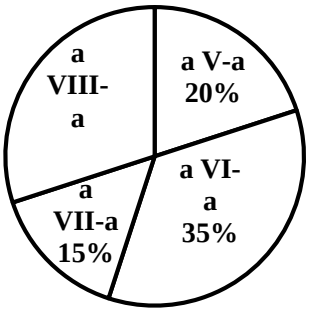
Eva	David	Maria	Valentin
15	18	30	36

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică este:

a) Eva
b) David
c) Maria
d) Valentin

5p **6.** Într-o școală sunt 800 de elevi înscriși la clasele V-VIII.
Repartiția acestora pe clase, este redată în diagrama alăturată.
Teodora afirmă că în clasa a VIII-a sunt înscriși 250 de elevi.
Afirmația Teodorei este:

a) Adevărată
b) Falsă



SUBIECTUL II

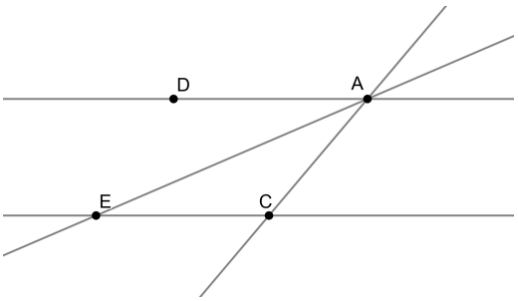
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect: **(30 puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctele *M, N, P* și *Q* sunt coliniare în această ordine, astfel încât $\frac{MN}{PQ}=\frac{2}{3}$, $NP=4\ cm$ iar $NP=PQ-MN$. Lungimea segmentului MQ este egală cu:

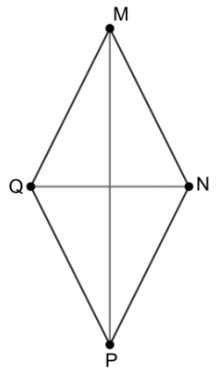
a) 20 cm
b) 21 cm
c) 24 cm
d) 25 cm

5p **2.** În figura alăturată, $DA \| EC$ și măsura unghiului $\sphericalangle ACE=130^0$. Dacă semidreapta AE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle DAC$, atunci măsura unghiului $\sphericalangle AEC$ este egală cu:

a) 75^0
b) 120^0
c) 50^0
d) 25^0

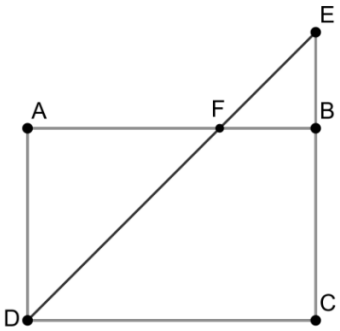


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat rombul *MNPQ*, având $MP = 8\sqrt{3}\ cm$ și măsura unghiului *MNP* egală cu 120^0. Perimetrul triunghiului *MQN* este egal cu:



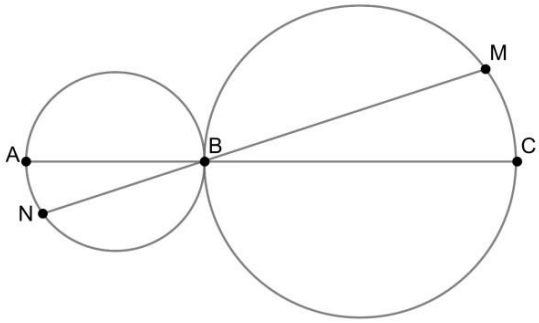
a) 24 cm
b) 16 cm
c) $(16+8\sqrt{3})$ cm
d) $(4\sqrt{3}+8)$ cm.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi *ABCD*. Bisectoarea unghiului *ADC* intersectează dreptele *AB* și *BC* în punctele *F*, respectiv *E*. Dacă *AD = 4 cm* și *EB = 2 cm*, atunci aria dreptunghiului *ABCD* este egală cu:



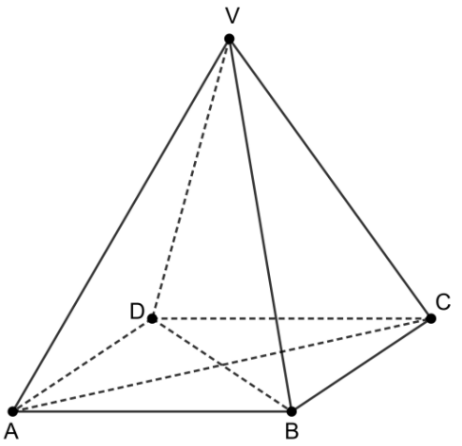
a) $8\ cm^2$
b) $24\ cm^2$
c) $16\ cm^2$
d) $20\ cm^2$

5p **5.** Cercurile din figura alăturată sunt tangente exterior, punctul de tangență fiind B. Segmentele *AB* și *BC* sunt diametre în cele două cercuri, iar *N*, *B* și *M* sunt puncte coliniare. Dacă măsura arcului mic *BN* este 140^0, atunci măsura arcului mic *MC* va fi egală cu:



a) 30^0
b) 170^0
c) 40^0
d) 140^0

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată *VABCD*, având vârful *V*, în care triunghiul *VAC* este dreptunghic cu aria egală cu $72\ cm^2$. Atunci suma tuturor muchiilor piramidei este egală cu:



a) $96\sqrt{2}$ cm
b) 96 cm
c) $98\sqrt{2}$ cm
d) 86 cm

SUBIECTUL III

Scrieți rezolvările complete pe foaia de examen **(30 puncte)**

5p **1.** În urmă cu doi ani, vârsta mamei era de cinci ori mai mare decât vârsta fiicei. Peste șase ani, vârsta fiicei va fi de trei ori mai mică decât vârsta mamei.

(2p) a) În prezent, vârsta mamei poate fi de 40 de ani? Justificați răspunsul.

(3p) b) Determină vârsta actuală a fiicei.

5p **2.** Fie numerele reale: $a=\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}\cdot\left[2,(3)+3^{-1}\right]$ și $b=2\sqrt{6}\cdot\left|2-\sqrt{6}\right|+\frac{6\cdot(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}}-2\cdot\sqrt{(\sqrt{6}-3)^2}$

(2p) a) Arată că $a=\frac{25}{4}$.

(3p) b) Demonstrează că media geometrică a numerelor a și b aparține intervalului $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{5};\frac{26\sqrt{3}}{5}\right)$.

5p

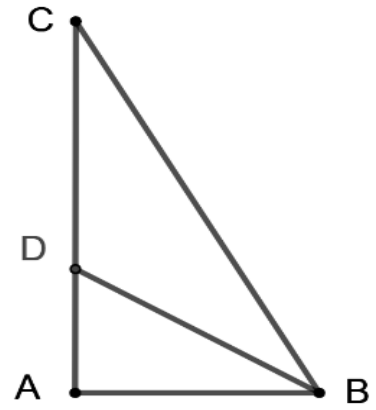
3. Fie expresia $E(x)=x(x-2)^2-x^2(x-5)-5x+1$, unde x este număr real.

(2p) a) Verifică dacă $E(-7)+7$ este cubul unui număr natural.

(3p) b) Arată că $E(x)\cdot E(-x)\geq 1$, pentru orice număr real x.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu măsura $\sphericalangle BAC$ egală cu $90°$, $\sphericalangle ACB = 30°$ iar $AC = 12\sqrt{3}$ cm. Bisectoarea $\sphericalangle ABC$ intersectează dreapta AC în punctul D.

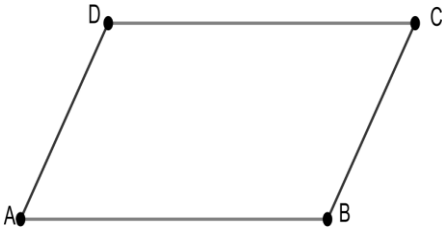
(2p) a) Arată că $AB = 12$ cm.



(3p) b) Determină distanța de la punctul C la dreapta BD.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AD = 9$ cm și $AB = 2AD$. Măsura unghiului A este egal 60^0.

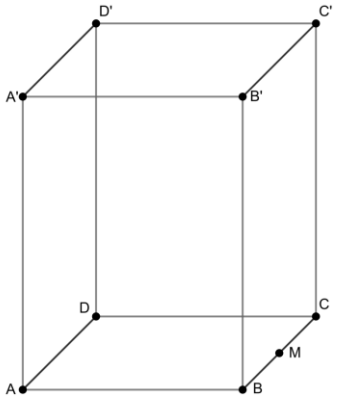
(2p) a) Arătați că aria paralelogramului $ABCD$ este egal cu $81\sqrt{3}\ cm^2$.



(3p) b) Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD. Arătați că distanța de la G la dreapta AB este mai mică decât $\sqrt{7}\ cm$.

5p **6**. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic *ABCDA'B'C'D'* cu *BC = 8 cm*, *AA' = AC* = 16 *cm* și *M* mijlocul segmentului *BC*.

(2p) a) Arată că aria dreptunghiului *ABCD* este egală cu $64\sqrt{3}\ cm^2$.



(3p) b) Demonstrează că dreapta *CA'* este paralelă cu planul $(B'AM)$.

SIMULARE EVALUAREA NAȚIONALĂ CLASA a VIII-a
Anul școlar 2024 - 2025
Matematică
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $25\% \cdot 240 + 6 + \frac{1}{2}(75\% \cdot 240 - 6) + 2 = \frac{1}{3} \cdot 240 \Leftrightarrow 60 + 6 + 90 - 6 + 2 = 80$	**1p**
	$\Leftrightarrow -152 = 80\ (F)$ Nu este posibil.	**1p**
	b) I zi: $\frac{x}{4} + 6$; a IIa zi: $\frac{3x}{8} - 1$; a III a zi: $\frac{x}{3}$	**1p**
	$\frac{x}{4} + 6 + \frac{3x}{8} - 1 + \frac{x}{3} = x$	**1p**
	$x = 120$	**1p**
2.	a) $\lvert 2x - 1 \rvert < 5 \Leftrightarrow -5 \leq 2x - 1 < 5 \Leftrightarrow -4 \leq 2x < 6 \Leftrightarrow -2 \leq x < 3$	**1p**
	$A = (-2; 3)$	**1p**

	b) $-1 \leq \frac{x-1}{5} < 2 \Leftrightarrow -5 \leq x-1 < 10 \Leftrightarrow -4 \leq x < 11$	**1p**
	$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow B = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \ldots, 10\}$	**1p**
	$A \cap B = \{-1, 0, 1, 2\}$	**1p**
3.	**a)** calcul parțial	**1p**
	$a = 4^2$	**1p**
	b) b = −6	**1p**
	a + b = 10	**1p**
	10 : 5	**1p**
4.	**a)** E mijloc BD $\Rightarrow$ BD = 2BE $\Rightarrow$ BD = 6cm F mijloc BC $\Rightarrow$ BC = 2BD $\Rightarrow$ BC = 12cm	**1p**
	$P_{\Delta ABC} = 3BC = 36cm$	**1p**
	b) Fie CF ⊥ AE, F ∈ AE $\Rightarrow$ d(C, AE) = CF D mijloc BC, △ ABC echilateral $\Rightarrow$ AD ⊥ BC $\Rightarrow$ AD = $6\sqrt{3}$	**1p**
	△ AED, ∢ADE = $90^0 \Rightarrow$ AE = $3\sqrt{13}$	**1p**
	△ AEC: AD ⊥ $EC, CF \perp AE \Rightarrow$ AD · EC = CF · AE $\Rightarrow$ CF = $\frac{18\sqrt{39}}{13}$	**1p**
5.	**a)** △ EBC isoscel, BE = EC = 12cm, ∢BEC = $120^0 \Rightarrow$ ∢EBC = ∢ECB = 30^0	**1p**
	Fie EF⊥ BC, △ EBC isoscel $\Rightarrow$ EF mediană $\Rightarrow$ BC = 2BF	
	△ BEF, BFE = $90^0 \Rightarrow \cos EBF = \frac{BF}{BE} \Rightarrow$ BF = $6\sqrt{3} \Rightarrow$ BC = $12\sqrt{3}$	**1p**
	b) △ BAE și △ EBC sunt isocele congruente $\Rightarrow$ ∢AEB = ∢BCE = ∢BAE = ∢EBC = $30^0 \Rightarrow$ △ TBE isoscel	**1p**
	Fie TQ⊥ $BE \Rightarrow$ ∢TQB = $90^0 \Rightarrow$ BT = $4\sqrt{3} \Rightarrow$ TC = $8\sqrt{3}$	**1p**
	△ DTC, ∢TCD = $90^0 \Rightarrow$ DT = $4\sqrt{21}$, $sin\sphericalangle DTC = \frac{\sqrt{21}}{7}$	**1p**
	$\sphericalangle DTC \equiv \sphericalangle ADT (alt.int.) \Rightarrow sin\sphericalangle ADT = \frac{\sqrt{21}}{7}$	
6.	**a)** △ VAC este isoscel, VO este mediană $\Rightarrow$ ∢VOA = $90^0 \Rightarrow$ VA = 20cm	**1p**
	Suma muchiilor laterale= 20cm · 4 = $80cm$	**1p**
	b) BE+EF= minimă $\Rightarrow$ B, E, F sunt coliniare pe desfășurarea piramidei $\Rightarrow$ $\{E\} = BF \cap AD$	**1p**
	△ VAD isoscel, fie VM ⊥ $AD \Rightarrow$ VM = 16cm. Dacă $FN \perp AD \Rightarrow$ FN este linie mijlocie în △ VED isoscel $\Rightarrow$ FN = $\frac{VM}{2} = 8cm$	**1p**
	△FEN ~△ BEA $\Rightarrow \frac{FN}{BA} = \frac{EN}{EA} = \frac{EF}{BC} \Rightarrow \frac{EN}{EA} = \frac{1}{3} \Rightarrow$ EA = 3EN $NA = AD - DN = 24 - 6 = 18\ cm$ $EA + EN = AN \Rightarrow \cdots \Rightarrow$ EA = 13,5 cm	**1p**

Prezenta lucrare conţine_____pagini

Numele:.....
.....
Iniţiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Şcoala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Judeţul: .....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

SIMULARE EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a

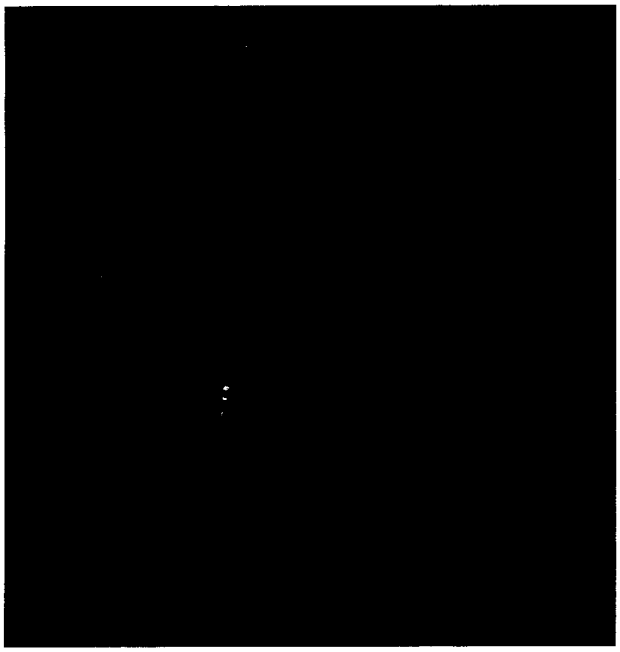
Anul şcolar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $2 + 216 : 2$ este: **a)** 20 **b)** 109 **c)** 19 **d)** 110
5p	**2.** Dacă $\frac{a}{3} = \frac{5}{b}$, atunci rezultatul calculului $30 - 2ab$ este egal cu : **a)** 15 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 60
5p	**3.** Dacă 30% din numărul a este egal cu 15 atunci numărul a este egal cu: **a)** 45 **b)** 50 **c)** 60 **d)** 5
5p	**4.** Cel mai mare număr întreg din intervalul $(-3; 2\sqrt{5})$ este : **a)** -2 **b)** 20 **c)** 4 **d)** 5

5p **5.** Matei, Ana, Luca și Sandra au calculat media geometrică a numerelor $x = 2\sqrt{3} + 3$ și $y = 2\sqrt{3} - 3$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Matei	Ana	Luca	Sandra
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3	6

Dintre cei patru elevi, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Matei
b) Ana
c) Luca
d) Sandra

5p **6.** Diana spune că dacă un număr natural este prim, atunci el are doi divizori naturali. Afirmația Dianei este:

a) Falsă
b) Adevărată.

SUBIECTUL al II-lea

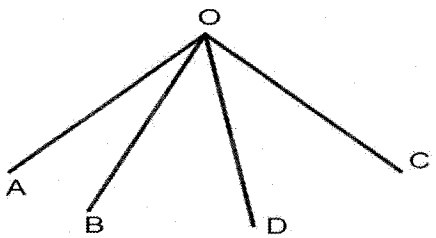
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată este reprezentat segmentul AC, având lungimea de 4 cm. Punctul D este mijlocul segmentului AC, iar punctul B este simetricul lui A față de C. Lungimea segmentului BD este egală cu:

a) 8 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 16 cm

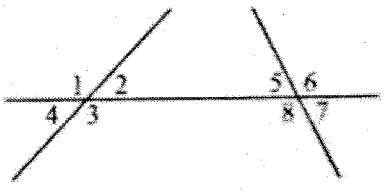
5p **2.** În figura alăturată unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente complementare iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$. Dacă $\sphericalangle DOB$ are măsura 35° atunci $\sphericalangle AOB$ are măsura egală cu:

a) 70°
b) 35°
c) 55°
d) 20°



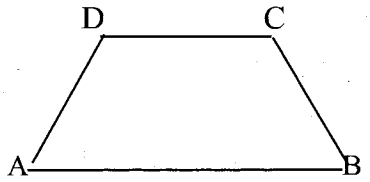
2 **3.** O pereche de unghiuri alterne interne din figura alăturată este:

a) (1;6)
b) (2;8)
c) (4;5)
d) (3;7)



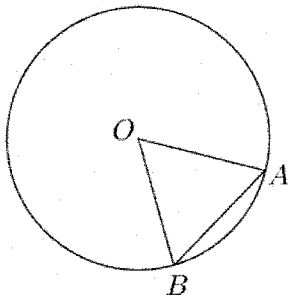
5p **3.** Un trapez isoscel ABCD are bazele de 20 cm și 10 cm. Dacă $AC \perp BC$ și $\sphericalangle CAB = 30^0$, atunci perimetrul trapezului este:

a) 50 cm
b) 40 cm
c) 60 cm
d) 70 cm



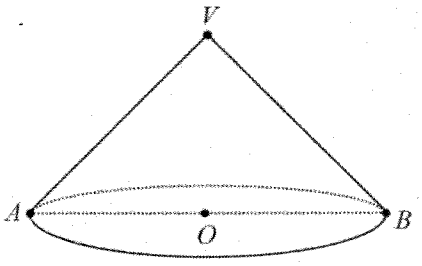
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O. Punctele A și B aparțin cercului, astfel încât $\sphericalangle AOB = 60^0$ și $AB = 4$ cm. Aria discului este egală cu:

a) 8π cm^2
b) 16π cm^2
c) 32π cm^2
d) 16 cm^2



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un con circular drept cu secțiunea axială triunghiul dreptunghic VAB. Raza conului are lungimea egală 4 cm.. Aria secțiunii axiale este egală cu:

a) 8 cm^2
b) 16 cm^2
c) 8π cm^2
d) 4π cm^2



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un turist a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi a parcurs 25% din lungimea traseului și încă 6 km, a doua zi jumătate din distanța rămasă și încă 2 km, iar în a treia zi restul de $\frac{1}{3}$ din lungimea traseului.

(2p) a) Este posibil ca lungimea traseului să fie 240 km? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Aflați lungimea traseului.

5p **2.** Se consideră mulțimile $A = \{ x \in R \mid |2x-1| < 5\}$ și $B = \{x \in Z \mid -1 \leq \frac{x-1}{5} < 2\}$

(2p) a) Determinați mulțimea A.

(3p) b) Calculați $A \cap B$.

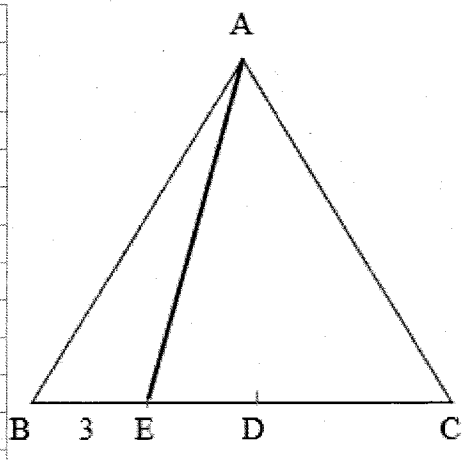
5p **3.** Fie $a=\sqrt{5}\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{5}\right)-3\left(\sqrt{10}+3\right)$ şi $b=\left|11-5\sqrt{5}\right|+2\left(\frac{5}{2}-\sqrt{5}\right)-\frac{15}{\sqrt{5}}$

(2p) a) Arată că a este pătrat perfect.

(3p) b) Demonstrează că $(a+b) \vdots 5$.

5p **4. .** În triunghiul echilateral ABC, se consideră D și E mijloacele segmentelor BC și BD astfel încât BE=3cm.

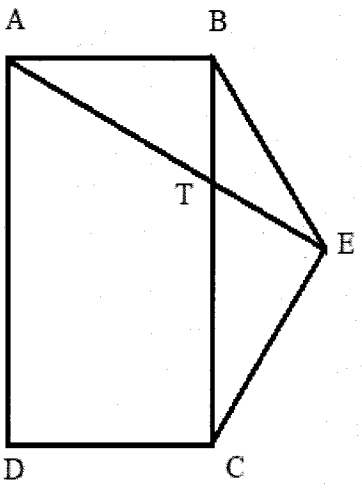
(2p) a) Arătați că perimetrul triunghiului ABC este 36 cm.



(3p) b) Să se arate că distanța de la punctul C la dreapta AE este egală cu $\frac{18\sqrt{39}}{13}$

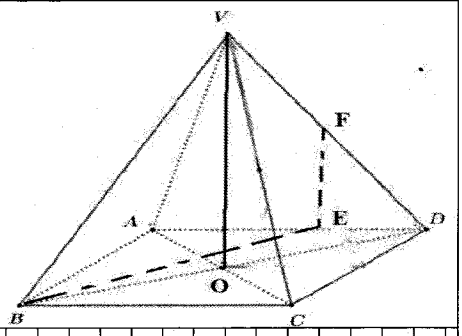
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu AB=12 cm. Triunghiul BCE este isoscel cu BE=EC=12 cm și măsura unghiului BEC=120^0.

(2p) a) Arată că $BC=12\sqrt{3}$ cm.



3p) b) Demonstrează că $\sin(\sphericalangle ADT)=\frac{\sqrt{21}}{7}$, unde $\{T\}=AE \cap BC$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă regulată $VABCD$ cu baza pătratul ABCD, AB=24 cm, $VO = 4\sqrt{7}$ cm, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.



(2p) a) Arată că suma lungimilor muchiilor laterale este egală cu 80 cm.

(3p) b) Dacă F este mijlocul segmentului VD, determină poziția punctului $E \in AD$ astfel încât suma BE+EF să fie minimă.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=16+24i+9i^2+9-24i+16i^2=$	**2p**
	$=16-9+9-16=0$, care este număr natural	**3p**
2.	$\Delta=121-4m$	**2p**
	$\Delta\geq 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{121}{4}\right]$, deci cel mai mare număr întreg m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 30	**3p**
3.	$1+\log_7 x+\frac{1}{\log_7 x}=3\Rightarrow\left(\log_7 x-1\right)^2=0$	**3p**
	$\log_7 x=1$, deci $x=7$, care convine	**2p**
4.	$C_n^2=45$, unde n este numărul de elemente al mulțimii, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$	**3p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=45$ și, cum n este număr natural, obținem $n=10$	**2p**
5.	Distanța de la punctul A la dreapta BC este egală cu 6	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{BC\cdot d(A,BC)}{2}=\frac{4\cdot 6}{2}=12$	**2p**
6.	$\cos x\cos x-\sin x\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&2\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**3p**
b)	$A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1&a&a^2-a\\0&1&2a\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b&b^2-b\\0&1&2b\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&b+a&b^2-b+2ab+a^2-a\\0&1&2b+2a\\0&0&1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&a+b&(a+b)^2-(a+b)\\0&1&2(a+b)\\0&0&1\end{pmatrix}=A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(3)A(-3)=A(0)=I_3$, deci inversa matricei $A(3)$ este matricea $A(-3)$	**2p**
	$X=A(-3)\cdot A(5)\Leftrightarrow X=A(2)$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**

2.a)	$x*y=2xy-3x-3y+\frac{9}{2}+\frac{3}{2}=2\left(xy-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}y+\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}=$	**3p**
	$=2\left(x\left(y-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)\right)+\frac{3}{2}=2\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}=14\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$	**2p**
	$x-\frac{3}{2}=-\frac{5}{2}$ sau $x-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$, deci $x=-1$ sau $x=4$	**3p**
c)	$4\left(2^n+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(2^{n+1}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(2^{n+2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=2^{20}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2^{2+n+n+1+n+2}=2^{20}$	**3p**
	$3n+5=20$, deci $n=5$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{2}{(x-1)^3}+\frac{2}{x^3}=$	**3p**
	$=\frac{-2x^3+2x^3-6x^2+6x-2}{x^3(x-1)^3}=\frac{-2\left(3x^2-3x+1\right)}{x^3(x-1)^3}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	Panta dreptei care este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$ este $f'(2)=-\frac{7}{4}$	**3p**
	Ecuația dreptei este $y-3=f'(2)(x-0)$, deci $y=-\frac{7}{4}x+3$	**2p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(2)+f(3)+\ldots+f(n)\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(1+\frac{-1}{n^2}\right)^{-n^2}\right)^{-1}=e^{-1}$	**2p**
2.a)	$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{f(x)}dx=\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^{\sqrt{3}}=$	**3p**
	$=\sqrt{4}-\sqrt{1}=1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int_0^1\left(x\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=\int_0^1 x\left(\sqrt{x^2+1}\right)'dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx=$	**3p**
	$=x\sqrt{x^2+1}\Big\vert_0^1-\int_0^1\sqrt{x^2+1}dx+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\vert_0^1$, deci $\int_0^1 f(x)dx=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$	**2p**
c)	Funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x e^{f^2(t)}dt-x$ este derivabilă și $g'(x)=e^{x^2+1}-1$	**2p**
	$g'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $g(0)=0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f^2(t)}dt=x$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_2 = b_1 \cdot q = 6$, $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 18$	**3p**
	$b_1 + b_2 + b_3 = 2 + 6 + 18 = 26$	**2p**
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$	**2p**
	Suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții este egală cu 5	**3p**
3.	$4x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$	**3p**
	$x = 1$, care convine, $x = 9$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 50 de elemente, deci sunt 50 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 7 numere naturale, deci sunt $50 - 7 = 43$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{43}{50}$	**2p**
5.	Punctul $M(-2,3)$ este mijlocul laturii BC	**2p**
	Ecuația medianei din A este $y = 3$	**3p**
6.	$4\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x - 4\cos x \sin x + 4\cos^2 x = 4 \Leftrightarrow 4\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos^2 x = 4$	**3p**
	$\cos^2 x = 0$, de unde obținem $x = \dfrac{\pi}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 3 \\ -3 & x \end{vmatrix} = x \cdot x - (-3) \cdot 3 =$	**3p**
	$= x^2 - (-9) = x^2 + 9$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(2020 - x) + A(2020 + x) = \begin{pmatrix} 2020 - x & 3 \\ -3 & 2020 - x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2020 + x & 3 \\ -3 & 2020 + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4040 & 6 \\ -6 & 4040 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 2\begin{pmatrix} 2020 & 3 \\ -3 & 2020 \end{pmatrix} = 2A(2020)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\begin{pmatrix} n & 3 \\ -3 & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-n & 3 \\ -3 & 2-n \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -n^2 + 2n - 9 & 6 \\ -6 & -n^2 + 2n - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$	**3p**
	$n^2 - 2n - 3 = 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n = 3$	**2p**
2.a)	$N = \sqrt{\sqrt{33}^2 + \sqrt{31}^2} = \sqrt{33 + 31} =$	**3p**
	$= \sqrt{64} = 8 \in \mathbb{N}$	**2p**
b)	$x * x = x\sqrt{2}$, $x * x * x = x\sqrt{3}$, unde $x \in M$	**2p**
	$\left(x\sqrt{3}\right)^2 = 300 \Leftrightarrow x^2 = 100$ și, cum $x \in M$, obținem $x = 10$	**3p**

c)	$f(x+y)=\sqrt{-2020(x+y)}=$	**2p**
	$=\sqrt{-2020x+(-2020y)}=\sqrt{(f(x))^2+(f(y))^2}=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x^2+5)-(x-2)\cdot 2x}{(x^2+5)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{5+4x-x^2}{(x^2+5)^2}=\dfrac{(5-x)(x+1)}{(x^2+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x^2+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{2}{x}}{x\left(1+\frac{5}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=5$	**1p**
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f e descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $x\in[-1,5]\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f e crescătoare pe $[-1,5]$ și $x\in[5,+\infty)\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f e descrescătoare pe $[5,+\infty)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(5)=\dfrac{1}{10}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, obținem $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)'=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{x^2(1-3\ln x)}{x^6}=$	**3p**
	$=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=\dfrac{\ln x}{x^3}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln e}{e^3}-\dfrac{\ln 1}{1^3}=\dfrac{1}{e^3}$	**2p**
c)	$\int_e^{e^2}x^2F(x)\,dx=\int_e^{e^2}\dfrac{\ln x}{x}dx=\dfrac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln^2 e^2-\ln^2 e}{2}=\dfrac{2^2-1^2}{2}=\dfrac{3}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_3=2a_2$	**2p**
	$a_1+a_2+a_3=3a_2=3\cdot 2=6$	**3p**
2.	$f(a)=a^2 \Leftrightarrow a^2-4a+4=0$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x^2-5x+7=(x-1)^2$	**2p**
	$3x=6$, deci $x=2$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**1p**
5.	$\dfrac{m}{3}=\dfrac{5}{3}$	**3p**
	$m=5$	**2p**
6.	$(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x=$	**2p**
	$=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}=4\cdot(-3)-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-12+12=0$	**2p**
b)	$M(x)M(y)=(I_2+xA)(I_2+yA)=I_2+xA+yA+xyAA$	**3p**
	Cum $AA=A$, obținem $M(x)M(y)=I_2+(x+y+xy)A=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$M(m+n+mn)=M(6)\Leftrightarrow m+n+mn=6$	**2p**
	$(m+1)(n+1)=7$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(6,0)$ sau $(0,6)$	**3p**
2.a)	$x\circ y=xy-x-y+1+1=$	**2p**
	$=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x\circ x=(x-1)^2+1$, de unde obținem $(x-1)^2\le 4$	**2p**
	$x\in[-1,3]$	**3p**
c)	$1\circ x=1$, unde x este număr real	**2p**
	$1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2020^n=1\circ\left(2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2020^n\right)=1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-e(\ln x)'=$	**3p**
	$=1-e\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=x\Leftrightarrow f'(a)=1$	**3p**
	$\dfrac{a-e}{a}=1\Leftrightarrow a-e=a\Leftrightarrow e=0$, ceea ce este imposibil, deci graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(e,+\infty)$	**2p**
	$e^x-x^e=0\Leftrightarrow f(x)=0$ și, cum $f(e)=0$, ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^3x(x+2)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=9+9-0=18$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+2x\right)e^xdx=\left(x^2+2x\right)e^x\Big\vert_0^1-\int_0^1(2x+2)e^xdx=$	**2p**
	$\displaystyle=3e-(2x+2)e^x\Big\vert_0^1+\int_0^1 2e^xdx=3e-4e+2+2e-2=e$	**3p**
c)	$\displaystyle\int_1^n\frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\int_1^n\frac{x+1}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)\Big\vert_1^n=\frac{1}{2}\ln\frac{n^2+2n}{3}$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{n^2+2n}{3}=\dfrac{3\ln 2}{2}\Rightarrow n^2+2n-24=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=2$	**3p**
	$b_3=1\cdot 2^2=4$	**2p**
2.	$3x+1<7\Leftrightarrow x<2$	**2p**
	Cum x este număr natural, obținem $x=0$ sau $x=1$	**3p**
3.	$x^2+8=(x+2)^2$	**2p**
	$x=1$, care convine	**3p**
4.	$C_4^2=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=$	**3p**
	$=6$	**2p**
5.	$m_{AB}=1$, $m_{CD}=1-a$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{AB}=m_{CD}\Leftrightarrow 1-a=1\Leftrightarrow a=0$	**3p**
6.	$\cos B=\dfrac{AB}{BC}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}=\dfrac{10}{BC}$	**3p**
	$BC=20$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-2\cdot 1=$	**3p**
	$=6-2=4$	**2p**
b)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}1+x+y+xy+2xy & y+xy+x+2xy\\ 2x+2xy+2y+4xy & 2xy+1+2x+2y+4xy\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}1+(x+y+3xy) & x+y+3xy\\ 2(x+y+3xy) & 1+2(x+y+3xy)\end{pmatrix}=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A(a+a+3a\cdot a)=A(5)\Leftrightarrow 3a^2+2a-5=0$	**3p**
	$a=-\dfrac{5}{3}$ sau $a=1$	**2p**
2.a)	$x*y=-xy+5x+5y-25+5=$	**3p**
	$=-x(y-5)+5(y-5)+5=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$-(x-5)^2+5\geq x\Leftrightarrow (x-5)(x-4)\leq 0$	**3p**
	$x\in[4,5]$	**2p**
c)	$x*5=x$ și $5*y=y$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$1*(-2)*3*(-4)*5*\ldots*2019*(-2020)=\big((1*(-2)*3*(-4))*5\big)*(-6)*\ldots*2019*(-2020)=$ $=5*\big((-6)*\ldots*2019*(-2020)\big)=5$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2(x+2)e^{-x}+(x+2)^2e^{-x}\cdot(-1)=$ $=\left(-x^2-2x\right)e^{-x}=-x(x+2)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)^2e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+2)^2}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(x+2)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$ Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[-2,0]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=4$, obținem $f(x)\leq 4$, pentru orice $x\in[-2,+\infty)$ $x,y\in[-2,+\infty)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 4$ și $0\leq f(y)\leq 4\Rightarrow 0\leq f(x)f(y)\leq 16\Rightarrow 0\leq\sqrt{f(x)f(y)}\leq 4$, de unde obținem $0\leq\dfrac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\leq 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1\dfrac{1}{e^x}f(x)\,dx=\int_0^1x^3dx=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_0^1=$ $=\dfrac{1}{4}-0=\dfrac{1}{4}$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2\dfrac{1}{x^2}f(x)\,dx=\int_1^2xe^x\,dx=(x-1)e^x\Big\vert_1^2=$ $=e^2$	**3p** **2p**
c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, deci $F'(x)=f(x)\Rightarrow F''(x)=x^2(x+3)e^x,\ x\in\mathbb{R}$ $F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-\infty,-3)$, $F''(x)>0$, pentru orice $x\in(-3,0)$ și pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F are un singur punct de inflexiune	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_6^2 = b_5 b_7 \Rightarrow 36 = 3b_7$	**3p**
	$b_7 = 12$	**2p**
2.	$a^2 - 20 = a \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0$	**3p**
	$a = -4$ sau $a = 5$	**2p**
3.	$5^x = 5^{-3x} \Leftrightarrow x = -3x \Leftrightarrow 4x = 0$	**3p**
	$x = 0$	**2p**
4.	Cifra unităților se poate alege în 3 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor se poate alege în câte 5 moduri, deci sunt $5 \cdot 3 = 15$ numere impare de două cifre distincte, cu cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$	**3p**
5.	$AO = BO = CO$ și $O \in AC$, deci ΔABC este dreptunghic în B	**2p**
	Coordonatele ortocentrului triunghiului ABC sunt $x = 0$, $y = 1$	**3p**
6.	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ și $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1) = A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 =$	**3p**
	$= 1 - 1 = 0$	**2p**
b)	$M(x)M(y) = AA + yAB + xBA + xyBB$, $M(y)M(x) = AA + xAB + yBA + yxBB$	**2p**
	Cum $AB = A$ și $BA = B$, obținem $yA + xB = xA + yB \Leftrightarrow (x-y)A = (x-y)B \Leftrightarrow x = y$	**3p**
c)	$m^2 + 1 = n^2 \Leftrightarrow (n-m)(n+m) = 1$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem $(m,n) = (0,-1)$ sau $(m,n) = (0,1)$	**3p**
2.a)	$x \circ y = 7xy + x + y + \frac{1}{7} - \frac{1}{7} =$	**3p**
	$= 7x\left(y + \frac{1}{7}\right) + \left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7} = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)\left(y + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$7\left(x + \frac{1}{7}\right)^2 - \frac{1}{7} = 5 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{36}{49} \Leftrightarrow x + \frac{1}{7} = -\frac{6}{7}$ sau $x + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$	**3p**
	$x = -1$ sau $x = \frac{5}{7}$	**2p**

c)	De exemplu, $a=\frac{1}{7}$ și $b=\frac{3}{7}$	**2p**
	$a\circ b=7\left(a+\frac{1}{7}\right)\left(b+\frac{1}{7}\right)-\frac{1}{7}=7\cdot\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{7}-\frac{1}{7}=1\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-2(x-1)}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{x-2x+2x-2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x\Leftrightarrow f'(a)=-1$	**3p**
	$\frac{a-2}{a^2}=-1\Leftrightarrow a^2+a-2=0\Leftrightarrow a=-2$, care nu convine sau $a=1$, care convine	**2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,2)$	**2p**
	$0<1<\frac{\pi}{2}<2\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(1)$ și, cum $f(1)=0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$	**3p**
2.a)	$\int_1^e f'(x)dx=f(x)\Big\|_1^e=\ln x\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f^2(x)}{x}dx=\int_1^e\frac{1}{x}\ln^2 x\,dx=\frac{\ln^3 x}{3}\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}$	**2p**
c)	$\int_1^p x\,f(x)dx=\int_1^p x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_1^p-\int_1^p\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}$	**3p**
	$\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{p^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$ și, cum $p>1$, obținem $p=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,2\cdot 10-1)(0,2\cdot 10+1)=(2-1)(2+1)=$	**3p**
	$=1\cdot 3=3$	**2p**
2.	$x^2-2=x\Leftrightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=2$	**2p**
3.	$4(6-x)=x+14\Rightarrow 24-4x=x+14\Leftrightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**2p**
5.	$\vec{u}+\vec{v}=(a+2)\vec{i}+(a+2)\vec{j}$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
6.	Cum $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\cos x=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$	**3p**
	$\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{4}=\dfrac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&1&0\\-3&-1&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1+0+0-0-0-0=1$	**2p**
b)	$\begin{cases}x-y=1\\2x+y-z=4\\-3x-y+z=1\end{cases}$ și $\det(A(-1))=-1\neq 0$, deci sistemul de ecuații admite soluție unică	**2p**
	$x=-5$, $y=-6$, $z=-20$	**3p**
c)	$A(p)=\begin{pmatrix}1&p&0\\2&1&p\\-3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(p))=-3p^2-p+1$, unde p este număr rațional	**2p**
	$-3p^2-p+1=0\Leftrightarrow p=-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}\notin\mathbb{Q}$ sau $p=-\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}\notin\mathbb{Q}$, deci, pentru orice număr rațional p, $\det(A(p))\neq 0$, adică matricea $A(p)$ este inversabilă	**3p**
2.a)	$x*y=xy-101x-101y+10201+101=x(y-101)-101(y-101)+101=$	**3p**
	$=(x-101)(y-101)+101$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**

b)	Elementul neutru al legii „$*$” este $e=102$	**2p**
	$x=x' \Leftrightarrow x*x=102 \Leftrightarrow (x-101)^2=1$, de unde obținem $x=100$ sau $x=102$	**3p**
c)	$x*y=202 \Leftrightarrow (x-101)(y-101)+101=202 \Leftrightarrow (x-101)(y-101)=101$	**2p**
	Cum x și y sunt numere întregi cu $x<y$ și 101 este număr prim, obținem $x=0$ și $y=100$ sau $x=102$ și $y=202$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x-1,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f este egală cu $f'(0)=e^0-1=0$	**2p**
b)	$f''(x)=e^x,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$ și, cum $f(0)=-4$, obținem $f(x)\ge -4$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f(-x)\ge -4$, deci $e^{-x}\ge -x+1$, de unde $e^x(1-x)\le 1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{x^2+4}{x}-\frac{4}{x}\right)dx=\int_1^3 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$	**2p**
b)	$\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx=\int_2^6\frac{2x}{x^2+4}dx=\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_2^6=$	**3p**
	$=\ln 40-\ln 8=\ln 5$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x}{2}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\frac{e^2+1}{4}$	**3p**
	$\frac{e^2+1}{4}=\frac{e^2+1}{a}$, deci $a=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=\frac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}=\frac{(2\cdot 5+4\cdot 2)\cdot 5}{2}=$	**3p**
	$=45$	**2p**
2.	$\Delta=a^2-4(a-1)=(a-2)^2$	**2p**
	$\Delta>0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{x^2+x+2}=2\Leftrightarrow x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**
4.	$2C_4^3-3A_4^2=2\cdot\frac{4!}{3!(4-3)!}-3\cdot\frac{4!}{(4-2)!}=$	**2p**
	$=2\cdot 4-3\cdot 4\cdot 3=8-36=-28$	**3p**
5.	$\frac{1}{2}=\frac{a}{a^2+1}\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot BC\cdot\sin B}{2}\Leftrightarrow 16=\frac{8\cdot 8\cdot\sin B}{2}$	**3p**
	$\sin B=\frac{1}{2}$ și, cum triunghiul ABC este ascuțitunghic, obținem că unghiul B are măsura de $30°$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0\cdot 0-1\cdot 1=$	**3p**
	$=0-1=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
	$M(x,y)\cdot M(a,b)=(xI_2+yA)(aI_2+bA)=xaI_2+xbA+yaA+ybA\cdot A=(xa+yb)I_2+(xb+ya)A=$ $=M(xa+yb,xb+ya)$ pentru orice numere reale a, b, x și y	**3p**
c)	$\det(M(x,y))=\begin{vmatrix}x & y\\ y & x\end{vmatrix}=x^2-y^2$, pentru orice numere reale x și y, deci $(x-y)(x+y)=4$	**1p**
	$M(x,y)\cdot M(x,y)=M(x^2+y^2,2xy)\Rightarrow 2(x^2+y^2+2xy)=8$, deci $(x+y)^2=4$	**2p**
	$x+y=x-y=-2$ sau $x+y=x-y=2$, deci perechile sunt $(-2,0)$ sau $(2,0)$	**2p**
2.a)	$2\circ(1*3)=2\circ(1+3-1)=2\circ 3=2\cdot 3-2-3+2=3$	**2p**
	$(2\circ 1)*(2\circ 3)=(2\cdot 1-2-1+2)*(2\cdot 3-2-3+2)=1*3=1+3-1=3=2\circ(1*3)$	**3p**
b)	$x\circ x=x^2-2x+2$ și $x*x=2x-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3^{x\circ x}=\left(3^{-2}\right)^{x*x}\Leftrightarrow x\circ x=-2\cdot(x*x)\Leftrightarrow x^2+2x=0$, deci $x=-2$ sau $x=0$	**3p**

c)	$(x-1)*(2y+1)=2 \Leftrightarrow x+2y=3$ și $(x+y)\circ 4=10 \Leftrightarrow x+y=4$	**3p**
	Obținem $x=5$, $y=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(5x-3)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(x^2-x+\sqrt{x^2+3}\right)=2$ și $f(1)=2$, deci $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=2x-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ are panta egală cu $f'(a)$ și, cum $f'(a)>0$, pentru orice $a\in(1,+\infty)$, obținem că $f'(a)\neq 0$, deci tangenta la graficul funcției f în punctul A **nu** este paralelă cu axa Ox, pentru orice $a\in(1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=2+\dfrac{3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{x}+2x}{2x}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcţiei g	**2p**
b)	$\int_1^4 g(x)dx=f(x)\Big\vert_1^4=f(4)-f(1)=$	**3p**
	$=7-3=4$	**2p**
c)	$\int_1^m f(x)\cdot g(x)dx=\int_1^m f(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{1}{2}f^2(x)\Big\vert_1^m=\dfrac{1}{2}\left(f^2(m)-f^2(1)\right)$	**3p**
	$f^2(m)-9=40 \Leftrightarrow f(m)=-7$, care nu convine sau $f(m)=7$, de unde obținem $m=4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=2$	**2p**
	$S_5=\dfrac{b_1\left(q^5-1\right)}{q-1}=\dfrac{1\cdot\left(2^5-1\right)}{2-1}=31$	**3p**
2.	$f(x)<0\Leftrightarrow 3x^2-11x+6<0$	**2p**
	$\Delta=49$, deci $x\in\left(\dfrac{2}{3},3\right)$	**3p**
3.	$\lg\dfrac{1-x}{7-x}=-1\Rightarrow\dfrac{1-x}{7-x}=\dfrac{1}{10}$	**3p**
	$x=\dfrac{1}{3}$, care convine	**2p**
4.	$n+\dfrac{n(n-1)}{2}=6\Leftrightarrow n^2+n-12=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=3$	**2p**
5.	$A\left(2a-1,a^2\right)\in d\Leftrightarrow a^2=2a-1+4$	**2p**
	$a^2-2a-3=0$, deci $a=-1$ sau $a=3$	**3p**
6.	$\cos 2x=1-2\sin^2 x=1-2\cdot\left(\dfrac{12}{13}\right)^2=$	**2p**
	$=1-2\cdot\dfrac{144}{169}=-\dfrac{119}{169}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+(-2)+1-4-1-1=-9$	**3p**
b)	$B(a)=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}2-2a&-3&-3\\a-1&6&-3\\2a+1&a-1&-2a+2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	Suma elementelor matricei $B(a)$ este egală cu 0, deci nu depinde de numărul real a	**2p**
c)	Pentru $a=-2$, sistemul devine $\begin{cases}x+y-2z=1\\x-2y+z=2\\-2x+y+z=3\end{cases}$	**2p**
	Adunând cele trei ecuații ale sistemului $(x+y-2z)+(x-2y+z)+(-2x+y+z)=1+2+3$, obținem $0=6$, fals, deci sistemul de ecuații este incompatibil	**3p**

2.a)	$(-1)*1=(-1)\cdot 1+m\big((-1)+1\big)=$	**3p**
	$=-1+m\cdot 0=-1$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$x*y=xy+mx+my+m^2-m^2=$	**2p**
	$=x\big(y+m\big)+m\big(y+m\big)-m^2=\big(x+m\big)\big(y+m\big)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m	**3p**
c)	$\big(5^x-1\big)\big(5^{x+1}-1\big)-1=-1\Leftrightarrow 5^x-1=0$ sau $5^{x+1}-1=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)'+\frac{1}{x^2}=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{x^2}=$	**3p**
	$=-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{x^2\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{-1}{x^2\left(\sqrt{x}+1\right)}=-\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\frac{1}{x}+e^x+4$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	F este primitivă a funcției $f\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci $m=4$	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=F(e)-F(1)=$	**3p**
	$=e^e+3e-3$	**2p**
c)	$\int_1^2 x\,f(x)\,dx=\int_1^2 x\left(\frac{1}{x}+e^x\right)dx=\int_1^2\left(1+xe^x\right)dx=\left(x+(x-1)e^x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=2+e^2-1=e^2+1$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=\log_2\dfrac{63}{7}\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=$	**2p**
	$=\log_2 3^2\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=2\log_2 3\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=2$	**3p**
2.	$\Delta=m^2+4m$, deci ecuația nu are soluții reale $\Leftrightarrow m^2+4m<0$	**3p**
	$m\in(-4,0)$	**2p**
3.	$3^{x^2-20}=3^{-4}\Leftrightarrow x^2=16$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=4$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	$n!\le n(n-1)\Rightarrow n=2$ sau $n=3$, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+4\vec{j}$ și $\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+b\vec{j}$, unde $C(a,b)$, deci $a\vec{i}+b\vec{j}=4\vec{i}+4\vec{j}$	**3p**
	$a=4$, $b=4$	**2p**
6.	Cum triunghiul este dreptunghic, $2a+1>a-1$ și $2a+1>2a\Rightarrow(2a+1)^2=(2a)^2+(a-1)^2$, deci $a^2-6a=0$	**2p**
	Cum a este număr real, $a>1$, obținem $a=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(e)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&e&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(e))=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&e&0\\0&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=e+0+0-0-0-0=e$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1&0&2\ln a\\0&a^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(a)\cdot A(a))=a^2$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&\ln a^2\\0&a^2&0\\0&0&1\end{vmatrix}=a^2=\det(A(a)\cdot A(a))$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$A(a)+A(b)=\begin{pmatrix}2 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & ab & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 0 & \ln(ab)\\ 0 & a+b & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\ln(ab)\\ 0 & 2ab & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow ab=1$ și $a+b=2$, de unde obținem $a=1$ și $b=1$	**2p**
2.a)	$\sqrt{2}\circ 1=3\cdot\sqrt{2}\cdot 1-3\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+6+\sqrt{2}=$	**2p**
	$=3\sqrt{2}-6-3\sqrt{2}+6+\sqrt{2}=\sqrt{2}$	**3p**
b)	$x\circ y=3xy-3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y+6+\sqrt{2}=$	**2p**
	$=3x\left(y-\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{2}\circ y=\sqrt{2}$, unde x și y sunt numere reale	**2p**
	$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\left(\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)\circ\sqrt{2}\right)\circ\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}=\sqrt{2}\circ\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{4}}\circ\ldots\circ\frac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}\right)=\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(2^x+3^x-4\right)=1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$ și $f(1)=1$, deci	**3p**
	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, de unde obținem că f este continuă în $x=1$	
	Cum f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$x\in(-\infty,1)\Rightarrow f(x)=2^x+3^x-4$, deci $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3$	**3p**
	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-\infty,1)$, deci funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$	**2p**
c)	f este crescătoare pe $(-\infty,1)$ și continuă în $x=1$, deci $f(x)\le f(1)$ și, cum $f(1)=1$, obținem $f(x)\le 1$, pentru orice $x\in(-\infty,1)$	**2p**
	$x\in(1,+\infty)\Rightarrow f'(x)=\frac{x-2}{x^3}$, deci $f'(x)<0$, pentru orice $x\in(1,2)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$ și, cum f este continuă, $f(1)=1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, obținem $f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)(x+3)f(x)\,dx=\int_0^1(2x+4)\,dx=\left(x^2+4x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+4-0=5$	**2p**
b)	$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2\frac{2x+4}{x^2+4x+3}\,dx=\ln\left(x^2+4x+3\right)\Big\vert_0^2=$	**2p**
	$=\ln 15-\ln 3=\ln 5$	**3p**
c)	$F'(x)=f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$, deci $F''(x)=\frac{-2\left(x^2+4x+5\right)}{\left(x^2+4x+3\right)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci orice primitivă F a funcției f este concavă	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$	**2p**
	Cum $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$, obținem că $\log_2 16 < \sqrt[3]{125}$	**3p**
2.	$\Delta = (a+2)^2 - 4(2a+1) = a^2 - 4a$, unde a este număr real	**2p**
	Graficul funcției f este tangent axei $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$, deci $a = 0$ sau $a = 4$	**3p**
3.	$x^2 - x - 2 = 3x - 5 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$	**3p**
	$x = 1$ sau $x = 3$	**2p**
4.	$C_4^1 = 4$, $A_4^2 = 12$ și $A_5^2 = 20$	**3p**
	$12 = \frac{4+20}{2}$, deci C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**
5.	$m_{AB} = \frac{a-1}{2}$, $m_{BC} = \frac{a+1}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	A, B și C sunt coliniare $\Rightarrow m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow 3a - 3 = 2a + 2$, deci $a = 5$	**3p**
6.	$\sin P = \frac{1}{2}$	**2p**
	$2R = \frac{MN}{\sin P} \Rightarrow R = 16$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -1 + 1 + (-1) - 1 - 1 - 1 = -4$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = -a(a^2 + 3)$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0$, deci $a \in \mathbb{R}^*$	**3p**
c)	Dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție și $x_0 = y_0 = z_0$, atunci $\begin{cases} x_0 + ax_0 - x_0 = a \\ x_0 - x_0 - ax_0 = -1 \\ ax_0 - x_0 + x_0 = -1 \end{cases}$, unde a este număr real	**2p**
	Obținem $ax_0 = 1$ și $ax_0 = -1$, ceea ce este imposibil	**3p**
2.a)	$2020 * (-2020) = \sqrt[3]{2020^3 + (-2020)^3 + 8} = \sqrt[3]{2020^3 - 2020^3 + 8} =$	**3p**
	$= \sqrt[3]{8} = 2$	**2p**
b)	$x * e = x$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt[3]{x^3 + e^3 + 8} = x \Leftrightarrow x^3 + e^3 + 8 = x^3 \Leftrightarrow e = -2$	**3p**
	Cum $(-2) * x = \sqrt[3]{(-2)^3 + x^3 + 8} = \sqrt[3]{x^3} = x$, pentru orice număr real x, obținem că $e = -2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**

c)	$f(x*y)=(x*y)^3+8=\left(\sqrt[3]{x^3+y^3+8}\right)^3+8=x^3+y^3+8+8=$	**2p**
	$=x^3+8+y^3+8=f(x)+f(y)$, pentru orice numere reale x și y, deci f este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{x}{x+4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{1+\frac{2}{x}}+\dfrac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+2)^2}-\dfrac{1}{(x+4)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p**
	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, deci f este descrescătoare pe $(-2,+\infty)$	**2p**
c)	f este continuă, f este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$, $f(-1)=\dfrac{4}{3}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $f(x)\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right]$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\in\mathbb{Z}$, deci $f(x)=1\Leftrightarrow x^2+4x+2=0$ și, cum $x\in[-1,+\infty)$, obținem $x=-2+\sqrt{2}$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2\frac{x+1}{f(x)}\,dx=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big|_0^2=$	**3p**
	$=e^2-e^0=e^2-1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx=\int_0^1(x+1)^2e^x\,dx=\left(x^2+1\right)e^x\Big|_0^1=$	**3p**
	$=2e-e^0=2e-1$	**2p**
c)	$\dfrac{f(x)}{x+1}=e^{-x}$, $x\in(0,+\infty)\Rightarrow 1-\displaystyle\int_0^a\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-a}$, $1-\displaystyle\int_0^b\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-b}$, $1-\displaystyle\int_0^c\frac{f(x)}{x+1}dx=e^{-c}$	**3p**
	e^{-a}, e^{-b} și e^{-c} sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice $\Leftrightarrow\left(e^{-b}\right)^2=e^{-a}\cdot e^{-c}$, deci $e^{-2b}=e^{-a-c}$, de unde obținem $2b=a+c$, adică a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3^2=(a-1)(a+7)\Leftrightarrow a^2+6a-16=0$	**3p**
	Cum a este număr real, $a>1$, obținem $a=2$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-6=-x-3\Leftrightarrow x^2+x-3=0$	**3p**
	Cum $\Delta>0$, suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g este -1	**2p**
3.	$3^x\left(3^2-1\right)=8\Leftrightarrow 3^x=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile	**2p**
	$\frac{n(n-1)}{2}\le 3n\Leftrightarrow n(n-7)\le 0$ și, cum $n\in A$, obținem $n\in\{2,3,4,5,6,7\}$, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$	**1p**
5.	$\frac{4}{m-2}=\frac{m}{2}\Rightarrow m^2-2m-8=0$	**2p**
	$m=-2$ sau $m=4$, care convin	**3p**
6.	$\cos A=\frac{1}{2}$ și $BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A$, deci $BC=\sqrt{21}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=9+\sqrt{21}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\begin{cases}-\left(m^2-1\right)+4=1\\ -1+1=0\\ -m+1=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2=4\\ m=2\end{cases}$	**3p**
	$m=2$	**2p**
b)	Matricea sistemului de ecuații este $A=\begin{pmatrix}m^2-1 & m & 4\\ 1 & 1 & 1\\ m & 3 & 1\end{pmatrix}$ și $\det A=-(m+7)(m-2)$, pentru orice număr real m	**3p**
	Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det A\neq 0$, deci $m\in\mathbb{R}\setminus\{-7,2\}$	**2p**
c)	$m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}\Rightarrow\det A\neq 0$ și sistemul de ecuații are soluția unică $\left(\frac{1}{m+7},-\frac{m+3}{m+7},\frac{m+2}{m+7}\right)$	**3p**
	Cum $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, numerele $\frac{1}{m+7}$, $-\frac{m+3}{m+7}$ și $\frac{m+2}{m+7}$ sunt întregi $\Leftrightarrow m=-8$ sau $m=-6$	**2p**

2.a)	$x\circ y=11xy+x+y+\frac{1}{11}-\frac{1}{11}=11x\left(y+\frac{1}{11}\right)+\left(y+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}=$	**3p**
	$=\left(y+\frac{1}{11}\right)(11x+1)-\frac{1}{11}=11\left(x+\frac{1}{11}\right)\left(y+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$11\left(x+\frac{1}{11}\right)^2-\frac{1}{11}=\frac{8}{11}\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{11}\right)^2=\frac{9}{121}$	**3p**
	$x=-\frac{4}{11}$ sau $x=\frac{2}{11}$	**2p**
c)	$a=11^3\cdot\left(1-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{11}+\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1-\frac{4}{11}+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}=11^3\cdot1\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{8}{11}-\frac{1}{11}=720-\frac{1}{11}$	**3p**
	$719<720-\frac{1}{11}<720$, deci partea întreagă a numărului a este egală cu 719	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right)'=$	**3p**
	$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{x}-1,\ x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(1)=0,\ f(1)=-\frac{1}{3}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-\frac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(1)=0,\ f'(x)\le0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$ și $f'(x)\ge0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f(1)\Rightarrow\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x\ge-\frac{1}{3}$, de unde obținem $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\ge-1$	**3p**
2.a)	$g(x)=x^3,\ x\in(-1,+\infty)$, deci $G(x)=\frac{x^4}{4}+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $G(0)=2020$, obținem $c=2020$, deci $G(x)=\frac{x^4}{4}+2020$	**2p**
b)	$\int_0^1 f_1(x)dx=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-\ln2$	**2p**
c)	$f_n(x)=\frac{x^n}{x^n+1}\le x^n$, pentru orice număr natural nenul n și orice $x\in[0,1]$	**3p**
	$\int_0^1 f_n(x)dx\le\int_0^1 x^n\,dx$ și, cum $\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$, obținem $\int_0^1 f_n(x)dx\le\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)+\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=0\Leftrightarrow\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**3p**
	Cum $\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)=\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1=1$, obţinem că $\log_2\left(\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)\right)=0$	**2p**
2.	$f(x)+f(-x)=2020\Leftrightarrow 2x+a+2\cdot(-x)+a=2020$	**3p**
	$2a=2020$, deci $a=1010$	**2p**
3.	$3^x+\dfrac{3}{3^x}=4\Leftrightarrow 3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0\Leftrightarrow\left(3^x-1\right)\left(3^x-3\right)=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale cuprinse între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$ sunt 12 și 13, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{90}=\dfrac{1}{45}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)+\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{DA}=\vec{0}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=$	**3p**
	$=-\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CA}$	**2p**
6.	Considerăm ΔABC cu $AB=2$, $AC=3$ și $BC=4\Rightarrow\cos A=\dfrac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\dfrac{1}{4}$	**3p**
	$\cos A<0$, deci unghiul A este obtuz	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-13\cdot(-1)=1$	**2p**
	$\det\left(A+I_2\right)=\begin{vmatrix}4 & 13\\ -1 & -3\end{vmatrix}=4\cdot(-3)-13\cdot(-1)=1$, deci $\det\left(A+I_2\right)=\det A$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-4 & -13\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
	$aI_2=I_2$, deci $a=1$	**2p**
c)	$\det\left(A+mI_2\right)=\begin{vmatrix}3+m & 13\\ -1 & -4+m\end{vmatrix}=m^2-m+1$, pentru orice număr natural m	**3p**
	$m^2-m+1=n^2-n+1\Leftrightarrow(m-n)(m+n-1)=0$ și, cum m și n sunt numere naturale, $m\neq n$, obținem $m+n=1$, deci perechile sunt $(1,0)$ și $(0,1)$	**2p**

2.a)	$x\circ\frac{1}{2}=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{1-x-\frac{1}{2}+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}}=$	**2p**
	$=\frac{x\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=x$, pentru orice $x\in M$	**3p**
b)	$x\circ y=\frac{xy}{1-x-y+2xy}=\frac{yx}{1-y-x+2yx}=$	**2p**
	$=y\circ x$, pentru orice $x,\ y\in(0,1)$, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**
c)	$f(x)\circ f(y)=\frac{f(x)f(y)}{1-f(x)-f(y)+2f(x)f(y)}=\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\frac{y}{y+1}}{1-\frac{x}{x+1}-\frac{y}{y+1}+2\cdot\frac{xy}{(x+1)(y+1)}}=$	**3p**
	$=\frac{xy}{xy+x+y+1-xy-x-yx-y+2xy}=\frac{xy}{xy+1}=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(e^x+1)e^x-(e^x+x)e^x}{e^{2x}}=$	**3p**
	$=\frac{(e^x+1-e^x-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ are panta $f'(1)=0$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, dreapta de ecuație $y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f și panta ei este 0, deci tangenta la graficul funcției f în punctul $A(1,f(1))$ și asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f sunt paralele	**3p**
c)	$f'(x)=(1-x)e^{-x}\Rightarrow f''(x)=(x-2)e^{-x}$, deci $g(x)=(x-2)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$g'(x)=(3-x)e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$, deci $g'(x)+g(x)=(3-x)e^{-x}+(x-2)e^{-x}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^1(x^2+1)f(x)dx=\int_0^1(x^2+1)\left(4x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\int_0^1(4x^3+2x+1)dx=$	**2p**
	$=(x^4+x^2+x)\Big\vert_0^1=1+1+1-0=3$	**3p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(4x-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(2x^2-\ln(x^2+1)+\operatorname{arctg}x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2-\ln 2+\operatorname{arctg}1-0+\ln 1-\operatorname{arctg}0=2-\ln 2+\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)+\frac{2x-1}{x^2+1}\right)\ln x\,dx=\int_1^e 4x\ln x\,dx=2x^2\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e 2x\,dx=2e^2-e^2+1=e^2+1$	**2p**
	$e^2+1=e^2+a$, deci $a=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_3=2a_2$, deci $a_1+2a_2+a_3=4a_2$	**3p**
	$a_2=1$	**2p**
2.	$f(3)=3^2+3+6=18$, $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+6=\frac{58}{9}$	**2p**
	$f(3)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)=18\cdot\frac{58}{9}=116$, care este număr natural	**3p**
3.	$\log_5\left((4-x)(24-x)\right)=3\Rightarrow(4-x)(24-x)=125\Rightarrow x^2-28x-29=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine, sau $x=29$, care nu convine	**2p**
4.	Mulțimea are $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi cu două elemente, unde n este numărul de elemente ale mulțimii, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, deci $\frac{n(n-1)}{2}=45$, de unde obținem $n^2-n-90=0$	**2p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=10$	**2p**
5.	$\vec{u}-\vec{v}=(a-1)\vec{i}+4\vec{j}$, $3\vec{v}=3\vec{i}-3\vec{j}$	**2p**
	Vectorii $\vec{u}-\vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari, deci $\frac{a-1}{3}=-\frac{4}{3}$, de unde obținem $a=-3$	**3p**
6.	Triunghiul are ipotenuza egală cu 10 și aria $S=\frac{6\cdot 8}{2}=24$	**2p**
	$r=\frac{S}{p}=\frac{24}{12}=2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -2 & -4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}5 & 10\\ -2 & -4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=5\cdot(-4)-10\cdot(-2)=0$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}5-10a+a^2 & 10-20a\\ -2+4a & -4+8a+a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix}5-10a+a^2 & 10-20a\\ -2+4a & -4+8a+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ -2 & -4\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=0$	**2p**
c)	$A(-1)=\begin{pmatrix}6 & 10\\ -2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(-1))=2\neq 0$, deci $A(-1)$ este inversabilă și $(A(-1))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & -5\\ 1 & 3\end{pmatrix}$	**3p**

	$X=\left(A(-1)\right)^{-1}\cdot A(0)$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}\frac{5}{2} & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$5*8=3\cdot 5-2\cdot 8+1=$ $=15-16+1=0$	**3p** **2p**
b)	$3\cdot 2020^x-2\cdot 2020^x+1=2\Leftrightarrow 2020^x=1$ $x=0$	**2p** **3p**
c)	De exemplu, pentru $m=2k-1$ și $n=3k-1$, unde $k\in\mathbb{Z}$, obținem $m*n=(2k-1)*(3k-1)=$ $=3(2k-1)-2(3k-1)+1=6k-3-6k+2+1=0$, deci există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=0$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=$ $=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcţiei f în punctul $A(a,f(a))$ are panta $f'(a)=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ Tangenta la graficul funcţiei f în punctul $B(-a,f(-a))$ are panta $f'(-a)=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ și, cum, pentru orice număr real nenul a, $f'(-a)=f'(a)$, obținem că tangentele la graficul funcţiei f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele	**2p** **3p**
c)	$f(x)-f(-x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\ln\left(-x+\sqrt{(-x)^2+1}\right)=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}=2\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=2f(x)$, pentru orice număr real x $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2f(x)}{\ln x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{(\ln x)'}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=2$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x+2\ln(2x+1)-2\ln(2x+1)\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$ $=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(x+2\ln(2x+1)\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1+\int_0^1(2x+1)'\ln(2x+1)dx=$ $=\frac{1}{2}+(2x+1)\ln(2x+1)\Big\vert_0^1-\int_0^1 2\,dx=\frac{1}{2}+3\ln 3-2=3\ln 3-\frac{3}{2}$	**3p** **2p**
c)	$F'(x)=f(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci funcția F este crescătoare pe $[0,+\infty)$ Cum $\pi<3,2=\frac{16}{5}$, obținem $F(\pi)\leq F\left(\frac{16}{5}\right)$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lvert z\rvert=\dfrac{\lvert 1+2i\rvert}{\lvert 1-2i\rvert}=\dfrac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=$	**3p**
	$=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$	**2p**
2.	$f(-x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^{x}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{x}=$	**3p**
	$=\left(\sqrt{2}-1\right)^{x}+\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}=f(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția f este pară	**2p**
3.	$x+2=x^2\Rightarrow x^2-x-2=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine, sau $x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au ambele cifre divizibile cu 3 sunt $\overline{ab}$ cu $a\in\{3,6,9\}$ și $b\in\{0,3,6,9\}$, deci sunt 12 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{12}{90}=\dfrac{2}{15}$	**1p**
5.	Perpendiculara din A pe BC este și mediatoarea lui BC, deci coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC sunt soluțiile sistemului $\begin{cases}y=3x+1\\2y=x+7\end{cases}$	**3p**
	$x=1$, $y=4$	**2p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x$, $\sin(\pi-x)=\sin x$	**2p**
	$-\sin x\cos x-\sin x\cos x=-1\Leftrightarrow 2\sin x\cos x=1\Leftrightarrow \sin 2x=1$ și, cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\dfrac{\pi}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1\cdot 1-0\cdot\ln a=$	**2p**
	$=1-0=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & \ln a+\ln b\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & \ln(ab)\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(ab)$, pentru orice $a,b\in(0,+\infty)$	**2p**

c)	$A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=A\left(a^3\right)=\begin{pmatrix}1 & \ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & \ln a^3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow \ln a^3=2020\Leftrightarrow \ln a=\frac{2020}{3}\Leftrightarrow a=\sqrt[3]{e^{2020}}$, care convine	**3p**
2.a)	$x\circ y=\frac{1}{3}xy+x+y+3-3=\frac{1}{3}x(y+3)+(y+3)-3=$	**2p**
	$=(y+3)\left(\frac{1}{3}x+1\right)-3=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$f(x)\circ f(y)=\frac{1}{3}\left(f(x)+3\right)\left(f(y)+3\right)-3=\frac{1}{3}(3x-3+3)(3y-3+3)-3=$	**2p**
	$=3xy-3=f(xy)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$f\left(\frac{x+3}{3}\right)=3\cdot\frac{x+3}{3}-3=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci $x_k=f\left(\frac{x_k+3}{3}\right)$, pentru orice $k\in\mathbb{N}$, $k\geq 1$	**2p**
	$x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=f\left(\frac{x_1+3}{3}\right)\circ f\left(\frac{x_2+3}{3}\right)\circ\ldots\circ f\left(\frac{x_n+3}{3}\right)=f\left(\frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)}{3^n}\right)=$ $=3\cdot\frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)}{3^n}-3=\frac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ și x_n	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\cdot\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{-2}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=\sqrt{3}$, $f'(2)=-\frac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{5}{\sqrt{3}}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=+\infty$, deci dreapta de ecuație $x=1$ este asimptotă verticală la graficul funcției f	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1$, deci dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f, de unde obținem că punctul de intersecție a celor două asimptote este $(1,1)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**

b)	$f(x)-f(-x)=x^2+\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}-(-x)^2-\frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+9}}=\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\int_0^4\left(f(x)-f(-x)\right)dx=\int_0^4\frac{2x}{\sqrt{x^2+9}}dx=2\sqrt{x^2+9}\Big\vert_0^4=2(5-3)=4$	**3p**
c)	$\int_4^a\frac{f(x)}{x}dx=\int_4^a\left(x+\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)\right)\Big\vert_4^a=\frac{a^2-16}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$	**3p**
	$\frac{a^2-16}{2}=10$ și, cum $a>4$, obținem $a=6$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{11}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)=11-5=$	**2p**
	$=6=\left(\sqrt{6}\right)^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**3p**
2.	$f\left(-x\right)=\ln\dfrac{1+\left(-x\right)}{1-\left(-x\right)}=\ln\dfrac{1-x}{1+x}=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{-1}=$	**3p**
	$=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}=-f\left(x\right)$, pentru orice $x\in\left(-1,1\right)$, deci funcția f este impară	**2p**
3.	$4\cdot 2^{2x}+4\cdot 2^{x}-3=0\Leftrightarrow\left(2\cdot 2^{x}-1\right)\left(2\cdot 2^{x}+3\right)=0$	**3p**
	Cum $2^{x}>0$, pentru orice număr real, obținem $2^{x}=\dfrac{1}{2}$, deci $x=-1$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\left\{1,3,5,7\right\}$ este $A_4^3=$	**3p**
	$=\dfrac{4!}{(4-3)!}=4!=24$	**2p**
5.	$m_{BC}=1$ și, cum $AD\parallel BC$, obținem $m_{AD}=1$	**3p**
	Ecuația dreptei AD este $y+2=x+1$, deci $y=x-1$	**2p**
6.	$\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$, deci $\dfrac{\sin B}{\sin C}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{1}{2}$	**3p**
	$\sin C=2\sin B$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A\left(a\right)\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{vmatrix}=-3a+8+0-6-0+4a=$	**2p**
	$=-3a+4a+8-6=a+2$ pentru orice număr real a	**3p**
b)	$\det\left(A\left(0\right)\right)=2\neq 0$	**2p**
	$A^{-1}\left(0\right)=\begin{pmatrix}0 & -2 & -\dfrac{3}{2}\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
c)	Pentru $a\neq -2$, obținem $\det\left(A\left(a\right)\right)\neq 0$, deci sistemul este Cramer	**2p**
	Soluția sistemului de ecuații este $\left(1,-1,0\right)$	**3p**
2.a)	$x*\left(-2\right)=5\left(x+2\right)\left(-2+2\right)-2=$	**3p**

	$=0-2=-2$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$f(x)*f(y)=5\left(f(x)+2\right)\left(f(y)+2\right)-2=5\left(\frac{e^x-10}{5}+2\right)\left(\frac{e^y-10}{5}+2\right)-2=$	**3p**
	$=5\cdot\frac{e^x}{5}\cdot\frac{e^y}{5}-2=\frac{e^{x+y}-10}{5}=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x*x=5(x+2)^2-2$, $x*x*x=25(x+2)^3-2$	**2p**
	$25(x+2)^3-2=23\Leftrightarrow(x+2)^3=1$, deci $x=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}-1=$	**3p**
	$=\frac{2(x+2)}{2\sqrt{x^2+4x+5}}-1=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+5}-x-2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+5-x^2-4x-4}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+5}+x+2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=0$, adică axa Ox, este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x+2=\sqrt{x^2+4x+5}\Rightarrow x^2+4x+4=x^2+4x+5\Rightarrow 4=5$, fals, deci $f'(x)\neq 0$, pentru orice număr real x	**2p**
	f' are proprietatea lui Darboux, deci f' are semn constant și, cum $f'(0)=\frac{2}{\sqrt{5}}-1<0$, obținem că $f'(x)<0$, pentru orice număr real x, deci f este descrescătoare și, cum $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ și f este continuă, obținem Im $f=(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$F'(x)=\frac{2x\cdot x-x^2-1}{x^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{\left(x^2-1\right)(x+1)-x^2}{x^2(x+1)}=$	**3p**
	$=\frac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^2(x+1)f(x)\,dx=\int_1^2\frac{x^3-x-1}{x^2}\,dx=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=2-\ln 2+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-\ln 1+1\right)=1-\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^a f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^a=F(a)-F(1)=\frac{a^2+1}{a}-\ln(a+1)-2+\ln 2=\frac{a^2+1}{a}-\ln\frac{a+1}{2}-2$	**3p**
	$\frac{a^2+1}{a}-\ln\frac{a+1}{2}-2=\frac{1}{2}-\ln\frac{a+1}{2}$, deci $\frac{a^2+1}{a}=\frac{5}{2}$ și, cum $a>1$, obținem $a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(2+3i)^2 = 4+12i+9i^2 = 4-9+12i = -5+12i =$	**3p**
	$= 5i^2+12i = i(5i+12)$	**2p**
2.	$(f \circ f)(x) = x+a+a = x+2a$, $f(x+1) = x+1+a$, pentru orice număr real x	**3p**
	$x+2a = x+1+a \Rightarrow a = 1$	**2p**
3.	$5 \cdot 2 \cdot 2^x \cdot 3^x = 12 \cdot 5^x \Leftrightarrow 10 \cdot 6^x = 12 \cdot 5^x$	**3p**
	$\left(\frac{6}{5}\right)^x = \frac{6}{5}$, deci $x = 1$	**2p**
4.	$f(1)$ poate fi aleasă în două moduri, iar $f(2)$ și $f(3)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $4^2 \cdot 2 = 32$ de funcții $f:\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$ astfel încât $f(1) \geq 3$	**2p**
5.	$m_{AC} = -1$	**2p**
	Cum $BD \perp AC$, obținem $m_{BD} = 1$	**3p**
6.	$\cos 2x \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) - \sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right) = \cos 2x \cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2x \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	**2p**
	$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0$ și, cum $x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, deci $x = \frac{\pi}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 3^x \end{vmatrix} = 2^x \cdot 3^x - 0 \cdot 0 =$	**3p**
	$= (2 \cdot 3)^x = 6^x$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A(x) = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix} 2^x & 2^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^x & 3^x \\ 0 & 3^x \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2^x = 3^x$, de unde obținem $x = 0$	**2p**
c)	$X \cdot X \cdot X = A(1) \cdot X$ și $X \cdot X \cdot X = X \cdot A(1) \Rightarrow A(1) \cdot X = X \cdot A(1)$, deci, pentru $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, unde a, b, c și d sunt numere reale, obținem $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 3b \\ 2c & 3d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = 0$ și $c = 0$	**3p**
	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ și $d \in \{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$, deci orice matrice X, pentru care $X \cdot X = A(1)$, are două elemente numere iraționale	**2p**

2.a)	$x \circ x = x^2 + x \cdot x + x^2 =$	**3p**
	$= 3x^2 \geq 0$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$x^2 + xa + a^2 = x^2 + xb + b^2 \Leftrightarrow x(a-b) + \left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(x+a+b) = 0$	**3p**
	Cum $a \neq b$, obținem $x = -a - b$	**2p**
c)	$x^2 + x(x+1) + (x+1)^2 = -x^3 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$	**3p**
	$(x+1)^3 = 0$, de unde obținem $x = -1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = 2 - \ln(x+1) - (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} =$	**3p**
	$= 2 - \ln(x+1) - 1 = 1 - \ln(x+1)$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e - 1$	**2p**
	Pentru orice $x \in (-1, e-1]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-1, e-1]$ și pentru orice $x \in [e-1, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[e-1, +\infty)$	**3p**
c)	$f''(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$	**2p**
	Cum, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ avem $-\frac{1}{x+1} < 0$, obținem $f''(x) < 0$, deci f este concavă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - e^x\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - e^x\right)\Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{2} - e + 1 = \frac{3}{2} - e$	**2p**
b)	$\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(x - e^x\right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - xe^x\right) dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - (x-1)e^x\Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \left(x - f(x)\right) dx = \int_0^1 x^n e^x\,dx = x^n e^x\Big|_0^1 - n\int_0^1 x^{n-1} e^x\,dx =$	**3p**
	$= e - nI_{n-1}$, de unde obținem $I_n + nI_{n-1} = e$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left[2+3\sqrt{5}\right]=2+\left[3\sqrt{5}\right]=2+\left[\sqrt{45}\right]$	**2p**
	$36<45<49\Rightarrow 6<3\sqrt{5}<7$, deci partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$ este egală cu 8	**3p**
2.	$(f\circ g)(x)=f\left(g(x)\right)=g^2(x)-4g(x)+5=(2-x)^2-4(2-x)+5=x^2+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(f\circ h)(x)=f\left(h(x)\right)=h^2(x)-4h(x)+5=(2+x)^2-4(2+x)+5=x^2+1$, pentru orice număr real x, deci $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$x+3+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{3-x}+3-x=12\Rightarrow\sqrt{(x+3)(3-x)}=3\Rightarrow 9-x^2=9$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 15 numere divizibile cu 2 și 10 numere divizibile cu 3	**2p**
	Cum în mulțimea A sunt 5 numere care sunt divizibile și cu 2 și cu 3, obținem că în mulțimea A sunt $15+10-5=20$ de numere care sunt divizibile cu 2 sau cu 3	**3p**
5.	$\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{12}\left(-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)$, unde D este mijlocul segmentului BC	**3p**
	$\overrightarrow{GN}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AN}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{15}\left(-5\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}\right)=\frac{12}{15}\overrightarrow{MG}$, deci $\overrightarrow{MG}$ și $\overrightarrow{GN}$ sunt coliniari, de unde obținem că punctele M, N și G sunt coliniare	**2p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=2R$ și, cum $R=\frac{1}{2}$, obținem $BC=\sin A$	**3p**
	$\cos^2 A=1-\sin^2 A=1-BC^2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-0\cdot a=$	**3p**
	$=4-0=4$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ b & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 2a+2b & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ a+b & 2\end{pmatrix}=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2A(1+2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^4A(1+2+3+4+5)=2^4A(15)$	**3p**
	$2^4\begin{pmatrix}2 & 0\\ 15 & 2\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}2 & 0\\ x & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow n=4$ și $x=15$	**2p**
2.a)	$5\circ 2=5+2-7=$	**3p**
	$=7-7=0$	**2p**

b)	$f(x)\circ f(y)=f(x)+f(y)-7=7+\log_7 x+7+\log_7 y-7=$	**3p**
	$=7+\log_7 x+\log_7 y=7+\log_7(xy)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$	**2p**
c)	$a^2\circ b^2=0\Leftrightarrow a^2+b^2=7$	**1p**
	Pentru $a,\ b\in\mathbb{Z}$ cu $\lvert a\rvert\geq 3$ sau $\lvert b\rvert\geq 3$, obținem $a^2+b^2\geq 9$, deci $a^2\circ b^2\neq 0$	**2p**
	Pentru $a,\ b\in\mathbb{Z}$ cu $\lvert a\rvert\leq 2$ și $\lvert b\rvert\leq 2$, obținem $a^2+b^2\in\{0,1,2,4,5,8\}\Rightarrow a^2+b^2\neq 7$, deci $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^{2x}\cdot 2\cdot(x-5)+e^{2x}\cdot 1=$	**3p**
	$=e^{2x}(2x-10+1)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}(2x-9)}{e^{2x}(x-5)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-9}{x-5}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{9}{x}\right)}{x\left(1-\frac{5}{x}\right)}=2$	**2p**
c)	$x\in\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f descrescătoare pe $\left(-\infty,\frac{9}{2}\right]$ și $x\in\left[\frac{9}{2},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f crescătoare pe $\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$; obținem $f(x)\geq f\left(\frac{9}{2}\right)=-\frac{e^9}{2}$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $e^{2x}(x-5)\geq-\frac{e^9}{2}$ și $x-5<0$, pentru orice $x\in(-\infty,5)\Rightarrow e^{2x}\leq\frac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$	**2p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^2 x\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\rvert_0^2=\frac{4}{2}-0=2$	**3p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)dx=$	**3p**
	$=\sqrt{x^2+1}\Big\rvert_1^2+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\Big\rvert_1^2=\sqrt{5}-\sqrt{2}+\ln\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$	**2p**
c)	$\int_0^x f\left(e^t\right)dt=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{e^{2t}+1}}\cdot\left(e^t\right)'dt=\ln\left(e^t+\sqrt{e^{2t}+1}\right)\Big\rvert_0^x=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln\left(e^x+\sqrt{e^{2x}+1}\right)+\ln(a-1)$, pentru orice număr real x, deci $-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)=\ln(a-1)\Leftrightarrow a-1=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$, de unde obținem $a=\sqrt{2}$, care convine	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_5 = a_1 + 4r = 1 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 1 + \sqrt{3}$	**2p**
	Cum $1 < \sqrt{3} < 2 \Rightarrow 2 < 1 + \sqrt{3} < 3$, obținem că $\{a_5\} = a_5 - [a_5] = 1 + \sqrt{3} - 2 = \sqrt{3} - 1$	**3p**
2.	$f(-2) = f(2) = \sqrt{5}$, $f(-1) = f(1) = \sqrt{2}$, $f(0) = 1$	**3p**
	$f(-2) \cdot f(-1) \cdot f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) = \sqrt{5}^2 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot 1 = 10 \in \mathbb{N}$	**2p**
3.	$\log_3(5x-1) = \log_3(x+1)^2 \Rightarrow 5x - 1 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$	**3p**
	$x = 1$ sau $x = 2$, care convin	**2p**
4.	$\{1,2,3\} \subset X \Rightarrow 1,2,3 \in X$	**2p**
	$X \subset \{1,2,3,4,5\} \Rightarrow X = \{1,2,3\}$, $X = \{1,2,3,4\}$, $X = \{1,2,3,5\}$ sau $X = \{1,2,3,4,5\}$, deci există 4 mulțimi X astfel încât $\{1,2,3\} \subset X \subset \{1,2,3,4,5\}$	**3p**
5.	$2\vec{u} + 3\vec{v} = 2(a\vec{i} + 3\vec{j}) + 3(2\vec{i} + b\vec{j}) = (2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j}$	**2p**
	$(2a+6)\vec{i} + (6+3b)\vec{j} = \vec{0}$, deci $a = -3$ și $b = -2$	**3p**
6.	ΔABC este dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC = 8\sqrt{2}$, deci $AB = AC = 8$	**2p**
	$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{32}{4(2+\sqrt{2})} = 4(2-\sqrt{2})$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{vmatrix} = 1 \cdot a^3 - a \cdot a^2 =$	**3p**
	$= a^3 - a^3 = 0$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$A(2) + xI_2 = \begin{pmatrix} 1+x & 2 \\ 4 & 8+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(2) + xI_2) = x^2 + 9x$, deci $x^2 + 9x = 0$	**3p**
	$x = -9$ sau $x = 0$	**2p**
c)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a^2 & a^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ b^2 & b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix}$, $A(b) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$\begin{pmatrix} 1+ab^2 & b+ab^3 \\ a^2+a^3b^2 & a^2b+a^3b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ba^2 & a+ba^3 \\ b^2+b^3a^2 & b^2a+b^3a^3 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = b$	**2p**
2.a)	$0 * 8 = \sqrt[3]{0^2 + 8^2} =$	**3p**
	$= \sqrt[3]{64} = 4$	**2p**

b)	Dacă e este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”, atunci $e*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e*0=0\Rightarrow\sqrt[3]{e^2}=0$ și obținem $e=0$	**3p**
	Cum $0*8=4\neq 8$, $e=0$ nu este element neutru al legii de compoziție „$*$”, deci legea de compoziție „$*$” nu are element neutru	**2p**
c)	De exemplu, pentru $m=2k^3$ și $n=2k^3$, unde $k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow m*n=\sqrt[3]{m^2+n^2}=\sqrt[3]{\left(2k^3\right)^2+\left(2k^3\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{8k^6}=2k^2\in\mathbb{N}^*$, deci există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\sqrt{x+1}\right)'=$	**2p**
	$=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}=1\Leftrightarrow x+1=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{4}$	**2p**
	Pentru $x\in\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right]$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $\left(-1,-\dfrac{3}{4}\right]$ și, pentru $x\in\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$ $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $\left[-\dfrac{3}{4},+\infty\right)$	**3p**
c)	$\ln x\geq 1$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$ și f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(\ln x)\geq f(1)\Rightarrow \ln x-\sqrt{\ln x+1}\geq 1-\sqrt{2}\Rightarrow \ln x\geq\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=\int_0^1\frac{e^x\left(x^2-4x+5\right)}{e^x}\,dx=\int_0^1\left(x^2-4x+5\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4x^2}{2}+5x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}-2+5=\dfrac{10}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)$ și $F''(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)+e^x(2x-4)=e^x\left(x^2-2x+1\right)=e^x(x-1)^2$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$e^x(x-1)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci, pentru orice primitivă F a lui f, obținem $F''(x)\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă	**2p**
c)	$F'(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)+e^x(2ax+b)=e^x\left(ax^2+(b+2a)x+c+b\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$ax^2+(b+2a)x+c+b=x^2-4x+5$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, de unde obținem $a=1$, $b=-6$ și $c=11$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5+2\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)^2=5+2\sqrt{3}-\left(4+2\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=5+2\sqrt{3}-4-2\sqrt{3}=1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$2m+1=2m^2+2m\Leftrightarrow m^2=\frac{1}{2}$	**3p**
	$m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ sau $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$	**2p**
3.	$x^2+5x+1=2x+5\Rightarrow x^2+3x-4=0$	**3p**
	$x=-4$, care nu convine, sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\lvert a+1\rvert\geq 2$ sunt 1, 2 și 3, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{5}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$	**2p**
	$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CN}$, deci $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$	**3p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=2R$ și, cum $R=1$, obținem $BC=2\sin A$ și $AC=2\sin B$	**3p**
	$4\sin A\cdot\sin B=2\sin B\cdot 2\sin A=AC\cdot BC$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2,3)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A(2,3)\right)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3-3=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b)\right)=\begin{vmatrix}a+1 & a-1\\ b & b-2\end{vmatrix}=(a+1)(b-2)-b(a-1)=2(b-a-1)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
	$a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow b-a-1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\Rightarrow\det\left(A(a,b)\right)\neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	**2p**
c)	$A\left(-1,\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ \sqrt{2} & \sqrt{2}-2\end{pmatrix}$, $\det\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)=2\sqrt{2}$, $\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\left(A\left(-1,\sqrt{2}\right)\right)^{-1}\cdot A(0,0)$ și, cum $A(0,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, obținem $X=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1\circ 4=5\cdot 1\cdot 4+1+4=$ $=20+5=25$	**2p** **3p**
b)	$x\circ 0=5x\cdot 0+x+0=x$, pentru orice număr întreg x $0\circ x=5\cdot 0\cdot x+0+x=x$, pentru orice număr întreg x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p** **3p**
c)	$x\in\mathbb{Z}$ element simetrizabil în raport cu legea de compoziție „$\circ$” $\Leftrightarrow$ există $x'\in\mathbb{Z}$ astfel încât $x\circ x'=x'\circ x=0\Leftrightarrow 5xx'+x+x'=0$, deci $x'=\dfrac{-x}{5x+1}$ și, cum $x,x'\in\mathbb{Z}$, obținem $5x+1=-1$ sau $5x+1=1$ $x=-\dfrac{2}{5}$, care nu convine, sau $x=0$, care convine	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3x^2\left(x^2+1\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$ $=\dfrac{x^4+3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3+x}=1$, deci panta dreptei d este 1 Tangenta la graficul lui f în $A(a,f(a))$ are panta 1, dacă $f'(a)=1\Leftrightarrow\dfrac{a^2\left(a^2+3\right)}{\left(a^2+1\right)^2}=1$, de unde obținem $a^2=1$, deci $a=-1$ sau $a=1$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2x\left(3-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x\in\mathbb{R}$ Cum $f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left[0,\sqrt{3}\right]$, obținem că funcția f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^{\pi}\dfrac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^{\pi}\dfrac{e^x\cos x}{e^x}dx=\int_0^{\pi}\cos x dx=$ $=\sin x\Big\vert_0^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x dx=e^x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\cos x)'dx=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=-1+e^x\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x dx=$ $=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x dx=\dfrac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{e^{x+\frac{\pi}{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{e^x\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{-\sin x}{\cos x}dx=e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=$ $=e^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right)-e^{\frac{\pi}{2}}\ln(\cos 0)=e^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{1}{2}-e^{\frac{\pi}{2}}\ln 1=-e^{\frac{\pi}{2}}\ln 2$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=\sqrt{2}+1+3-2\sqrt{2}=4-\sqrt{2}$	**2p**
	Cum a și b sunt numere raționale $4-\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\Leftrightarrow a=4$ și $b=-1$	**3p**
2.	$f(2020)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}$	**2p**
	$f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1}\Rightarrow f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=\frac{2020^2+2}{2020^2+1}+\frac{2\cdot 2020^2+1}{2020^2+1}=\frac{3\left(2020^2+1\right)}{2020^2+1}=3$	**3p**
3.	$2^{2x}-2^{2x+3}=-7\Leftrightarrow 2^{2x}\left(1-2^3\right)=-7\Leftrightarrow 2^{2x}=1$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Sunt $3^3=27$ de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$	**2p**
	Deoarece numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ pentru care $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\neq 0$ este egal cu $2^3=8$, obținem că numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$ este egal cu $27-8=19$	**3p**
5.	$AD\parallel BC\Rightarrow m_{AD}=m_{BC}$, deci $m_{AD}=1$	**3p**
	Ecuația dreptei AD este $y-3=1\cdot(x+1)$, deci $y=x+4$	**2p**
6.	$\text{tg}\,2x=-1$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, deci $2x=\frac{7\pi}{4}$	**3p**
	$x=\frac{7\pi}{8}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\2&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\2&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1+0+12-(-2)-(-3)-0=18$	**3p**
b)	Sistemul de ecuații are soluție unică $\Leftrightarrow\det(A(a))\neq 0$	**2p**
	$\det(A(a))=a+17$, deci $\det(A(a))\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-17\}$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, obținem $\det(A(1))=18\neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	**2p**
	Soluția sistemului de ecuații este $(1,1,1)$	**3p**
2.a)	$2*\frac{1}{2}=2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+1=$	**3p**
	$=2-2-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$	**2p**

b)	$a*x=a\Leftrightarrow 2ax-a-x+1=a\Leftrightarrow (2a-1)(x-1)=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$a=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f(x*y)=2(x*y)-1=2(2xy-x-y+1)-1=4xy-2x-2y+2-1=$	**3p**
	$=4xy-2x-2y+1=(2x-1)(2y-1)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\ln\left(2^x+1\right)\right)'=$	**2p**
	$=1-\frac{1}{2^x+1}\cdot\left(2^x+1\right)'=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$0<\frac{2^x}{2^x+1}<1$, pentru orice număr real x și $0<\ln 2<1$, deci $\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}<1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f'(x)=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}>0$, pentru orice număr real x, deci f este crescătoare	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{\ln\left(2^x+1\right)}{x}\right)=1-0=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\ln\left(2^x+1\right)\right)=-\ln 1=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+2)\sin x}{x+2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=$	**3p**
	$=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1$	**2p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)\sin x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+2)(\cos x)'dx=-(x+2)\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=$	**3p**
	$=-\left(\frac{\pi}{2}+2\right)\cos\frac{\pi}{2}+(0+2)\cos 0+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=2+\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=3$	**2p**
c)	$\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\sin^2 x}{f^2(x)}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{\sin^2 x}{(x+2)^2\sin^2 x}dx=\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{(x+2)^2}dx=-\frac{1}{x+2}\Big\vert_{\frac{1}{n}}^{1}=-\frac{1}{3}+\frac{n}{2n+1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
	$-\frac{1}{3}+\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{9}$, deci $n=4$, care convine	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a^2+4ai-4+a^2-4ai-4=$	**3p**
	$=2a^2-8\in\mathbb{R}$	**2p**
2.	$f(x)-1=-\dfrac{2x}{x^2+1}-1=-\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}=-\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$	**3p**
	Cum $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}\geq 0$, pentru orice număr real x, obţinem $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$\sqrt{3}^{x+1}=2^{x+1}\Leftrightarrow\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{x+1}=1$	**3p**
	$x+1=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
4.	Numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict crescătoare este egal cu $C_4^3=$	**3p**
	$=\dfrac{4!}{3!(4-3)!}=4$	**2p**
5.	Dreapta de ecuație $ax+y-5=0$ are panta egală cu $-a$	**2p**
	Dreapta de ecuație $x-4y+3=0$ are panta egală cu $\dfrac{1}{4}$, deci $a=-\dfrac{1}{4}$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}x+\dfrac{3}{\operatorname{tg}x}=2\sqrt{3}\Rightarrow\operatorname{tg}^2x-2\sqrt{3}\operatorname{tg}x+3=0\Rightarrow\left(\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\right)^2=0$	**3p**
	$\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, deci $x=\dfrac{\pi}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+0+0-1-1-0=-2$	**3p**
b)	$A\cdot B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$	**3p**
	$B\cdot A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=I_3$, deci B este inversa matricei A	**2p**

c)	$\det A \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluția $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{3-a}{2}\right)$, unde $a \in \mathbb{R}$	**3p**
	$2 \cdot \frac{a+1}{2} = \frac{a-1}{2} + \frac{3-a}{2} \Leftrightarrow 2a+2=2 \Leftrightarrow a=0$	**2p**
2.a)	$i \circ i = i \cdot i \cdot i + i + i =$ $= -i + 2i = i$	**3p** **2p**
b)	$z_1 \circ z_2 = iz_1z_2 + z_1 + z_2 - i + i = iz_1(z_2 - i) + (z_2 - i) + i =$	**3p**
	$= (z_2 - i)(iz_1 + 1) + i = i(z_1 - i)(z_2 - i) + i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2	**2p**
c)	$z \circ 0 = z$, $0 \circ z = z$, pentru orice număr complex z, deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**2p**
	$z \circ z' = 0 \Leftrightarrow i(z-i)(z'-i) + i = 0 \Leftrightarrow (z-i)(z'-i) = -1$, deci $z' = -\frac{1}{z-i} + i$ și, cum $z = \frac{1}{2}(1+i)$, obținem $z' = -\frac{2}{1+i-2i} + i = \frac{-1+i}{1-i} = -1$, care este număr real	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = nx^{n-1} - n \cdot \frac{1}{x} = n\left(x^{n-1} - \frac{1}{x}\right) =$	**3p**
	$= n \cdot \frac{x^n - 1}{x} = \frac{n(x^n - 1)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x) - x^n}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^n - n\ln x + 1 - x^n}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-n\ln x + 1}{x} =$	**2p**
	$= \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-n \cdot \frac{1}{x}}{1} = 0$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
c)	Pentru orice $x \in (0,1]$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$, $f(1) = 2$ și f este continuă, obținem că ecuația $f(x) = a$ are soluție în intervalul $(0,1] \Leftrightarrow a \in [2, +\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3 =$	**3p**
	$= \frac{27}{3} + 3 = 12$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}dx = \int_0^1 (x^2+1)e^{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^3+3x)'e^{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}e^{x^3+3x}\Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \frac{1}{3}(e^4 - e^0) = \frac{e^4-1}{3}$	**2p**
c)	$\int_0^1 f^7(x)dx = \int_0^1 x'(x^2+1)^7 dx = x(x^2+1)^7\Big|_0^1 - \int_0^1 14x^2(x^2+1)^6 dx = 2^7 - 14\int_0^1 (x^2+1-1)(x^2+1)^6 dx =$	**3p**
	$= 128 - 14\int_0^1 (x^2+1)^7 dx + 14\int_0^1 (x^2+1)^6 dx$, deci $15\int_0^1 f^7(x)dx - 14\int_0^1 f^6(x)dx = 128$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că primul termen este $b_1=2$ și rația este $q=3$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$. Calculați suma dintre abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x}=3-x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{50}\right\}$, acesta să **nu** fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ și $C(-2,5)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $(2\sin x+\cos x)^2-4\cos x(\sin x-\cos x)=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 3\\ -3 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=x^2+9$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Demonstrați că $A(2020-x)+A(2020+x)=2A(2020)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul natural n, pentru care $A(n)A(2-n)=2A(-6)$.

2. Pe mulțimea $M=[0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $N=\sqrt{33}*\sqrt{31}$ este un număr natural.

5p **b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $(x*x*x)^2=300$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(-\infty,0]\to[0,+\infty)$, $f(x)=\sqrt{-2020x}$. Arătați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(-\infty,0]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(5-x)(x+1)}{\left(x^2+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $-\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{1}{10}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_e^{e^2} x^2 F(x)\,dx = \frac{3}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=2$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,a^2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-5x+7}=x-1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** Determinaţi numărul real m, pentru care vectorii $\vec{u}=m\vec{i}+5\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătaţi că $(\sin x-\cos x)^2+(\sin x+\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=I_2+xA$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile de numere naturale (m,n) pentru care $M(m)M(n)=M(6)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x\leq 5$.

5p **c)** Calculați $1^n\circ 2^n\circ 3^n\circ\ldots\circ 2020^n$, pentru orice număr natural nenul n.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x-e}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstraţi că graficul funcției f **nu** admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$.

5p **c)** Demonstraţi că ecuația $e^x-x^e=0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^3\frac{f(x)}{e^x}dx=18$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, știind că $\displaystyle\int_1^n\frac{(x+1)e^x}{f(x)}dx=\frac{3\ln 2}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al treilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$. Determinaţi numerele naturale x, pentru care $f(x)<7$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+8}=x+2$.

5p **4.** Determinaţi numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,4)$, $C(1,a)$ și $D(2,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care dreptele AB și CD sunt paralele.

5p **6.** Calculaţi lungimea ipotenuzei BC a triunghiului dreptunghic ABC, în care $AB=10$ și $\cos B=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & x\\ 2x & 1+2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y+3xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $A(a)A(a)=A(5)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+y-4)-xy$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\geq x$.

5p **c)** Calculați $1*(-2)*3*(-4)*\ldots*2019*(-2020)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-x(x+2)e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $0\leq\frac{(x+2)(y+2)}{\sqrt{e^{x+y}}}\leq 4$, pentru orice $x,y\in[-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^2\frac{1}{x^2}f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are un singur punct de inflexiune.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_7 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=3$ și $b_6=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-20$. Determinați numerele reale a, știind că $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x=\dfrac{1}{5^{3x}}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,1)$ şi $C(1,0)$. Determinaţi coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi $\cos 2x$, știind că $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$ și $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=A+xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x)M(y)=M(y)M(x)$ dacă și numai dacă $x=y$.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $M(m^2+1)M(n^2)=M(n^2)M(m^2+1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+7xy$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=7\left(x+\dfrac{1}{7}\right)\left(y+\dfrac{1}{7}\right)-\dfrac{1}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=5$.

5p **c)** Dați exemplu de numere distincte $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ pentru care numărul $a\circ b$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e f'(x)\,dx=1$.

5p **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_1^e \frac{f^2(x)}{x}\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real p, $p>1$, știind că $\displaystyle\int_1^p x\,f(x)\,dx=\frac{p^2}{2}\ln p-\frac{3}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,2\cdot 10-1)(0,2\cdot 10+1)=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $f(x)=x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{6-x}=\sqrt{x+14}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 2 mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** Determinaţi numărul real a, pentru care $\vec{u}+\vec{v}=\vec{0}$, unde $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+3\vec{j}$.

5p **6.** Arătați că $\operatorname{tg}x=\frac{3}{4}$, știind că $\sin x=\frac{3}{5}$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} x+ay=1 \\ 2x+y+az=4 \\ -3x-y+z=1 \end{cases}$, unde a este număr real și $A(a)$ matricea coeficienților sistemului.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Pentru $a=-1$, determinați soluția sistemului de ecuații.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr rațional p, matricea $A(p)$ este inversabilă pentru orice număr rațional p.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziţie asociativă și cu element neutru $x*y=xy-101x-101y+10302$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=(x-101)(y-101)+101$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi numerele reale care sunt egale cu simetricul lor în raport cu legea „$*$”.

5p **c)** Determinaţi numerele întregi x și y, cu $x<y$, pentru care $x*y=202$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-5$.

5p **a)** Determinați panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că $e^x(1-x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{x^2+4}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Calculaţi $\int_2^6\frac{2}{f(x)}dx$.

5p **c)** Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_1^e\left(f(x)-\frac{4}{x}\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{a}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinaţi suma primilor cinci termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=5$ și rația $r=2$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $x^2-ax+a-1=0$ are soluții reale distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3-\sqrt[3]{x^2+x+2}=1$.

5p **4.** Calculați $2C_4^3-3A_4^2$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=\vec{i}+a\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+\left(a^2+1\right)\vec{j}$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC cu $AB=8$, $BC=8$ și aria egală cu 16. Determinați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x,y)=xI_2+yA$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $M(x,y)\cdot M(a,b)=M(xa+yb,xb+ya)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Determinați perechile (x,y) de numere reale, știind că $\det\left(M(x,y)\right)=4$ și suma elementelor matricei $M(x,y)\cdot M(x,y)$ este egală cu 8.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=x+y-1$ și $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Arătați că $2\circ(1*3)=(2\circ 1)*(2\circ 3)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $3^{x\circ x}=\left(\frac{1}{9}\right)^{x*x}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $(x-1)*(2y+1)=2$ și $(x+y)\circ 4=10$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}5x-3, & x\in(-\infty,1)\\ x^2-x+\sqrt{x^2+3}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că, pentru orice număr real a, $a>1$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

5p **c)** Demonstraţi că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+x+1$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{\sqrt{x}+2x}{2x}$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^4 g(x)dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>1$, pentru care $\int_1^m f(x)\cdot g(x)dx=20$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi suma primilor cinci termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=1$ și $b_2=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-11x+6$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care punctele $A(x, f(x))$ sunt situate sub axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(1-x)-\lg(7-x)=-1$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^1+C_n^2=6$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2a-1, a^2)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care punctul A aparține dreptei d de ecuație $y=x+4$.

5p **6.** Determinați $\cos 2x$, știind că x este număr real și $\sin x=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=1\\ x-2y+z=2\\ ax+y+z=3\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.

5p **b)** Demonstrați că suma elementelor matricei $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ **nu** depinde de numărul real a.

5p **c)** Pentru $a=-2$, arătați că sistemul de ecuații este incompatibil.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+m(x+y)$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $(-1)*1=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x+m)(y+m)-m^2$, pentru orice numere reale x, y și m.

5p **c)** Pentru $m=-1$, determinați numerele reale x pentru care $5^x*5^{x+1}=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\sqrt{x}}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$.

2. Se consideră funcţiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}+e^x+m$, unde m este număr real, și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+e^x+4x+1$.

5p **a)** Determinați numărul real m astfel încât funcția F să fie o primitivă a funcției f.

5p **b)** Pentru $m = 4$, calculați $\int_1^e f(x)\,dx$.

5p **c)** Pentru $m = 0$, calculați $\int_1^2 x\,f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\log_2 63-\log_2 7\right)\cdot\dfrac{1}{\log_2 3}=2$.

5p **2.** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $x^2+mx-m=0$ **nu** are soluții reale.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2-20}=\dfrac{1}{81}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n!\le n(n-1)$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(0,4)$ și $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$.

5p **6**. Determinați numărul real a, $a>1$, știind că $a-1$, $2a$ și $2a+1$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \ln a\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(e)\right)=e$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(a^2\right)\right)=\det\left(A(a)\cdot A(a)\right)$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numerele $a, b\in(0,+\infty)$ pentru care $A(a)+A(b)=2A(a)\cdot A(b)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-3\sqrt{2}(x+y)+6+\sqrt{2}$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{2}\circ 1=\sqrt{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\sqrt{2}\right)\left(y-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}}\circ\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{\sqrt{2020}}{\sqrt{2017}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}2^x+3^x-4, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{x^2-x+1}{x^2}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,1)$.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1(x+1)(x+3)f(x)\,dx=5$.

5p **b)** Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este concavă.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Comparați numerele $\log_2 16$ și $\sqrt[3]{125}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+(a+2)x+2a+1$, unde a este număr real. Determinaţi numerele reale a pentru care graficul funcției f este tangent axei Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-x-2}=5^{3x-5}$.

5p **4.** Demonstrați că numerele C_4^1, A_4^2 și A_5^2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(1,a)$ și $C(4,2a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6**. Determinați raza cercului circumscris triunghiului MNP, știind că $MN=16$ și $m(\sphericalangle P)=30°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & -1\\ 1 & -1 & -a\\ a & -1 & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay-z=a\\ x-y-az=-1\\ ax-y+z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-4$.

5p **b)** Determinați mulțumea valorilor reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) pentru care $x_0=y_0=z_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3+8}$.

5p **a)** Arătați că $2020*(-2020)=2$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Știind că $(\mathbb{R},*)$ este grup, demonstrați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+8$ este morfism de la grupul $(\mathbb{R},*)$ la grupul $(\mathbb{R},+)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\,f(x)\right)=2$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(-2,+\infty)$.

5p **c)** Determinați $x\in[-1,+\infty)$ pentru care $f(x)\in\mathbb{Z}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\frac{x+1}{f(x)}\,dx=e^2-1$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^{3x}f^2(x)\,dx$.

5p **c)** Se consideră numerele reale pozitive a, b și c. Demonstrați că, dacă $1-\int_0^a \frac{f(x)}{x+1}\,dx$, $1-\int_0^b \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ și $1-\int_0^c \frac{f(x)}{x+1}\,dx$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice, atunci a, b și c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care numerele $a-1$, 3 și $a+7$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Determinați suma absciselor punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}-3^x-8=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $C_n^2\le 3C_n^1$.

5p **5.** Determinați numerele reale m, $m\neq 2$, pentru care vectorii $\vec{u}=4\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-2)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Determinați perimetrul triunghiului ABC, știind că $AB=5$, $AC=4$ și $m(\sphericalangle A)=60°$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}(m^2-1)x+my+4z=1\\ x+y+z=0\\ mx+3y+z=-1\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m pentru care tripletul $(-1,0,1)$ este soluție a sistemului de ecuații.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numerele $m\in\mathbb{Z}\setminus\{-7,2\}$, pentru care sistemul de ecuații admite soluția (x_0,y_0,z_0), cu $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+11xy$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=11\left(x+\frac{1}{11}\right)\left(y+\frac{1}{11}\right)-\frac{1}{11}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x=\frac{8}{11}$.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $a=\left(1-\frac{1}{11}\right)\circ\left(1-\frac{2}{11}\right)\circ\left(1-\frac{3}{11}\right)\circ\left(1-\frac{4}{11}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\sqrt{x}-1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A\left(1,-\frac{1}{3}\right)$.

5p **c)** Demonstrați că $x\left(2\sqrt{x}-3\right)\ge -1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră funcția $f_n:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=\frac{x^n}{x^n+1}$.

5p **a)** Determinați primitiva $G:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției $g:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^3+1\right)f_3(x)$, știind că $G(0)=2020$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)dx \leq \frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)=-\log_2\left(\sqrt[3]{2}-1\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, astfel încât $f(x)+f(-x)=2020$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{1-x}=4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie cuprins între $\sqrt{122}$ și $\sqrt{170}$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{CA}$.

5p **6.** Lungimile laturilor unui triunghi sunt egale cu 2, 3 și 4. Arătați că triunghiul este obtuzunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 13\\ -1 & -4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=\det\left(A+I_2\right)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A\cdot A\cdot A=aI_2$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale, cu $m\neq n$, pentru care $\det\left(A+mI_2\right)=\det\left(A+nI_2\right)$.

2. Pe mulțimea $M=(0,1)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{xy}{1-x-y+2xy}$.

5p **a)** Arătați că $x\circ\dfrac{1}{2}=x$, pentru orice $x\in M$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to(0,1)$, $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(1,f(1)\right)$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătaţi că $g'(x)+g(x)=\dfrac{1}{e^x}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f''(x)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\dfrac{2x}{x^2+1}+\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e \left(f(x)+\frac{2x-1}{x^2+1} \right) \ln x\, dx = e^2 + a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi termenul a_2 al unei progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_1+2a_2+a_3=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+6$. Arătați că numărul $f(3)\cdot f\left(\frac{1}{3}\right)$ este natural.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(4-x)=3-\log_5(24-x)$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi care are exact 45 submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}-\vec{v}$ și $3\vec{v}$ sunt coliniari.

5p **6.** Un triunghi dreptunghic are catetele de lungime 6, respectiv 8. Determinați raza cercului înscris în acest triunghi.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}5-a & 10\\ -2 & -4-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că $A(a)\cdot A(a)=A(0)$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A(-1)\cdot X=A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3x-2y+1$.

5p **a)** Arătați că $5*8=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $2020^x*2020^x=2$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real nenul a, tangentele la graficul funcției f în punctele $A(a,f(a))$ și $B(-a,f(-a))$ sunt paralele.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(-x)}{\ln x}$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2\ln(2x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-2\ln(2x+1)\right)dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Dacă F este o primitivă a funcției f, arătați că $F(\pi)\leq F\left(\frac{16}{5}\right)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 13

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că modulul numărului complex $z=\dfrac{1+2i}{1-2i}$ este egal cu 1.

5p **2.** Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(\sqrt{2}+1\right)^x+\left(\sqrt{2}-1\right)^x$ este pară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+2}=x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre divizibile cu 3.

5p **5.** În triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$, ecuația mediatoarei laturii AC este $y=3x+1$ și ecuația perpendicularei din A pe BC este $2y=x+7$. Determinați coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, știind că $\sin x\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)\cos x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & \ln a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(ab)$, pentru orice $a, b\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$, astfel încât $A(a)\cdot A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2020\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\dfrac{1}{3}xy+x+y$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=\dfrac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-3$. Arătați că $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Demonstrați că $x_1\circ x_2\circ\ldots\circ x_n=\dfrac{(x_1+3)(x_2+3)\cdot\ldots\cdot(x_n+3)-3^n}{3^{n-1}}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și orice numere reale $x_1, x_2,\ldots, x_{n-1}$ și x_n.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați coordonatele punctului de intersecție a celor două asimptote ale graficului funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\right)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^4\big(f(x)-f(-x)\big)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>4$, astfel încât $\displaystyle\int_4^a\frac{f(x)}{x}dx=10+\ln\frac{a+\sqrt{a^2+9}}{9}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 14

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $\sqrt{11}-\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ și $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. Demonstrați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+2^x=\dfrac{3}{4}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate cu 3 elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-1,2)$. Determinați ecuația dreptei AD, știind că $ABCD$ este paralelogram.

5p **6.** Triunghiul ABC are $AB=10$ și $AC=5$. Arătați că $\sin C=2\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\\ 2 & 4 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=-1\\ -2x-3y=1\\ 2x+4y+az=-2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=a+2$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=0$, determinați inversa matricei $A(a)$.

5p **c)** Pentru $a\neq -2$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5(x+2)(y+2)-2$.

5p **a)** Arătați că $x*(-2)=-2$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x-10}{5}$. Demonstrați că $f(x+y)=f(x)*f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=23$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}-x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că axa Ox este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că imaginea funcției f este intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3-x-1}{x^2(x+1)}$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^2+1}{x}-\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_1^2(x+1)f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, astfel încât $\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx=\frac{1}{2}-\ln\frac{a+1}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 15

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $(2+3i)^2 = i(5i+12)$, unde $i^2 = -1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+a$. Determinați numărul real a, astfel încât $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5\cdot 2^{x+1}\cdot 3^x = 12\cdot 5^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$, care au proprietatea $f(1)\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră rombul $ABCD$ cu $A(-1,3)$ și $C(-2,4)$. Determinați panta dreptei BD.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos 2x\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2x\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 3^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x))=6^x$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că, orice matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot X=A(1)$ are două elemente numere iraționale.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2+xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ x\geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Se consideră numerele reale a și b cu $a\neq b$. Determinați numărul real x pentru care $x\circ a=x\circ b$.

5p **c)** Determinați numărul real x cu proprietatea că $x\circ(x+1)=-x^3$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-(x+1)\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=1-\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că funcţia f este concavă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{3}{2}-e$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 xf(x)dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n\left(x-f(x)\right)dx$. Demonstrați că $I_n+nI_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 16

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați partea întreagă a numărului $2+3\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+5$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x$ și $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=2+x$. Arătați că $(f\circ g)(x)=(f\circ h)(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{3}$.

5p **4.** Se consideră mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,30\}$. Determinați numărul de elemente ale mulțimii A care sunt divizibile cu 2 sau cu 3.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul G, centrul său de greutate și punctele M și N astfel încât $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ și $\overrightarrow{CN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{CA}$. Arătați că punctele M, N și G sunt coliniare.

5p **6.** Arătaţi că, dacă triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază $\frac{1}{2}$, atunci $\cos^2 A=1-BC^2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ a & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(b)=2A(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real x și numărul natural n pentru care $A(1)\cdot A(2)\cdot\ldots\cdot A(5)=2^n A(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-7$.

5p **a)** Arătați că $5\circ 2=0$.

5p **b)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=7+\log_7 x$. Arătați că $f(x)\circ f(y)=f(xy)$, pentru orice $x,\ y\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $a^2\circ b^2\neq 0$, pentru orice numere întregi a și b.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{2x}(x-5)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^{2x}(2x-9)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Arătaţi că $e^{2x}\leq\dfrac{e^9}{2(5-x)}$, pentru orice $x\in(-\infty,5)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2 f(x)\sqrt{x^2+1}\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \right) dx = \sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$.

5p **c)** Determinați $a \in (1, +\infty)$ astfel încât $\int_0^x f\left(e^t\right) dt = \ln\left(e^x + \sqrt{e^{2x}+1}\right) + \ln(a-1)$, pentru orice număr real x.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Test 17

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=1-3\sqrt{3}$ și rația $r=\sqrt{3}$. Arătați că partea fracționară a lui a_5 este egală cu $\sqrt{3}-1$.

5p **2.** Se consideră $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. Arătați că numărul $f(-2)\cdot f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$ este natural.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(5x-1)=2\log_3(x+1)$.

5p **4.** Determinați numărul de mulțimi X cu proprietatea $\{1,2,3\}\subset X\subset\{1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}+b\vec{j}$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că $2\vec{u}+3\vec{v}=\vec{0}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic isoscel, cu ipotenuza $BC=8\sqrt{2}$. Arătați că raza cercului înscris în ΔABC este egală cu $4\left(2-\sqrt{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ a^2 & a^3\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=0$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(2)+xI_2)=0$.

5p **c)** Arătați că, dacă $A(a)\cdot A(b)=A(b)\cdot A(a)$, atunci $a=b$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\sqrt[3]{x^2+y^2}$.

5p **a)** Arătați că $0*8=4$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” **nu** are element neutru.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care numărul $m*n$ este natural nenul.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x\geq\sqrt{\ln x+1}+1-\sqrt{2}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-4x+5\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{10}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

5p **c)** Determinați numerele reale a, b și c astfel încât funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x\left(ax^2+bx+c\right)$ este o primitivă a funcției f.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 18

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că diferența numerelor $5+2\sqrt{3}$ și $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ este număr întreg.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^2+2x$. Determinați numerele reale m, pentru care $f(m)=g(m)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+5x+1}=\sqrt{2x+5}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\{-2,-1,1,2,3\}$, acesta să verifice inegalitatea $|a+1|\geq 2$.

5p **5.** Se consideră A, B, C și D patru puncte coplanare, M mijlocul segmentului AD și N mijlocul segmentului BC. Arătați că $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$.

5p **6.** Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 1. Arătați că $4\sin A\cdot\sin B=AC\cdot BC$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix}a+1 & a-1\\ b & b-2\end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă $a\in\mathbb{Q}$ și $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci matricea $A(a,b)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\left(-1,\sqrt{2}\right)\cdot X=A(0,0)$.

2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 4=25$.

5p **b)** Demonstrați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați elementele simetrizabile în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x^2\left(x^2+3\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Se consideră dreapta d, asimptota spre $+\infty$ la graficul lui f. Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f, în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta d.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[0,\sqrt{3}\right]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\cos x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -e^{\frac{\pi}{2}} \ln 2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 19

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele raționale a și b, știind că $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{3+\sqrt{8}}=a+b\sqrt{2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$. Arătați că $f(2020)+f\left(\frac{1}{2020}\right)=3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-4^{\frac{2x+3}{2}}=-7$.

5p **4.** Determinați numărul de funcții $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2\}$ cu proprietatea că $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)=0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $ABCD$ cu $A(-1,3)$, $B(3,5)$ și $C(-4,-2)$. Determinați ecuația dreptei AD.

5p **6.** Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $\text{tg}\,2x=-1$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&3\\2&-1&a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y-z=2\\y+3z=4\\2x-y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=18$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică.

5p **c)** Pentru $a=1$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, astfel încât $a*x=a$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Demonstrați că $f(x*y)=f(x)\cdot f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(2^x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2^x\ln 2}{2^x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)}{x+2}\,dx=1$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $\int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\sin^2 x}{f^2(x)}\,dx = \frac{1}{9}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Test 20

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră a un număr real. Arătați că numărul $z=(a+2i)^2+(a-2i)^2$ este real, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}$. Arătați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{\frac{x+1}{2}}=2\cdot 2^x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3,4\}$ care sunt strict crescătoare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele de ecuații $ax+y-5=0$, unde a este număr real și $x-4y+3=0$. Determinați numărul real a pentru care cele două drepte sunt paralele.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x=2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+z=1\\y+z=2\\x+y=a\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că matricea $B=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$ este inversa matricei A.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul de ecuații are soluția (x_0,y_0,z_0) cu x_0, y_0, z_0 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $z_1\circ z_2=iz_1z_2+z_1+z_2$.

5p **a)** Arătați că $i\circ i=i$.

5p **b)** Demonstrați că $z_1\circ z_2=i(z_1-i)(z_2-i)+i$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2.

5p **c)** Demonstrați că simetricul numărului $\dfrac{1}{2}(1+i)$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$” este număr real.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^n-n\ln x+1$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{n(x^n-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^n}{x}=0$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care ecuația $f(x)=a$ are soluție în intervalul $(0,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)e^{x^3+3x}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $15\int_0^1 f^7(x)dx-14\int_0^1 f^6(x)dx=128$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a=3+4\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2=3+4\sqrt{3}-\left(7+4\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=3+4\sqrt{3}-7-4\sqrt{3}=-4$, care este număr întreg	**2p**
2.	$f(a)=g(a)\Leftrightarrow 2a+3=4a^2+2a\Leftrightarrow a^2=\frac{3}{4}$	**3p**
	$a=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ sau $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
3.	$2^{x^2+4x+2}=2^6\cdot 2^x\Leftrightarrow x^2+4x+2=6+x\Leftrightarrow x^2+3x-4=0$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele a din mulțimea A care verifică inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+1}\geq 3$ sunt -2 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{5}$	**1p**
5.	$MQ \parallel NP\Rightarrow m_{MQ}=m_{NP}$, deci $m_{MQ}=4$	**3p**
	Ecuația dreptei MQ este $y-3=4(x-2)$, deci $y=4x-5$	**2p**
6.	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=2R$ și, cum $R=5$, obținem $\sin A=\frac{BC}{10}$, $\sin B=\frac{AC}{10}$ și $\sin C=\frac{AB}{10}$	**3p**
	$\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\frac{BC}{10}\cdot\frac{AC}{10}\cdot\frac{AB}{10}=\frac{AB\cdot AC\cdot BC}{1000}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1,0)\right)=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-1-(-1)=0$	**3p**
b)	$\det\left(A(a,b)\right)=\begin{vmatrix}a & a-2\\ b+1 & b-1\end{vmatrix}=2(b-a+1)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
	$a\in(-\infty,0)$ și $b\in(0,+\infty)\Rightarrow b-a+1>1\Rightarrow \det\left(A(a,b)\right)\neq 0$, deci $A(a,b)$ este inversabilă	**3p**
c)	$A(1,3)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 4 & 2\end{pmatrix}$, $\det\left(A(1,3)\right)=6$, deci $A(1,3)$ este inversabilă și $\left(A(1,3)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\left(A(1,3)\right)^{-1}\cdot A(2,1)$ și, cum $A(2,1)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, obținem $X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1\circ(-1)=3\cdot 1\cdot(-1)-\left(1+(-1)\right)+\frac{2}{3}=$	**2p**
	$=-3+\frac{2}{3}=-\frac{7}{3}$	**3p**
b)	$x\circ y=3xy-x-y+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=3x\left(y-\frac{1}{3}\right)-\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}=$	**3p**
	$=\left(y-\frac{1}{3}\right)(3x-1)+\frac{1}{3}=3\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(y-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$x\circ\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ şi $\frac{1}{3}\circ y=\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
	$1\circ\frac{1}{\sqrt{2}}\circ\frac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}=\left(\left(1\circ\frac{1}{\sqrt{2}}\circ\frac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\circ\frac{1}{3}\right)\circ\frac{1}{\sqrt{10}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}=$ $=\frac{1}{3}\circ\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\circ\ldots\circ\frac{1}{\sqrt{2021}}\right)=\frac{1}{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1'-\frac{1'\cdot\left(x^2+1\right)-1\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**2p**
	$=-\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)=1\Rightarrow y=1$ este ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f, deci panta asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este egală cu 0	**3p**
	Panta dreptei de ecuaţie $y=2021$ este egală cu 0, deci asimptota spre $+\infty$ la graficul funcţiei f şi dreapta de ecuaţie $y=2021$ sunt paralele, deoarece au pante egale	**2p**
c)	$f''(x)=\frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x\in\mathbb{R}$ şi $f''(x)=0\Leftrightarrow x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ sau $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$	**2p**
	$f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$, $f''(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$ şi $f''(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$, deci $x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ şi $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ sunt punctele de inflexiune ale funcţiei f	**3p**
2.a)	$\int_1^2\frac{f(x)}{\sin x}dx=\int_1^2\frac{e^x\sin x}{\sin x}dx=\int_1^2 e^x dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\vert_1^2=e^2-e=e(e-1)$	**3p**
b)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=e^x\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x(\sin x)'dx=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-e^x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=$	**3p**
	$=e^{\frac{\pi}{2}}+1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$, deci $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{2}$	**2p**

c)	$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{x-\frac{\pi}{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{e^x \sin x}dx = -e^{-\frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}} \cdot \ln\lvert\sin x\rvert \Big\rvert_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$	**3p**
	$= -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}}\left(\ln\left(\sin\frac{\pi}{2}\right) - \ln\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{e^\pi}}\left(\ln 1 - \ln\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^\pi}}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ este $q=-3$	**2p**
	$b_5=b_1q^4=(-1)(-3)^4=-81$, deci $\lvert b_5\rvert=81$	**3p**
2.	$-2x^2+7x+9>0\Leftrightarrow(2x-9)(x+1)<0$	**2p**
	$x\in\left(-1,\frac{9}{2}\right)$	**3p**
3.	$\log_3\frac{x-1}{6-x}=-2\Rightarrow\frac{x-1}{6-x}=\frac{1}{9}$	**3p**
	$x=\frac{3}{2}$, care convine	**2p**
4.	$\frac{n(n-1)}{2}-n=5\Leftrightarrow n^2-3n-10=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, $n\geq 2$, obținem $n=5$	**2p**
5.	Distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu $0\Rightarrow A\in d$	**2p**
	$-1=(m-1)\cdot 3-2m\Leftrightarrow m=2$	**3p**
6.	$\cos(\pi-2x)=-\cos 2x=1-2\cos^2 x=1-2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2=$	**3p**
	$=1-2\cdot\frac{4}{9}=\frac{1}{9}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}3&1&-1\\1&-2&1\\2&2&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2))=\begin{vmatrix}3&1&-1\\1&-2&1\\2&2&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6-2+2-4+1-6=-3$	**3p**
b)	$B(a)=A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}8&3-2a&-1\\5-a&a^2+a+1&-2-a\\4+a&-a^2-a+2&-1+a\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	Matricea $B(a)$ are două elemente egale cu 0 dacă $a=-2$ sau $a=1$	**3p**
c)	Pentru $a=1$, sistemul devine $\begin{cases}3x+y-z=1\\x-y+z=3\\2x+y-z=2\end{cases}$ și adunând primele două ecuații ale sistemului	**3p**
	obținem $3x+y-z+x-y+z=4$, deci $x=1$ Adunând a doua și a treia ecuație din sistem, obținem $x-y+z+2x+y-z=5\Rightarrow x=\frac{5}{3}$, deci sistemul nu are soluții	**2p**

2.a)	$(-3)*3=\frac{1}{2}\cdot(-3)+\frac{1}{2}\cdot 3-(-3)\cdot 3=$	**3p**
	$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+9=9$	**2p**
b)	$x*y=\frac{1}{4}-xy+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}=$	**2p**
	$=\frac{1}{4}-x\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$\frac{1}{4}-\left(2^x-\frac{1}{2}\right)\left(4^{x-1}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2^x=\frac{1}{2}$ sau $4^{x-1}=\frac{1}{2}$	**3p**
	$x=-1$ sau $x=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(-1+3x^{-1}-4x^{-\frac{3}{2}}\right)'=3\cdot(-1)x^{-2}-4\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{5}{2}}=$	**3p**
	$=-\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^2\sqrt{x}}=\frac{-3x+6\sqrt{x}}{x^3}=\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-1+\frac{3}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}\right)=-1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot f'(x)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot 3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot 3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 4}\frac{-4^x\cdot 3\sqrt{x}}{x^3\left(\sqrt{x}+2\right)}=-6$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\ln x+2e^x-2x+2021\right)'=\frac{1}{x}+2e^x-2=$	**3p**
	$=\frac{1+2xe^x-2x}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
b)	$\int_1^e f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_1^e=F(e)-F(1)=$	**3p**
	$=2e^e-4e+3$	**2p**
c)	$\int_1^2 xf(x)\,dx=\int_1^2\left(2xe^x-2x+1\right)dx=\left((2x-2)e^x-x^2+x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=2e^2-4+2=2e^2-2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{10}+\sqrt{6}\right)=\sqrt{10}^2-\sqrt{6}^2=$	**2p**
	$=10-6=4=2^2$, deci numerele date sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	**3p**
2.	$f\left(-x\right)=\dfrac{\left(-x\right)^{2021}}{\left(-x\right)^2+1}=\dfrac{-x^{2021}}{x^2+1}=$	**3p**
	$=-\dfrac{x^{2021}}{x^2+1}=-f\left(x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcția f este impară	**2p**
3.	$2^{2x}-6\cdot 2^x-16=0\Leftrightarrow\left(2^x-8\right)\left(2^x+2\right)=0$	**3p**
	Cum $2^x>0$, pentru orice număr real, obținem $2^x=8$, deci $x=3$	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\left\{0,2,4,6,8\right\}$ este $C_5^2=$	**3p**
	$=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$	**2p**
5.	$m_{AB}=5$ și, cum $d\parallel AB$, obținem $m_d=5$	**3p**
	Ecuația dreptei d este $y-2=5\left(x+2\right)$, deci $y=5x+12$	**2p**
6.	$\sin A=\dfrac{1}{2}$, $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{BC}{\sin A}\Rightarrow\dfrac{2AC}{\sqrt{2}}=2BC$, deci $AC=BC\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A\left(m\right)\right)=\begin{vmatrix}4&1&m\\1&2&-1\\-2&-3&0\end{vmatrix}=0-3m+2-\left(-4m\right)-12-0=$	**3p**
	$=-3m+4m-10=m-10$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$A\left(9\right)=\begin{pmatrix}4&1&9\\1&2&-1\\-2&-3&0\end{pmatrix}$, $\det\left(A\left(9\right)\right)=-1$	**2p**
	$A^{-1}\left(9\right)=\begin{pmatrix}3&27&19\\-2&-18&-13\\-1&-10&-7\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$m\neq 10\Rightarrow\det\left(A\left(m\right)\right)\neq 0$, deci sistemul este compatibil determinat și $\left(a,b,c\right)=\left(2,1,0\right)$	**3p**
	Cum $\log_2 a=\log_2 2=1$ și $b+c=1+0=1$, obținem $\log_2 a=b+c$	**2p**

2.a)	$x*3=7(x-3)(3-3)+3=$ $=0+3=3$, pentru orice număr real x	**3p** **2p**
b)	$x*x=7(x-3)^2+3$, $x*x*x=49(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x $49(x-3)^3+3=-46\Leftrightarrow(x-3)^3=-1$, deci $x=2$	**2p** **3p**
c)	$f(x)*f(y)=7(f(x)-3)(f(y)-3)+3=7\left(\frac{5^x}{7}+3-3\right)\left(\frac{5^y}{7}+3-3\right)+3=$ $=7\cdot\frac{5^x}{7}\cdot\frac{5^y}{7}+3=\frac{5^{x+y}}{7}+3=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x\cdot\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}=$ $=\frac{x^2+2x+2-x(x+1)}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}=\frac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}=1$ Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$, $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(-\infty,-2)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ și $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-2,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$, $f(-2)=-\sqrt{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ și, cum f este continuă, obținem $\text{Im}\,f=\left[-\sqrt{2},1\right)$	**2p** **3p**
2.a)	$F'(x)=2-\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x+2}=\frac{2x^2(x+2)-(x+2)-4x^2}{x^2(x+2)}=$ $=\frac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p** **3p**
b)	$\int_1^2(x+2)f(x)\,dx=\int_1^2\frac{2x^3-x-2}{x^2}\,dx=\int_1^2\left(2x-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\left(x^2-\ln x+\frac{2}{x}\right)\Big\vert_1^2=$ $=4-\ln 2+\frac{2}{2}-1+\ln 1-2=2-\ln 2$	**3p** **2p**
c)	$\int_2^m f(x)\,dx=F(x)\Big\vert_2^m=F(m)-F(2)=2m+\frac{1}{m}-\frac{9}{2}+4\ln\frac{4}{m+2}$ $2m+\frac{1}{m}-\frac{9}{2}+4\ln\frac{4}{m+2}=2m+\frac{1}{m}-\frac{17}{2}$, deci $\ln\frac{4}{m+2}=-1\Rightarrow m=4e-2$, care convine	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=\frac{(2a_1+6r)\cdot 7}{2}=\frac{(2\cdot(-5)+6\cdot 8)\cdot 7}{2}=$	**3p**
	$=133$	**2p**
2.	$\Delta=1-4a(-a-1)=(2a+1)^2$	**2p**
	$\Delta>0\Rightarrow a\neq-\frac{1}{2}$ și, cum a este număr real nenul, obținem $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},0\right\}$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=x\Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=3$	**2p**
4.	$5A_3^2-3C_5^3=5\cdot\frac{3!}{(3-2)!}-3\cdot\frac{5!}{(5-3)!\cdot 3!}=$	**2p**
	$=5\cdot 6-3\cdot\frac{4\cdot 5}{2}=30-30=0$	**3p**
5.	$\frac{2}{5}=\frac{m}{-m^2-1}\Leftrightarrow 2m^2+5m+2=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=-\frac{1}{2}$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BC\cdot\sin C}{2}\Rightarrow 15=\frac{6\cdot 10\cdot\sin C}{2}\Rightarrow\sin C=\frac{1}{2}$	**3p**
	Cum $AB>BC>AC$, unghiul C are măsura cea mai mare dintre unghiurile ΔABC, deci unghiul C are măsura de 150°	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=-1+1=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
	$M(a,b)\cdot M(x,y)=(aI_2+bA)(xI_2+yA)=axI_2+ayA+bxA+ybA\cdot A=axI_2+(ay+bx)A=$ $=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y	**3p**
c)	$B=xI_2+2yA+yI_2+2xA=M(x+y,2(x+y))$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Cum $C=M(2xy,\sqrt{2}(x+y))$, obținem că $x+y=2xy=0$, deci $x=y=0\Rightarrow x^2+y^2=0$	**3p**
2.a)	$(1*2)\circ(1*3)=(2+2+4+2)\circ(3+2+6+2)=10\circ 13=10+13+2=25$	**3p**
	$1*(2\circ 3)=1*(2+3+2)=1*7=7+2+14+2=25$, deci $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ 3)$	**2p**

b)	$x\circ(-2)=(-2)\circ x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-2$	**2p**
	$x*e=x*(-2)=-2x+2x+(-4)+2=-2=e$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$n*(-n)=2-n^2$, $n\circ(-n)=2$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$2-n^2\geq 2\Leftrightarrow n^2\leq 0$, deci $n=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}\left(x-1+\sqrt{x^2-x+1}\right)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\left(x\ln(x+1)\right)=0$ și $f(0)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, de unde obținem că f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$ și $f''(x)=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$	**2p**
c)	Dacă $a\in(-\infty,0)$, atunci panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ este $f'(a)=1+\dfrac{2a-1}{2\sqrt{a^2-a+1}}$	**2p**
	Cum $f'(a)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{a^2-a+1}=1-2a\Leftrightarrow 4a^2-4a+4=4a^2-4a+1$, ceea ce este imposibil, obținem că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul A **nu** este paralelă cu axa Ox	**3p**
2.a)	$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	**2p**
b)	$\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)dx=f(x)\Big|_{\frac{1}{4}}^{4}=f(4)-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=$	**3p**
	$=\dfrac{15}{4}+3=\dfrac{27}{4}$	**2p**
c)	$\int_{m}^{1} f^2(x)\cdot g(x)dx=\int_{m}^{1} f^2(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{1}{3}f^3(x)\Big|_{m}^{1}=\dfrac{1}{3}\left(f^3(1)-f^3(m)\right)$	**3p**
	Cum $f(1)=1$, obținem $f(m)=0$, deci $m=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\lg 100-\lg 40\right)\cdot\dfrac{1}{\left(\lg 5-\lg 2\right)\left(\lg 5+\lg 2\right)}=$	**2p**
	$=\lg\dfrac{100}{40}\cdot\dfrac{1}{\lg\frac{5}{2}\cdot\lg 10}=\lg\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{\lg\frac{5}{2}}=1$	**3p**
2.	$2x=m^2-1\Leftrightarrow x=\dfrac{m^2-1}{2}$	**2p**
	Soluția ecuației este un număr real strict mai mic decât $0\Leftrightarrow m^2-1<0$, deci $m\in\left(-1,1\right)$	**3p**
3.	$2^{x^2+x}=2^{4x}\Leftrightarrow x^2+x=4x\Leftrightarrow x^2-3x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=3$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea numerelor naturale de o cifră care verifică inegalitatea $\left(n+1\right)!-n!\le n+2$ sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{10}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{AO}=6\vec{i}-6\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=x_C\vec{i}+\left(y_C-2\right)\vec{j}$, deci $6\vec{i}-6\vec{j}=2x_C\vec{i}+2\left(y_C-2\right)\vec{j}$	**3p**
	Coordonatele punctului C sunt $x_C=3$, $y_C=-1$	**2p**
6.	Triunghiul este dreptunghic, deci $a^2+1=2\left(a+2\right)$, de unde obținem $a^2-2a-3=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=3$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(4\right)=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&0&1\\4&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(A\left(4\right)\right)=\begin{vmatrix}1&0&2\\1&0&1\\4&1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+2+0-0-1-0=1$	**3p**
b)	$A\left(a\right)\cdot A\left(1\right)-A\left(a+1\right)=\begin{pmatrix}1+\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}\\2&1&2\\a+2&1&a+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&\sqrt{a+1}\\1&0&1\\a+1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\\1&1&1\\1&0&a+1\end{pmatrix}$, pentru orice $a\in\left(0,+\infty\right)$	**3p**
	$\det\left(A\left(a\right)\cdot A\left(1\right)-A\left(a+1\right)\right)=\begin{vmatrix}\sqrt{a}&\sqrt{a}&1+\sqrt{a}-\sqrt{a+1}\\1&1&1\\1&0&a+1\end{vmatrix}=\sqrt{a+1}-1>0$, pentru orice $a\in\left(0,+\infty\right)$	**2p**

c)	$B(n)=\begin{pmatrix} 1+1+\ldots+1 & 0 & 1+2+\ldots+n \\ 1+1+\ldots+1 & 0 & 1+1+\ldots+1 \\ 1^2+2^2+\ldots+n^2 & 1+1+\ldots+1 & 1+1+\ldots+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n & 0 & \frac{n(n+1)}{2} \\ n & 0 & n \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & n & n \end{pmatrix}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, $\det(B(n))=\frac{n^3(n-1)}{2}\neq 0$, deci matricea $B(n)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
2.a)	$\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\cdot 2+4\right)-3\left(\sqrt{3}+2\right)=$	**2p**
	$=6+4\sqrt{3}-3\sqrt{3}-6=\sqrt{3}$	**3p**
b)	$x\circ y=\sqrt{3}xy-3x-3y+4\sqrt{3}=\sqrt{3}xy-3x-3y+3\sqrt{3}+\sqrt{3}=$	**2p**
	$=\sqrt{3}x\left(y-\sqrt{3}\right)-3\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ\sqrt{3}=\sqrt{3}$, $\sqrt{3}\circ y=\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$3^1\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}=\left(3^1\circ\sqrt{3}\right)\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}=\sqrt{3}\circ\left(3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}\right)=\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}(x-\operatorname{arctg}x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{5x}{x^2+x+4}=0$ și $f(0)=0$, obținem $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(x)=x-\operatorname{arctg}x\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$	**3p**
	$f'(x)>0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$, deci funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$	**2p**
c)	f este crescătoare pe $(-\infty,0)$ și continuă în $x=0$, deci $f(x)\leq f(0)$ și, cum $f(0)=0$, obținem $f(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0)$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,+\infty)$, $f(x)\leq 1\Leftrightarrow\frac{5x}{x^2+x+4}\leq 1\Leftrightarrow x^2-4x+4\geq 0\Leftrightarrow(x-2)^2\geq 0$, deci $f(x)\leq 1$, pentru orice număr real $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f(x)\leq 1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_1^5 x(x+2)f(x)dx=\int_1^5(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_1^5=$	**3p**
	$=\frac{25}{2}+5-\left(\frac{1}{2}+1\right)=16$	**2p**
b)	$\int_1^3 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{2x+2}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\ln\left(x^2+2x\right)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}(\ln 15-\ln 3)=\frac{1}{2}\ln 5$	**2p**

c)	$F'(x)=f(x),\ x\in(0,+\infty)\Rightarrow F''(x)=\dfrac{x^2+2x-(x+1)(2x+2)}{\left(x^2+2x\right)^2}=-\dfrac{x^2+2x+2}{\left(x^2+2x\right)^2},\ x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$F''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este concavă	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$x=\log_6(8\cdot 27)=3$, $y=\sqrt{144}=12$	**2p**
	Media geometrică a numerelor x și y este $\sqrt{xy}=\sqrt{3\cdot 12}=6$	**3p**
2.	Graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta>0$, deci $4-4a>0$	**3p**
	$a\in(-\infty,1)$	**2p**
3.	$2-x^2=2x-1\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=1$	**2p**
4.	$A_5^2=4\cdot 5$, $C_6^2=3\cdot 5$ și $A_4^2=3\cdot 4$	**3p**
	$A_5^2\cdot C_6^2\cdot A_4^2=4^2\cdot 3^2\cdot 5^2=60^2$	**2p**
5.	$m_{AB}=-\dfrac{a+4}{3}$, $m_{BC}=4-a$, unde a este număr real	**2p**
	A, B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB}=m_{BC}\Leftrightarrow a+4=3a-12$, deci $a=8$	**3p**
6.	$MP=20$, deci semiperimetrul ΔMNP este $p=24$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{MN\cdot NP}{2}=96\Rightarrow r=\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta MNP}}{p}=\dfrac{96}{24}=4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&4&-1\\1&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&4&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-4+2+(-2)-4-(-1)-(-4)=-3$	**3p**
b)	$\det(A(a))=a^3-4a$, pentru orice număr real a	**2p**
	$A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a))\neq 0\Leftrightarrow a(a-2)(a+2)\neq 0$, deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\}$	**3p**
c)	Dacă (x_0,y_0,z_0) este soluție a sistemului cu $x_0=\dfrac{y_0}{2}=\dfrac{z_0}{3}$, atunci $\begin{cases}ax_0+4x_0+3x_0=1\\2x_0+8x_0-3ax_0=1,\\x_0+2ax_0-3x_0=0\end{cases}$ unde a este număr real, deci $\begin{cases}x_0(a+7)=1\\x_0(10-3a)=1\\2x_0(a-1)=0\end{cases}$	**2p**
	$x_0(a+7)=1$, deci $x_0\neq 0$ și, cum $2x_0(a-1)=0$, obținem că $a=1$; $x_0(a+7)=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{8}$ și $x_0(10-3a)=1\Rightarrow x_0=\dfrac{1}{7}$, ceea ce este imposibil	**3p**

2.a)	$2021*(-2021)=\sqrt[3]{2021^3+(-2021)^3-27}=\sqrt[3]{2021^3-2021^3-27}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{-27}=-3$	**2p**
b)	$x*e=x\Leftrightarrow\sqrt[3]{x^3+e^3-27}=x\Leftrightarrow x^3+e^3-27=x^3$, pentru orice număr real $x\Leftrightarrow e=3$	**3p**
	Cum $3*x=\sqrt[3]{3^3+x^3-27}=\sqrt[3]{x^3}=x$, pentru orice număr real x, obținem că $e=3$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\sqrt[3]{f^3(x)+f^3(y)-27}=\sqrt[3]{(x+27)+(y+27)-27}=$	**3p**
	$=\sqrt[3]{x+y+27}=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3x^2(x^6+7)-6x^5(x^3+3)}{(x^6+7)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-3x^2(x^6+6x^3-7)}{(x^6+7)^2}=\dfrac{-3x^2(x^3-1)(x^3+7)}{(x^6+7)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3+3}{x^6+7}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+3}{x^6+7}=0$	**2p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ și spre $+\infty$ la graficul funcției f, iar graficul funcției f nu admite asimptote verticale	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-\sqrt[3]{7}$, $x=0$ sau $x=1$; $f'(x)\le0$, pentru orice $x\in(-\infty,-\sqrt[3]{7}]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-\sqrt[3]{7}]$, $f'(x)\ge0$, pentru orice $x\in[-\sqrt[3]{7},1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-\sqrt[3]{7},1]$ și $f'(x)\le0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
	$f(-\sqrt[3]{7})=-\dfrac{1}{14}$, $f(1)=\dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci $-\dfrac{1}{14}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$, pentru orice număr real x, de unde obținem $-\dfrac{4}{7}\le f(x)-f(y)\le\dfrac{4}{7}$, deci $\lvert f(x)-f(y)\rvert\le\dfrac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
2.a)	$\int_0^1\dfrac{e^{3x}f(x)}{2x+1}dx=\int_0^1e^xdx=e^x\Big\rvert_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$\int_0^1e^xf(x)dx=\int_0^1(2x+1)e^{-x}dx=\int_0^1(2x+1)(-e^{-x})'dx=-(2x+1)e^{-x}\Big\rvert_0^1+\int_0^1 2e^{-x}dx=$	**3p**
	$=-\dfrac{3}{e}+1-2e^{-x}\Big\rvert_0^1=-\dfrac{3}{e}+1-\dfrac{2}{e}+2=\dfrac{3e-5}{e}$	**2p**
c)	$\int_1^2\dfrac{1}{x(x+2)}f\left(\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{2}{x}}dx=\dfrac{1}{2}\int_1^2\left(-\dfrac{2}{x}\right)'e^{-\frac{2}{x}}dx=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{2}{x}}\Big\rvert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2e}-\dfrac{1}{2e^2}=\dfrac{e-1}{2e^2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow r = 3$	**2p**
	$a_{2021} = a_1 + 2020r = 6062$	**3p**
2.	$f(x) = y \Leftrightarrow 2x - 3 = -x + 3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 2$ și $y = 1$	**2p**
3.	$3^{\frac{x+2}{2}} = 3^3 \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} = 3$	**3p**
	$x = 4$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A care sunt divizori ai numărului 48 sunt: 1, 2, 3, 4, 6 și 8, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$	**1p**
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2(m-4) + 2m = 4m - 8$, unde m este număr real	**3p**
	$4m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = 2$	**2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A = 36 + 9 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 63$, deci $BC = 3\sqrt{7}$	**3p**
	$P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA = 3\sqrt{7} + 9 = 3(\sqrt{7} + 3)$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -4 + 1 + (-1) - (-2) - (-1) - 2 = -3$	**3p**
b)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2a & 1 & 1 \\ 1 & 2a & 1 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = -6a^2 - a + 2$, pentru orice număr real a	**2p**
	Sistemul de ecuații admite soluție unică $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$	**3p**
c)	Cum a este număr întreg, obținem că $\det(A(a)) \neq 0$, deci $(1, y_0, z_0)$ este unica soluție a sistemului de ecuații	**2p**
	$1 = \frac{3a}{-6a^2 - a + 2} \Leftrightarrow 3a^2 + 2a - 1 = 0$ și, cum a este număr întreg, obținem $a = -1$	**3p**
2.a)	$x \circ 0 = x + 5 \cdot x \cdot 0 + 0 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0 \circ x = 0 + 5 \cdot 0 \cdot x + x = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

b)	$x\circ y=5xy+x+y+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}=5x\left(y+\frac{1}{5}\right)+\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\left(y+\frac{1}{5}\right)(5x+1)-\frac{1}{5}=5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x\circ\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{1}{5}$ și $\left(-\frac{1}{5}\right)\circ y=-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$q=\left(\left(-\frac{1}{2}\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\right)\circ\left(-\frac{1}{4}\right)\right)\circ\left(-\frac{1}{5}\right)\circ\left(-\frac{1}{6}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)=\left(-\frac{1}{5}\right)\circ\left(\left(-\frac{1}{6}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)\right)=-\frac{1}{5}$, deci $[q]=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x+1)'\cdot\ln x+(x+1)\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=1\cdot\ln x+(x+1)\cdot\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f'(1)=2$, $f(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2x-2$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{x-1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este convexă pe $[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$g(x)=x^3+1$, $x\in\mathbb{R}$, deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{x^4}{4}+x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $G(0)=2021$, obținem $c=2021$, deci $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $G(x)=\frac{x^4}{4}+x+2021$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x+1}{x^2+1}dx=\int_0^1\left(\frac{x}{x^2+1}+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\operatorname{arctg}x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\frac{1}{x^2+1}\leq\frac{x^n+1}{x^2+1}\leq\frac{x^2+1}{x^2+1}$, pentru orice $x\in[0,1]$ și pentru orice număr natural n, $n\geq 2$, deci $\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx\leq\int_0^1 f(x)dx\leq\int_0^1 1dx$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**3p**
	$\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=\frac{\pi}{4}$ și $\int_0^1 1dx=x\Big\vert_0^1=1\Rightarrow\frac{\pi}{4}\leq\int_0^1 f(x)dx\leq 1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$q=2$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$b_1=1$, deci $b_1+b_2+b_3=7$	**3p**
2.	$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+3=0$	**2p**
	Cum $\Delta>0$, graficul funcţiei f intersectează axa Ox în două puncte distincte pentru care produsul absciselor este egal cu $x_1x_2=\frac{3}{1}=3$	**3p**
3.	$4(x+2)=(1-x)^2 \Rightarrow x^2-6x-7=0$	**3p**
	$x=-1$, care convine; $x=7$, care nu convine	**2p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra sutelor poate fi aleasă în 4 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifrele zecilor şi unităţilor se pot alege în câte 5 moduri, deci există $4\cdot 5\cdot 5=100$ de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{100}{900}=\frac{1}{9}$	**1p**
5.	$\overrightarrow{OC}=a\vec{i}+(a+2)\vec{j}$, $\overrightarrow{AB}=-2\vec{i}-3\vec{j}$	**2p**
	$\frac{a}{-2}=\frac{a+2}{-3} \Leftrightarrow a=4$	**3p**
6.	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}+\cos x\sin\frac{\pi}{3}+\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=$	**3p**
	$=2\sin x\cos\frac{\pi}{3}=2\sin x\cdot\frac{1}{2}=\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \Rightarrow \det A(0)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0\cdot 3-1\cdot 2=-2$	**3p**
b)	$\det A(a)=\begin{vmatrix}a & a+1\\ a+2 & a+3\end{vmatrix}=a^2+3a-a^2-3a-2=-2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det A(a)\neq 0 \Rightarrow A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$(A(a))^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{a+3}{2} & \frac{a+1}{2}\\ \frac{a+2}{2} & -\frac{a}{2}\end{pmatrix}$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	$X=(A(a))^{-1}A(b)=\begin{pmatrix}a-b+1 & a-b\\ b-a & b-a+1\end{pmatrix}$ și, cum a şi b sunt numere întregi, obținem că X are toate elementele numere întregi	**3p**

2.a)	$a = 2 \circ 4 = \frac{2 \cdot 2}{4} + \frac{2 \cdot 4}{2} =$	**2p**
	$= 1 + 4 = 5$, care este număr întreg	**3p**
b)	$x \circ y = \frac{2x^2 + 2y^2}{xy}$, pentru orice $x, y \in A$	**2p**
	$x \circ y - 4 = \frac{2x^2 + 2y^2 - 4xy}{xy} = \frac{2(x-y)^2}{xy} \geq 0$, deci $x \circ y \geq 4$, pentru orice $x, y \in A$	**3p**
c)	Dacă legea de compoziție „$\circ$” ar admite element neutru, atunci ar exista $e \in A$ astfel încât $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in A \Rightarrow e \circ e = e$, de unde obținem $e = \frac{2e}{e} + \frac{2e}{e}$, deci $e = 4$	**3p**
	Cum $2 \circ 4 \neq 2$, obținem că $e = 4$ nu convine, deci legea de compoziție „$\circ$” nu admite element neutru	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} =$	**2p**
	$= \frac{-x^2 - 2x - 1 + x^2 - 2x + 1}{(x-1)^2 (x+1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2 (x+1)^2}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$	**3p**
b)	Graficul funcției f intersectează axa Oy în punctul $A(0, f(0))$, $f(0) = -2$ și $f'(0) = 0$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -2$	**2p**
c)	$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{x(x+2)}{(x-1)(x+1)}$, $x \in (-1,1) \cup (1, +\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{f(x+1)} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 (x+4) f(x)\,dx = \int_0^2 (x+2)\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 2x\Big|_0^2 =$	**3p**
	$= 2 - 0 + 4 - 0 = 6$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{x+4}\right) dx = \left(x - 2\ln(x+4)\right)\Big|_0^1 =$	**3p**
	$= 1 - 2\ln 5 + 2\ln 4 = 1 - 2\ln\frac{5}{4}$	**2p**
c)	$\frac{x+2}{x+4} \leq 1$ și $e^{-x} > 0$, deci $f(x)e^{-x} \leq e^{-x}$, pentru orice $x \in [0, n]$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	$\int_0^n f(x)e^{-x}\,dx \leq \int_0^n e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^n = 1 - e^{-n} < 1$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_4=\frac{a_3+a_5}{2}=\frac{5+11}{2}=$	**3p**
	$=8$	**2p**
2.	$a^2+1=(a+1)^2+1\Leftrightarrow a^2+1=a^2+2a+2\Leftrightarrow 2a+1=0$	**3p**
	$a=-\frac{1}{2}$	**2p**
3.	$x^2-x+13=x^2+2x+1\Leftrightarrow 3x=12$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra zecilor poate fi aleasă în 2 moduri, iar pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităţilor se poate alege în câte 3 moduri, deci sunt $2\cdot 3=6$ cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$	**1p**
5.	$m_{AB}=1$ și $m_{OC}=\frac{a}{3}$, unde a este număr real	**2p**
	$OC\perp AB\Leftrightarrow m_{AB}\cdot m_{OC}=-1\Leftrightarrow \frac{a}{3}=-1$, de unde obținem $a=-3$	**3p**
6.	$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{3}-\sin x\sin\frac{\pi}{3}+\cos x\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\sin\frac{\pi}{3}=$	**2p**
	$=2\cos x\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\cos x\cdot\frac{1}{2}=\cos x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 10 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}6 & -2\\ 10 & -3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=6\cdot(-3)-10\cdot(-2)=2$	**3p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}(1+5x)(1+5y)-20xy & -2y(1+5x)-2x(1-4y)\\ 10x(1+5y)+10y(1-4x) & -20xy+(1-4x)(1-4y)\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+5x+5y+5xy & -2x-2y-2xy\\ 10x+10y+10xy & 1-4x-4y-4xy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5(x+y+xy) & -2(x+y+xy)\\ 10(x+y+xy) & 1-4(x+y+xy)\end{pmatrix}=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**

c)	$\left(A(m)\right)^{-1}=A(n)\Leftrightarrow A(m)A(n)=I_2\Leftrightarrow A(m+n+mn)=A(0)\Leftrightarrow m+n+mn=0$, unde m şi n sunt numere întregi, $m\neq -1$ şi $n\neq -1$	**3p**
	$mn+m+n+1=1\Leftrightarrow (m+1)(n+1)=1$ şi, cum m şi n sunt numere întregi, obţinem $m=n=-2$ sau $m=n=0$, deci perechile sunt $(-2,-2)$ şi $(0,0)$, care convin	**2p**
2.a)	$1\circ 0=1\cdot 0+1+2\cdot a\cdot 0=$	**3p**
	$=0+1+0=1$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$x\circ 1>4\Leftrightarrow x+x+2a>4\Leftrightarrow 2x>4-2a\Leftrightarrow x>2-a\Leftrightarrow x\in(2-a,+\infty)$	**3p**
	$2-a=3$, deci $a=-1$	**2p**
c)	Legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă $\Leftrightarrow (x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$, pentru orice numere reale x, y şi $z\Leftrightarrow (xy+x+2ay)z+xy+x+2ay+2az=x(yz+y+2az)+x+2a(yz+y+2az)$	**2p**
	Obţinem $xz+2az=2axz+4a^2z\Leftrightarrow z(x+2a)(1-2a)=0$, pentru orice numere reale x şi z, deci $a=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-x\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{1-x}{e^x}\right)=1$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuaţie $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f(x)=x\Leftrightarrow x=0$	**2p**
	Cum $f(0)=0$ şi $f'(0)=1$, tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$ are ecuaţia $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, deci este dreapta de ecuaţie $y=x$	**3p**
2.a)	$\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=$	**3p**
	$=-\cos\pi+\cos 0=-(-1)+1=2$	**2p**
b)	$\int_0^{\pi}xf(x)dx=\int_0^{\pi}x\sin x\,dx=-\int_0^{\pi}x(\cos x)'dx=-x\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos x dx=$	**3p**
	$=-\pi\cos\pi+\sin x\Big|_0^{\pi}=-\pi\cdot(-1)+0-0=\pi$	**2p**
c)	$\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(f(x)-f^2(x)\right)dx=\int_0^1\sin x(1-\sin x)dx$	**2p**
	Pentru orice $x\in[0,1]$, $\sin x(1-\sin x)\geq 0\Rightarrow\int_0^1\sin x(1-\sin x)dx\geq 0$, deci $\int_0^1 f(x)dx\geq\int_0^1 f^2(x)dx$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z_1+z_2=1-2i+1+\frac{1}{2}i=2-\frac{3}{2}i$	**2p**
	$z_1z_2=\left(1-2i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)=1+\frac{1}{2}i-2i-i^2=2-\frac{3}{2}i$, deci $z_1+z_2=z_1z_2$	**3p**
2.	$\left(f\circ f\right)\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=2\left(2x+m\right)+m=4x+3m$, $2f\left(x-1\right)=2\left(2\left(x-1\right)+m\right)=4x-4+2m$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x+3m=4x-4+2m\Leftrightarrow m=-4$	**2p**
3.	$5\cdot5^x\cdot2^x=50\cdot7^{x-1}\Leftrightarrow5^x\cdot2^x=10\cdot7^{x-1}\Leftrightarrow10^{x-1}=7^{x-1}$	**3p**
	$x-1=0$, deci $x=1$	**2p**
4.	$f\left(2\right)$ poate fi aleasă în trei moduri și, pentru fiecare alegere a lui $f\left(2\right)$, numerele $f\left(0\right)$ și $f\left(4\right)$ pot fi alese în câte patru moduri	**3p**
	Există $3\cdot4\cdot4=48$ de funcții $f:\left\{0,2,4\right\}\to\left\{3,5,7,9\right\}$ cu proprietatea $f\left(2\right)\le8$	**2p**
5.	$m_d\cdot m_{AB}=-1$ și, cum $m_{AB}=-1$, obținem $m_d=1$	**2p**
	$AC=BC\Rightarrow d$ este mediatoarea segmentului AB și, cum $M\left(0,2\right)$ este mijlocul segmentului AB, obținem că ecuația dreptei d este $y=x+2$	**3p**
6.	$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos x-\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\sin x=1\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}-x\right)=1$	**2p**
	$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$, deci $x=\frac{\pi}{6}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det\left(A\left(x\right)\right)=\begin{vmatrix}4^x & 0\\ 0 & 9^x\end{vmatrix}=4^x\cdot9^x-0\cdot0=$	**3p**
	$=2^{2x}\cdot3^{2x}=6^{2x}$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A\left(x\right)\cdot B=\begin{pmatrix}-4^x & 4^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}$, $B\cdot A\left(x\right)=\begin{pmatrix}-4^x & 9^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}-4^x & 4^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4^x & 9^x\\ 0 & 9^x\end{pmatrix}\Leftrightarrow4^x=9^x$, de unde obținem $x=0$	**2p**
c)	Cum $A\left(1\right)\cdot X=X\cdot X\cdot X=X\cdot A\left(1\right)$, pentru $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}4a & 4b\\ 9c & 9d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a & 9b\\ 4c & 9d\end{pmatrix}$, deci $b=0$ și $c=0$	**3p**

	$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a \in \{-2,2\}$ și $d \in \{-3,3\}$, deci orice matrice X cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi	**2p**
2.a)	$2 \circ 1 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1^2 =$ $= 8 + 2 + 2 = 12$	**3p** **2p**
b)	$2c^2 + ca + 2a^2 = 2c^2 + cb + 2b^2 \Leftrightarrow c(a-b) + 2\left(a^2 - b^2\right) = 0 \Leftrightarrow (a-b)(c+2a+2b) = 0$ Cum $2a + 2b + c \neq 0$, obținem $a - b = 0$, deci $a = b$	**3p** **2p**
c)	$2x^2 + x(x+1) + 2(x+1)^2 = 5x^3 + 2 \Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow 5x\left(x^2 - x - 1\right) = 0$ $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x = 0$ sau $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = x' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' + a(x+1)' =$ $= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} + a = \ln x + 1 + a$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a	**3p** **2p**
b)	$f'(x) = \ln x + 2$, deci $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^2}$ $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(0, \frac{1}{e^2}\right] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0, \frac{1}{e^2}\right]$ și $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$	**2p** **3p**
c)	$f''(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a $f''(x) > 0$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$, deci, pentru orice număr real a, funcția f este convexă	**2p** **3p**
2.a)	$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(2x + e^x\right) dx = \left(x^2 + e^x\right)\Big|_{-1}^{0} =$ $= 0 + e^0 - 1 - e^{-1} = -\frac{1}{e}$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1 x f\left(x^2\right) dx = \int_0^1 \left(2x^3 + xe^{x^2}\right) dx = \int_0^1 2x^3\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2\right)' e^{x^2}\,dx = \frac{x^4}{2}\Big|_0^1 + \frac{e^{x^2}}{2}\Big|_0^1 =$ $= \frac{1}{2} + \frac{e^1}{2} - \frac{e^0}{2} = \frac{e}{2}$	**3p** **2p**
c)	$I_{n+1} = \int_0^2 x^{n+1}\left(f(x) - 2x\right) dx = \int_0^2 x^{n+1} e^x\,dx = x^{n+1} e^x\Big|_0^2 - (n+1)\int_0^2 x^n e^x\,dx =$ $= 2^{n+1} e^2 - (n+1) I_n$, deci $I_{n+1} + (n+1) I_{n-1} = 2^{n+1} e^2$, pentru orice număr natural nenul n	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3^2 = b_2 b_4 \Rightarrow 3^2 = 6b_4$	**3p**
	$b_4 = \frac{3}{2}$	**2p**
2.	$(-a)^2 + 3(-a) - 4 + a^2 + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4$	**3p**
	$a = -2$ sau $a = 2$	**2p**
3.	$2^{x+1} = 2^4 \cdot 2^{-2x} \Leftrightarrow 2^{x+1} = 2^{4-2x} \Leftrightarrow x + 1 = 4 - 2x$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale de două cifre care au cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor sunt 12, 24, 36 și 48, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$	**1p**
5.	$M(3,1)$ este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$M \in OC \Leftrightarrow C \in OM$ și, cum dreapta OM are ecuaţia $x - 3y = 0$, obţinem $a - 3(a+3) = 0$, deci $a = -\frac{9}{2}$	**3p**
6.	$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$, $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - (-\sin x)^2 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$	**3p**
b)	$A \cdot B(a,b) = \begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**3p**
	$\det(A \cdot B(a,b)) = 2(a+1)(b+1) - 2(a+1)(b+1) = 0$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
c)	$B(a,b) \cdot A = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
	$\begin{pmatrix} 1+b & a+1 \\ 2+2b & 2a+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 1+2a \\ b+2 & b+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 0$ și $b = 0$	**3p**

2.a)	$3\circ 5=\lvert 3-5\rvert+1=\lvert -2\rvert+1=$	**3p**
	$=2+1=3$	**2p**
b)	$a=(2\circ 3)\circ 4=2\circ 4=3$	**2p**
	$b=2\circ(3\circ 4)=2\circ 2=1$, deci $a-b=2$	**3p**
c)	Pentru $n=1$ şi m număr natural nenul, $m\circ n=m\circ 1=\lvert m-1\rvert+1=m-1+1=$	**3p**
	$=m$, deci există o infinitate de perechi de numere naturale nenule (m,n) pentru care $m\circ n=m$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(\ln(x-1)-\ln(x+1))'=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{x+1-(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{x-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=$	**3p**
	$=\ln\dfrac{1-0}{1+0}=\ln 1=0$	**2p**
c)	$x\in(1,+\infty)\Rightarrow x^2-1>0\Rightarrow f'(x)>0$, deci funcţia f este crescătoare	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcţia f nu este surjectivă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 2f(x)\,dx=\int_0^1(2x+2)\,dx=\left(x^2+2x\right)\Big\rvert_0^1=$	**3p**
	$=1+2=3$	**2p**
b)	$\int_0^1 e^x f(x)\,dx=\int_0^1 e^x(x+1)\,dx=\int_0^1\left(e^x\right)'(x+1)\,dx=(x+1)e^x\Big\rvert_0^1-\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=2e-1-e^x\Big\rvert_0^1=2e-1-(e-1)=e$	**2p**
c)	$f\left(e^x\right)-e^{f(x)}=e^x+1-e^{x+1}=1-e^x(e-1)$, pentru orice $x\in[0,e]$	**2p**
	$e-1>1$ și $e^x\ge 1$, pentru orice $x\in[0,e]\Rightarrow 1-e^x(e-1)\le 0$, pentru orice $x\in[0,e]$, de unde obținem că $\int_0^e f\left(e^x\right)dx\le\int_0^e e^{f(x)}dx$	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Raţia progresiei geometrice este $q=\frac{b_6}{b_5}=2$	**2p**
	$b_8=b_6q^2=6\cdot 4=24$	**3p**
2.	$f\left(\sqrt{3}\right)=3-\sqrt{3}-3=-\sqrt{3}$	**2p**
	$f\left(f\left(\sqrt{3}\right)\right)=f\left(-\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}-3=\sqrt{3}$	**3p**
3.	$\lg x^2=\lg(5x+6)\Rightarrow x^2-5x-6=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulţimea numerelor naturale de trei cifre are 900 de elemente, deci sunt 900 de cazuri posibile	**2p**
	Cifra sutelor, egală cu cifra unităţilor, poate fi aleasă în 9 moduri, iar, pentru fiecare alegere a cifrei sutelor, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 10 moduri, deci sunt 90 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{90}{900}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$BC\parallel Ox$ şi $A\in Oy\Rightarrow AO\perp BC$, deci O este ortocentrul triunghiului $ABC\Leftrightarrow OC\perp AB$	**2p**
	Cum $m_{OC}=-\frac{2}{a}$ şi $m_{AB}=5$, obţinem că $-\frac{2}{a}\cdot 5=-1$, deci $a=10$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}\Rightarrow \sin C=\frac{6\sin B}{3\sqrt{6}}$ şi, cum $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$, obţinem $\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	Cum $C<\pi-\frac{\pi}{3}$, obţinem $C=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(\sqrt{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=\begin{vmatrix}1 & \sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 1-\sqrt{2}\cdot\left(-\sqrt{2}\right)=1+2=3$	**3p**
b)	$\det A(a)=1+a^2$, pentru orice număr real a	**2p**
	$1+a^2>0$, pentru orice număr real $a\Rightarrow \det A(a)\neq 0$, deci $A(a)$ este inversabilă pentru orice număr real a	**3p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$, $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix}=-4I_2$	**3p**
	$A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=-4I_2\cdot A(1)=-4A(1)$, deci $k=-4$	**2p**

2.a)	$\frac{1}{3}\circ\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{3}+2=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}+2=1$, care este număr întreg	**2p**
b)	$x\circ x=3x^2-4x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ x\geq\frac{2}{3}\Leftrightarrow 3x^2-4x+\frac{4}{3}\geq 0$ și, cum $\Delta=0$, obținem că $x\circ x\geq\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$x\circ 1=1\circ x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=1$	**2p**
	$x\circ x\circ x=1\Leftrightarrow 3^2\left(x-\frac{2}{3}\right)^3+\frac{2}{3}=1\Leftrightarrow x-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, de unde obținem $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{e^x\left(x^2+1\right)-2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(x^2-2x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^3+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{3x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6x}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{6}=+\infty$, deci graficul lui f nu admite asimptotă spre $+\infty$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(-\infty,1)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(-\infty,1)$, $f'(x)>0$ pentru orice $x\in(1,+\infty)\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$ și, cum f este continuă în $x=1$, obținem că f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $\frac{\sqrt{5}}{3}<\frac{\sqrt{5}}{2}$, obținem că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$	**2p**
2.a)	$\int_1^4 f^4(x)\,dx=\int_1^4 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_1^4=$	**3p**
	$=\frac{4^3-1^3}{3}=21$	**2p**
b)	$\int_0^1 f\left(e^x\right)dx=\int_0^1\sqrt{e^x}\,dx=\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}dx=2e^{\frac{x}{2}}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2e^{\frac{1}{2}}-2e^0=2\sqrt{e}-2$	**2p**
c)	$\int_1^4 e^{f(x)}dx=\int_1^4 e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^4\left(\sqrt{x}\right)'\cdot\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}dx=2\int_1^2 t\,e^t\,dt=$	**3p**
	$=2(t-1)e^t\Big\vert_1^2=2e^2$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=3+4\sqrt{3}-\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ este întreg.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x+3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=4x^2+2x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+4x+2}=64\cdot 2^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr a din mulțimea $A=\left\{-2,-1,1,3,4\right\}$, acesta să verifice inegalitatea $\sqrt{a^2-2a+1}\geq 3$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră paralelogramul $MNPQ$ cu $M\left(2,3\right)$, $N\left(5,4\right)$ și $P\left(4,0\right)$. Determinați ecuația dreptei MQ.

5p **6**. Triunghiul ABC este înscris într-un cerc de rază 5. Arătați că $\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C=\dfrac{AB\cdot AC\cdot BC}{1000}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A\left(a,b\right)=\begin{pmatrix} a & a-2 \\ b+1 & b-1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(1,0\right)\right)=0$.

5p **b)** Demonstraţi că, dacă $a\in\left(-\infty,0\right)$ şi $b\in\left(0,+\infty\right)$, atunci matricea $A\left(a,b\right)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ pentru care $A\left(1,3\right)\cdot X=A\left(2,1\right)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy-\left(x+y\right)+\dfrac{2}{3}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ\left(-1\right)=-\dfrac{7}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\left(y-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1\circ\dfrac{1}{\sqrt{2}}\circ\dfrac{1}{\sqrt{3}}\circ\ldots\circ\dfrac{1}{\sqrt{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=1-\dfrac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=2021$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sin x}dx = e(e-1)$.

5p **b)** Calculați $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{f(x)}dx = -\frac{\ln 2}{\sqrt{e^{\pi}}}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați modulul celui de-al cincilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=-1$ și $b_2=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+7x+9$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x)>0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x-1)=\log_3(6-x)-2$.

5p **4.** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$, pentru care $C_n^{n-2}-A_n^1=5$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(3,-1)$, numărul real m și dreapta d de ecuație $y=(m-1)x-2m$. Determinați numărul real m pentru care distanța de la punctul A la dreapta d este egală cu 0.

5p **6.** Determinați $\cos(\pi-2x)$, știind că x este număr real și $\cos x=\frac{2}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 1 & -a & 1\\ 2 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}3x+y-z=1\\ x-ay+z=3\\ 2x+ay-z=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $B(a)=A(a)\cdot A(a)$ are două elemente egale cu 0.

5p **c)** Pentru $a=1$, arătați că sistemul de ecuații nu are soluții.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-xy$.

5p **a)** Arătați că $(-3)*3=9$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x*4^{x-1}=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1+\frac{3}{x}-\frac{4\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3\sqrt{x}\left(2-\sqrt{x}\right)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4^x\cdot f'(x)}{x-4}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2xe^x-2x+1}{x}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\ln x+2e^x-2x+2021$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx=2e^e-4e+3$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\int_1^2 x f(x)\,dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{10}-\sqrt{6}$, 2 și $\sqrt{10}+\sqrt{6}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^{2021}}{x^2+1}$. Arătați că funcția f este impară.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x-3\cdot 2^{x+1}=16$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu 2 elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(0,3)$ și $C(-2,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Triunghiul ABC are măsura unghiului A de $30°$ și măsura unghiului B de $45°$. Arătați că $AC=BC\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}4 & 1 & m\\ 1 & 2 & -1\\ -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}4x+y+mz=9\\ x+2y-z=4\\ -2x-3y=-7\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(m))=m-10$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați inversa matricei $A(9)$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, $m\neq 10$, dacă (a,b,c) este soluția sistemului de ecuații, atunci $\log_2 a=b+c$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $x*3=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x, astfel încât $x*x*x=-46$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{5^x}{7}+3$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^3-x-2}{x^2(x+2)}$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=2x+\dfrac{1}{x}-4\ln(x+2)$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 (x+2) f(x)\, dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m > 2$, astfel încât $\int_2^m f(x)\, dx = 2m + \frac{1}{m} - \frac{17}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=-5$ și rația $r=8$.

5p **2.** Determinați valorile reale nenule ale lui a pentru care ecuația $ax^2-x-a-1=0$ are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3x-\sqrt[3]{x^3+x^2-9}=2x$.

5p **4.** Calculați $5A_3^2-3C_5^3$.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{a}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{b}=5\vec{i}-\left(m^2+1\right)\vec{j}$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt coliniari.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB>BC$, $AC=6$, $BC=10$ și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a,b)=aI_2+bA$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a,b)\cdot M(x,y)=M(ax,ay+bx)$, pentru orice numere reale a, b, x și y.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale pentru care matricele $B=M(x,2y)+M(y,2x)$ și $C=M\left(x\sqrt{2},1\right)\cdot M\left(y\sqrt{2},1\right)$ sunt egale, atunci $x^2+y^2=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție $x*y=xy+2x+2y+2$ și $x\circ y=x+y+2$.

5p **a)** Arătați că $(1*2)\circ(1*3)=1*(2\circ 3)$.

5p **b)** Demonstrați că $x*e=e$, pentru orice număr real x, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*(-n)\geq n\circ(-n)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-1+\sqrt{x^2-x+1}, & x\in(-\infty,0)\\ x\ln(x+1), & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real a, $a<0$, tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a,f(a))$ **nu** este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1+x\sqrt{x}}{x^2}$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia f este o primitivă a funcţiei g.

5p **b)** Calculați $\int_{\frac{1}{4}}^{4} g(x)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real m, $m \in (0,1)$, pentru care $\int_{m}^{1} f^2(x)g(x)dx = \frac{1}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2-\lg 40\right)\cdot\dfrac{1}{\lg^2 5-\lg^2 2}=1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x-m^2+1=0$ este număr real strict mai mic decât 0.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x}=4^{2x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)!-n!\le n+2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Determinați numerele reale a, $a>-2$, știind că a^2+1 și $a+2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \sqrt{a}\\ 1 & 0 & 1\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$, unde $a\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(4)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(a)\cdot A(1)-A(a+1)\right)>0$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătați că matricea $B(n)=A\left(1^2\right)+A\left(2^2\right)+A\left(3^2\right)+\ldots+A\left(n^2\right)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\sqrt{3}(xy+4)-3(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $\sqrt{3}\circ 2=\sqrt{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=\sqrt{3}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(y-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $3^1\circ 3^{\frac{1}{2}}\circ 3^{\frac{1}{3}}\circ\ldots\circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x-\operatorname{arctg}x, & x\in(-\infty,0)\\ \dfrac{5x}{x^2+x+4}, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty,0)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+2x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^5 x(x+2)f(x)dx=16$.

5p **b)** Calculaţi $\int_1^3 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstraţi că orice primitivă F a funcţiei f este concavă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați media geometrică a numerelor $x=\log_6 8+\log_6 27$ și $y=\sqrt{2^2\cdot 3^3+6^2}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+a$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2-x^2}=7^{2x-1}$.

5p **4.** Arătați că produsul numerelor A_5^2, C_6^2 și A_4^2 este pătratul unui număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,\ a+1)$, $B(2,-3)$ și $C(3,\ 1-a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6**. Determinați raza cercului înscris în triunghiul MNP, dreptunghic în N, știind că $MN=12$ și $NP=16$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ 2 & 4 & -a\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=1\\ 2x+4y-az=1\\ x+ay-z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Arătați că sistemul de ecuații **nu** admite nicio soluție (x_0,y_0,z_0) astfel încât $x_0=\frac{y_0}{2}=\frac{z_0}{3}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\sqrt[3]{x^3+y^3-27}$.

5p **a)** Arătați că $2021*(-2021)=-3$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x+27}$. Demonstrați că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+3}{x^6+7}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-3x^2\left(x^3-1\right)\left(x^3+7\right)}{\left(x^6+7\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați asimptotele graficului funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $|f(x)-f(y)|\le\frac{4}{7}$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+1}{e^{2x}}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}f(x)}{2x+1}\,dx=e-1$.

5p **b)** Calculați $\displaystyle\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+2)}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\frac{e-1}{2e^2}$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_{2021} al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2$ și $a_3=8$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ cu dreapta d de ecuație $y=-x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3^{x+2}}=27$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al numărului 48.

5p **5.** Se consideră vectorii $\vec{u}=2\vec{i}+m\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-4)\vec{i}+2\vec{j}$, unde m este număr real**.** Determinați numărul real m pentru care $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=6$, $AC=3$ și unghiul A de $120°$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a & 1 & 1\\ 1 & 2a & 1\\ 1 & a & -1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2ax+y+z=0\\ x+2ay+z=1\\ x+ay-z=-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(-1))=-3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul de ecuații admite soluție unică.

5p **c)** Determinați numărul întreg a, știind că există numerele reale y_0 și z_0 astfel încât $(1,y_0,z_0)$ este soluție a sistemului de ecuații.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+5xy+y$.

5p **a)** Verificați dacă $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5\left(x+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)-\frac{1}{5}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați partea întreagă a numărului $q=\left(-\frac{1}{2}\right)\circ\left(-\frac{1}{3}\right)\circ\ldots\circ\left(-\frac{1}{2021}\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul $A(1,0)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^n+1}{x^2+1}$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Pentru $n=3$, se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(x^2+1\right)f(x)$. Determinați primitiva G a funcției g pentru care $G(0)=2021$.

5p **b)** Pentru $n=1$, calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4} \leq \int_0^1 f(x)dx \leq 1$, pentru orice număr natural n, $n \geq 2$.

Examenul de bacalaureat național 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Testul 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi suma primilor trei termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=2$ și $b_3=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+3$. Determinați produsul absciselor punctelor în care graficul funcției f intersectează axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{x+2}=1-x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(-1,0)$ şi $C(a,a+2)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{OC}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătaţi că $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & a+1 \\ a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Arătaţi că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstraţi că, dacă a şi b sunt numere întregi și $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A(a)\cdot X=A(b)$, atunci elementele matricei X sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea $A=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziţie $x\circ y=\frac{2x}{y}+\frac{2y}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că numărul $a=2\circ 4$ este întreg.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y\geq 4$, pentru orice $x,y\in A$.

5p **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,1)\cup(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$, $x\in(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul în care graficul intersectează axa Oy.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{f(x+1)}$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+4)f(x)dx=6$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^n f(x)e^{-x}dx<1$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=5$ și $a_5=11$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Determinaţi numărul real a știind că $f(a)=f(a+1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-x+13}=x+1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele strict mai mici decât 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$, $B(-1,1)$ şi $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a pentru care dreptele OC și AB sunt perpendiculare.

5p **6.** Arătaţi că, pentru orice număr real x, $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+5x & -2x\\ 10x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Demonstraţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+xy)$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi perechile de numere întregi (m,n) pentru care matricea $A(m)$ este inversa matricei $A(n)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+2ay$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $1\circ 0=1$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, știind că $x\circ 1>4$ dacă și numai dacă $x\in(3,+\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă dacă şi numai dacă $a=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătaţi că $e^x\left(f(x)+f'(x)\right)=1$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că dreapta de ecuație $y=x$ este tangentă la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^{\pi} f(x)dx=2$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^{\pi} xf(x)dx$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_0^{1} f(x)dx\geq\int_0^{1} f^2(x)dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că, dacă $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 1 + \frac{1}{2}i$, unde $i^2 = -1$, atunci $z_1 + z_2 = z_1 z_2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, astfel încât $(f \circ f)(x) = 2f(x-1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+1} \cdot 2^x = 50 \cdot 7^{x-1}$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{0,2,4\}\to\{3,5,7,9\}$ cu proprietatea $f(2) \le 8$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy, se consideră punctele $A(-2,4)$, $B(2,0)$ și C astfel încât $AC = BC$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Determinați $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\sin x + 1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 4^x & 0 \\ 0 & 9^x \end{pmatrix}$, unde x este număr real și $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A(x)) = 6^{2x}$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x) \cdot B = B \cdot A(x)$.

5p **c)** Demonstrați că orice matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X \cdot X = A(1)$ are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2x^2 + xy + 2y^2$.

5p **a)** Arătați că $2 \circ 1 = 12$.

5p **b)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât $2a + 2b + c \ne 0$. Știind că $c \circ a = c \circ b$, demonstrați că $a = b$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x \circ (x+1) = 5x^3 + 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\ln x + a(x+1)$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \ln x + 1 + a$, $x \in (0,+\infty)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a = 1$, determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = -\frac{1}{e}$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{1} x f\left(x^2\right)dx$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_{0}^{2} x^n \left(f(x) - 2x\right)dx$. Demonstrați că $I_{n+1} + (n+1)I_n = 2^{n+1}e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 11

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi al patrulea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2=6$ și $b_3=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x-4$. Determinați numerele reale a, pentru care $f(-a)+f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x+1}=16\cdot 4^{-x}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităţilor egală cu dublul cifrei zecilor.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(4,-3)$ şi $C(a,a+3)$, unde a este un număr real. Determinați numărul real a pentru care dreapta OC trece prin mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\cos^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos 2x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ și $B(a,b)=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & 1\end{pmatrix}$, unde a şi b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1,2))=-1$.

5p **b)** Arătați că $\det(A\cdot B(a,b))=0$, pentru orice numere reale a şi b.

5p **c)** Determinați numerele reale a şi b pentru care $A\cdot B(a,b)=B(a,b)\cdot A$.

2. Pe mulțimea $M=[1,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=|x-y|+1$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 5=3$.

5p **b)** Calculați $a-b$, știind că $a=(2\circ 3)\circ 4$ şi $b=2\circ(3\circ 4)$.

5p **c)** Arătați că există o infinitate de perechi (m,n) de numere naturale nenule pentru care $m\circ n=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{x^2-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f **nu** este surjectivă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 2f(x)\,dx=3$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^e f\left(e^x\right)dx\leq\int_0^e e^{f(x)}dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Testul 12

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul b_8 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=3$ și $b_6=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-3$. Arătați că $(f\circ f)(\sqrt{3})=\sqrt{3}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2\lg x=\lg(5x+6)$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(-1,-2)$ și $C(a,-2)$, unde a este număr real nenul, $a\neq -1$. Determinați numărul real a pentru care ortocentrul triunghiului ABC este O.

5p **6.** În triunghiul ABC, $AB=6$, $AC=3\sqrt{6}$ și $B=\frac{\pi}{3}$. Determinați măsura unghiului C.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A\left(\sqrt{2}\right)\right)=3$.

5p **b)** Arătați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul întreg k pentru care $A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)\cdot A(1)=kA(1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\circ y=3xy-2x-2y+2$.

5p **a)** Arătați că numărul $\frac{1}{3}\circ\frac{1}{3}$ este întreg.

5p **b)** Arătați că $x\circ x\geq\frac{2}{3}$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ x\circ x=e$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că graficul funcției f nu admite asimptotă spre $+\infty$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)<f\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 f^4(x)\,dx=21$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 f\left(e^x\right)dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^4 e^{f(x)}dx = 2e^2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5\left(2+\sqrt{3}\right)=10+5\sqrt{3}$	**3p**
	$5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10+5\sqrt{3}-5\sqrt{3}=10$	**2p**
2.	$f(1)=a\Rightarrow 1+3=a$	**3p**
	$a=4$	**2p**
3.	$2x+1=5$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 9 numere de două cifre care sunt divizibile cu 10, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 90 de numere de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{90}=\dfrac{1}{10}$	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(2-3)^2+(5-5)^2}$	**3p**
	$AB=1$	**2p**
6.	$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2},\ \cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4\cdot 2-1\cdot 8=0$	**3p**
b)	$B+C=\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}4 & 2+x\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow x=6$	**2p**
c)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot B+B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
2.a)	$0\circ(-4)=0\cdot(-4)+4\cdot 0+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-16+12=-4$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+4x+4y+16-4=$	**2p**
	$=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x şi y	**3p**

c)	$(x+4)^2-4=12$	**2p**
	$x^2+8x=0 \Rightarrow x_1=-8$ şi $x_2=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=$	**3p**
	$=\frac{2+1}{2^2}=\frac{3}{4}$	**2p**
c)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=-1$, $f'(1)=2$, deci ecuaţia tangentei este $y=2x-3$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 e^x dx=e^x\Big\|_0^1=$	**3p**
	$=e^1-e^0=e-1$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)'=e^x-x=$	**3p**
	$=f(x)$ pentru orice număr real x, deci F este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\int_0^1 F(x)dx=\int_0^1\left(e^x-\frac{x^2}{2}-1\right)dx=\int_0^1 e^x dx-\int_0^1\frac{x^2}{2}dx-\int_0^1 dx=$	**2p**
	$=e^x\Big\|_0^1-\frac{x^3}{6}\Big\|_0^1-x\Big\|_0^1=e-1-\frac{1}{6}-1=e-\frac{13}{6}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1+\sqrt{2}\right)^2=3+2\sqrt{2}$	**3p**
	$3+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3$	**2p**
2.	$f\left(x\right)=0\Rightarrow x-1=0$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=1$ și $y=0$	**2p**
3.	$x+1=2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Numerele naturale de o cifră, divizori ai lui 8, sunt 1, 2, 4 și 8, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 10 numere naturale de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**2p**
5.	$AB=2$	**2p**
	$BC=2\Rightarrow AB=BC$, deci ΔABC este isoscel	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\dfrac{AB}{10}$	**2p**
	$AB=5$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 8 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3-8=-5$	**3p**
b)	$\det A=\begin{vmatrix}a & 1\\ 8 & 3\end{vmatrix}=3a-8$	**3p**
	$a\in\mathbb{Z}\Rightarrow 3a-8\neq 0$	**2p**
c)	$A^{-1}=\dfrac{1}{3a-8}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -8 & a\end{pmatrix}$	**3p**
	$3a-8=-1\Rightarrow a=\dfrac{7}{3}$ nu este număr întreg	**1p**
	$3a-8=1\Rightarrow a=3$ pentru care inversa matricei A are toate elementele numere întregi	**1p**
2.a)	$1*5=1\cdot 5-5\cdot 1-5\cdot 5+30$	**3p**
	$=-25+30=5$	**2p**
b)	$x*y=xy-5x-5y+25+5=$	**2p**
	$=x\left(y-5\right)-5\left(y-5\right)+5=\left(x-5\right)\left(y-5\right)+5$ pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$\left(x-5\right)^2+5=x\Leftrightarrow x^2-11x+30=0$	**3p**
	$x_1=5$ și $x_2=6$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2-x\right)'=$	**2p**
	$=\left(x^2\right)'-x'=2x-1,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x}{x^2}=$	**2p**
	$=1$	**3p**
c)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=0$, $f'(1)=1$, deci ecuaţia tangentei este $y=x-1$	**3p**
2.a)	$\int_1^e\dfrac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+\ln x+2\right)'=2x+\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=f(x)$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)dx=\left(x^2+\ln x\right)\Big\vert_1^2=3+\ln 2$	**3p**
	$2<e\Rightarrow\ln 2<\ln e\Rightarrow 3+\ln 2<3+1\Rightarrow\mathcal{A}<4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$	**2p**
2.	$f(0)=4$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=0$ și $y=4$	**2p**
3.	$3x-1=2$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Numerele naturale de o cifră mai mici sau egale cu 3 sunt $0, 1, 2$ și 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 10 numere naturale de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$	**2p**
5.	$AB=3$	**2p**
	$BC=3\Rightarrow AB=BC$	**3p**
6.	$AC=8$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{6\cdot 8}{2}=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 4-2\cdot 2=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}=5A$	**2p**
c)	$A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ 2+y & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x & 2+y\\ 2+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=0,\ y=-2$	**2p**
2.a)	$(-1)\circ 1=-1+1+(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=0-1=-1$	**2p**
b)	$x\circ y=x+xy+y+1-1=$	**2p**
	$=x(y+1)+(y+1)-1=(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$(x+2)(x-2)-1=4 \Leftrightarrow x^2-9=0$	**3p**
	$x_1=-3$ și $x_2=3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x-2}=$	**2p**
	$=\dfrac{3-1}{3-2}=2$	**3p**
b)	$f'(x)=\dfrac{(x-1)'(x-2)-(x-1)(x-2)'}{(x-2)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{x-2-x+1}{(x-2)^2}=-\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
c)	$y-f(3)=f'(3)(x-3)$	**2p**
	$f(3)=2$, $f'(3)=-1$, deci ecuaţia tangentei este $y=-x+5$	**3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$V=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)dx=\pi\int\limits_0^1 x^4dx=$	**2p**
	$=\pi\dfrac{x^5}{5}\Big\vert_0^1=\dfrac{\pi}{5}$	**3p**
c)	F este o primitivă a funcţiei $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$	**2p**
	$F'(x)=(x+1)^2\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci funcţia F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=\frac{3}{2}-\frac{2}{3}=$	**2p**
	$=\frac{9-4}{6}=\frac{5}{6}$	**3p**
2.	$2x-3=x+1$	**3p**
	$x=4$	**2p**
3.	$x^2+5=9$	**2p**
	$x_1=-2$ și $x_2=2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	$\frac{10}{100}\cdot 120=12$	**3p**
	După scumpire prețul imprimantei este $120+12=132$ de lei	**2p**
5.	$AB=3$, $BC=4$ și $AC=5$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=3+4+5=12$	**2p**
6.	$\cos A=\sqrt{1-\frac{3}{4}}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1\cdot 0-1\cdot 2=-2$	**3p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $AB=\begin{pmatrix}b & b+2\\ b & b\end{pmatrix}$, $AB+C=\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ b & b\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ b & b\end{pmatrix}\Leftrightarrow b=1$	**2p**
c)	$\det(B+2C)=\begin{vmatrix}b+2 & b\\ 0 & 1\end{vmatrix}=b+2$	**3p**
	$\det B=b\Rightarrow \det B-\det A=b+2\Rightarrow \det(B+2C)=\det B-\det A$ pentru orice număr real b	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-4\cdot 1^2+1+2=$	**3p**
	$=1-4+3=0$	**2p**
b)	Câtul este X^2-3X-2	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=1$, $x_1x_2x_3=-2$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)}{x_1x_2x_3}=-2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}\left(x^2 - \ln x\right) =$	**2p**
	$= 1^2 - \ln 1 = 1$	**3p**
b)	$f'(x) = \left(x^2 - \ln x\right)' =$	**2p**
	$= \left(x^2\right)' - (\ln x)' = 2x - \dfrac{1}{x},\ x \in (0,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x) = (2x)' - \left(\dfrac{1}{x}\right)' =$	**2p**
	$= 2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$ pentru orice $x \in (0,+\infty)$, deci funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{3} - 0 = \dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$\mathcal{A} = \int_0^1 \left\vert \dfrac{x^2}{x+1} \right\vert dx = \int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1} dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \dfrac{1}{x+1} \right) dx =$	**3p**
	$= \left(\dfrac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right)\Big\vert_0^1 = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	F este o primitivă a funcţiei $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$	**2p**
	$F'(x) = \dfrac{x^2}{x+1} \geq 0$ pentru orice $x \in (-1,+\infty)$, deci funcţia F este crescătore pe $(-1,+\infty)$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$	**2p**
	$3\cdot\frac{1}{3}=1$	**3p**
2.	$m-4=1$	**3p**
	$m=5$	**2p**
3.	$2x^2+1=1$	**3p**
	$x=0$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$100000=4\%\cdot x$, unde x reprezintă venitul anual al firmei	**3p**
	$x=2500000$ de lei	**2p**
5.	$AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$	**3p**
	$AB^2+AC^2=BC^2$, deci ΔABC este dreptunghic	**2p**
6.	$\text{tg}\,60^\circ=\sqrt{3}$ și $\text{tg}\,45^\circ=1$	**2p**
	$\text{tg}^2 60^\circ+\text{tg}^2 45^\circ=3+1=4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3\cdot(-2)-1\cdot(-5)=-1$	**3p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow 2A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**3p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -5 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A-xA=\begin{pmatrix}4-3x & 1-x\\ -5+5x & -1+2x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}4-3x & 1-x\\ -5+5x & -1+2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow x=1$	**2p**
2.a)	$1*2=2(1+2-1)-1\cdot 2=$	**3p**
	$=4-2=2$	**2p**
b)	$x*2=2(x+2-1)-x\cdot 2=2$	**2p**
	$2*x=2(2+x-1)-2x=2=x*2$ pentru orice număr real x	**3p**
c)	$-x^2+4x-2=x\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x-1)e^x =$	**2p**
	$= -1\cdot e^0 = -1$	**3p**
b)	$f'(x) = 1\cdot e^x + (x-1)e^x =$	**3p**
	$= e^x + f(x)$ pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} =$	**2p**
	$= f'(0) = 0$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 3x^2dx = x^3\Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= 8-1 = 7$	**2p**
b)	O primitivă F a funcţiei f este de forma $F(x) = x^3 + x^2 + c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1) = 2 + c \Rightarrow c = 2012 \Rightarrow F(x) = x^3 + x^2 + 2012$	**2p**
c)	$\int_1^n \dfrac{f(x)}{x}dx = \int_1^n (3x+2)dx = \dfrac{3n^2+4n-7}{2}$	**3p**
	$\dfrac{3n^2+4n-7}{2} = \dfrac{13}{2} \Leftrightarrow 3n^2+4n-20 = 0 \Rightarrow n_1 = -\dfrac{10}{3}$ nu este număr natural şi $n_2 = 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $5\left(2+\sqrt{3}\right)-5\sqrt{3}=10$.

5p **2.** Determinați numărul real a știind că $f(1)=a$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x+1)=\log_2 5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$ și $B(3,5)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Arătați că $\sin^2 30^\circ+\cos^2 45^\circ=\frac{3}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}3 & x\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x știind că $B+C=A$.

5p **c)** Arătați că $B\cdot B+B=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Arătați că $0\circ(-4)=-4$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=12$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{4}$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$ și $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x-\frac{x^2}{2}-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 e^x\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\int_0^1 F(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1+\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}=3$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1}=3^2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 8.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(3,1)$ și $C(3,3)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Determinați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $BC=10$ și $m(\sphericalangle C)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, unde a este număr întreg.

5p **a)** Arătați că $\det B=-5$.

5p **b)** Arătați că $\det A\neq 0$ pentru orice număr întreg a.

5p **c)** Determinați numărul întreg a știind că inversa matricei A are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătați că $1*5=5$.

5p **b)** Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e \dfrac{1}{x}dx=1$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria mai mică strict decât 4.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4$ cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-1}=9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie mai mic sau egal cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(4,1)$ și $C(4,4)$. Arătați că $AB=BC$.

5p **6.** Determinați aria triunghiului ABC dreptunghic în A știind că $AB=6$ și $BC=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A=5A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A+\begin{pmatrix}x & y\\ y & -3\end{pmatrix}=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+xy$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 1=-1$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=(x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+1)\circ(x-3)=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=2$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=3$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}(2x+1)\,dx=2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x-1$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Pentru $a=3$ arătați că $\frac{a}{2}-\frac{2}{a}=\frac{5}{6}$.

5p **2.** Determinaţi abscisa punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+5}=3$.

5p **4.** Prețul unei imprimante este 120 de lei. Determinați prețul imprimantei după o scumpire cu 10%.

5p **5.** În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(2,5)$ și $C(6,5)$. Determinaţi perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Calculaţi $\cos A$ ştiind că $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi unghiul A este ascuţit.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-2$.

5p **b)** Determinaţi numărul real b pentru care $A+B=AB+C$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(B+2C)=\det B-\det A$ pentru orice număr real b.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+X+2$.

5p **a)** Arătaţi că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f prin $X-1$.

5p **c)** Arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-2$ ştiind că x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=2x-\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2}{x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe intervalul $(-1,+\infty)$.

Examenul de bacalaureat național 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)=1$.

5p **2.** Determinați numărul real m știind că $f(m)=1$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x^2+1}=1$.

5p **4.** În anul 2013, profitul anual al unei firme a fost de 100000 de lei, ceea ce reprezintă 4% din valoarea veniturilor anuale ale firmei. Determinați valoarea veniturilor anuale ale firmei în anul 2013.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,6)$, $B(2,6)$ și $C(5,2)$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p **6.** Arătați că $\text{tg}^2 60^\circ+\text{tg}^2 45^\circ=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -5 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătați că $2A\cdot B-B\cdot A=I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x știind că $A\cdot A-xA=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2(x+y-1)-xy$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Arătați că $x*2=2*x=2$ pentru orice număr real x.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1$.

5p **b)** Arătați că $f'(x)=e^x+f(x)$ pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 3x^2dx=7$.

5p **b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=2014$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n\geq 2$ știind că $\int_1^n\frac{f(x)}{x}dx=\frac{13}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$0,5=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}-1=0$	**3p**
2.	$f(-1)=0$, $f(0)=0$ şi $f(1)=2$	**3p**
	$f(-1)+f(0)+f(1)=2$	**2p**
3.	$3x+1=25$	**3p**
	$x=8$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	30% din 150 este $\frac{30}{100}\cdot 150=45$	**3p**
	Preţul după scumpire este $150+45=195$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(3-1)^2+(5-5)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	ΔABC este isoscel	**3p**
	$AB=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-2\cdot(-1)=$	**3p**
	$=2-(-2)=4$	**2p**
b)	$M\cdot M=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $3M=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$M\cdot M+3M+4I_2=\begin{pmatrix}2-6+4 & -6+6+0\\ 3-3+0 & -1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$M\cdot M\cdot M=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$, $aM+bI_2=\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}\Leftrightarrow a=5$, $b=12$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-5\cdot 1^2+5\cdot 1-1=$	**3p**
	$=1-5+5-1=0$	**2p**
b)	$f(a)=a^3-5a^2+5a-1$, $f(-a)=-a^3-5a^2-5a-1$	**2p**
	$f(a)+f(-a)+2=-10a^2\le 0$, pentru orice număr real a	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=5$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=5$, $x_1x_2x_3=1$	**3p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=5^2-2\cdot 5=15\cdot 1=15x_1x_2x_3$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6=$	**3p**
	$=6\left(x^2-1\right)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=-3$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=-3$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$	**3p**
	$f(2012)\leq f(2013)$ şi $f(2014)\leq f(2015)$, deci $f(2012)+f(2014)\leq f(2013)+f(2015)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x)+4)\,dx=\int_0^1 x^2dx=$	**2p**
	$=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}$	**3p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^1 \lvert g(x)\rvert\,dx=\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**2p**
c)	$\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}dx=\int_1^a x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^a=\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}$	**3p**
	$\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}=12\Leftrightarrow a^2-25=0$ şi, cum $a>1$, obţinem $a=5$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_g=\sqrt{16\cdot 9}=$	**3p**
	$=4\cdot 3=12$	**2p**
2.	$f(2)=2+m$	**2p**
	$2+m=0\Leftrightarrow m=-2$	**3p**
3.	$2x+1=5$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulţimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulţimea A sunt 4 multipli de 2, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{9}$	**2p**
5.	$x_M=2$	**3p**
	$y_M=3$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\sin x=\dfrac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 3=$	**3p**
	$=1-6=-5$	**2p**
b)	$C(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A+C(-1)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A+C(-1)\right)=-16$	**3p**
	$\det B=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-16$, deci $\det\left(A+C(-1)\right)=\det B$	**2p**
c)	$C(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+2 & 3x+1\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $A\cdot C(x)=\begin{pmatrix}x+6 & 10\\ 2x+2 & 5\end{pmatrix}$, $C(x)\cdot A-A\cdot C(x)=\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+2\cdot 1^2-6\cdot 1+3=$	**3p**
	$=1+2-6+3=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-1$	**3p**
	Restul este 0	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-6$, $x_1x_2x_3=-3$	**3p**
	$x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=(x_1+x_2+x_3)+\frac{x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2}{x_1x_2x_3}=-2+\frac{-6}{-3}=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3=$	**3p**
	$=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+1}{x}=$	**2p**
	$=-3$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
	$f(1)\le f(x)\le f(-1)$, deci $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_2^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_2^3 2x\,dx=x^2\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=9-4=5$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+\ln x+2015\right)'=$	**2p**
	$=2x+\frac{1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**3p**
c)	$V=\pi\int_1^2\left(f(x)-2x\right)^2dx=\pi\int_1^2\frac{1}{x^2}dx=$	**3p**
	$=\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=\frac{\pi}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$	**3p**
	$\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1$	**2p**
2.	$f(0)=2015$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=2015$	**2p**
3.	$x+2=4$	**2p**
	$x=2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	$p-10\%\cdot p=99$, unde p este prețul obiectului înainte de reducere	**3p**
	$p=110$ lei	**2p**
5.	$MN=\sqrt{(4-2)^2+(1-1)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot 1-2\cdot 1=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $xA=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**2p**
c)	$\det(A+I_2)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$, $\det(A-I_2)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$	**3p**
	$\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=4+(-2)=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+1=$	**3p**
	$=1-2-2+1=-2$	**2p**
b)	$f(-1)=(-1)^3-2\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+1=$	**3p**
	$=-1-2+2+1=0$, deci polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-2$, $x_1x_2x_3=-1$	**3p**
	$\frac{x_1+x_2+x_3}{x_1x_2x_3}=a\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)\Leftrightarrow\frac{2}{-1}=a\cdot(-2)\Leftrightarrow a=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-\left(\frac{1}{x}\right)'=$	**2p**
	$=1-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=-\frac{2}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\int_0^1x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(3)=5\Rightarrow c=-10$, deci $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x-10$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1e^x\left(x^2+2\right)dx=e^x\left(x^2+2\right)\Big\vert_0^1-\int_0^1 2xe^xdx=3e-2-\left(2xe^x\Big\vert_0^1-\int_0^1 2e^xdx\right)=$	**3p**
	$=3e-2-2e+2e^x\Big\vert_0^1=3e-4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{7}{10}$	**3p**
	$\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}=2$	**2p**
2.	$f(a)=0\Leftrightarrow a-2=0$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$x+3=16$	**3p**
	$x=13$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 3 multipli de 15, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p**
5.	$x_M=4$	**2p**
	$y_M=4$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=5C$	**2p**
c)	$AB=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$AB+BA+4I_2=\begin{pmatrix}25 & 25\\ 25 & 25\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=25C$	**2p**
2.a)	$5\circ(-4)=5\cdot(-4)+4\cdot 5+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-20+20-16+12=-4$	**2p**

b)	$x\circ y=xy+4x+4y+16-4=$	**2p**
	$=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ x=(x+4)^2-4$	**2p**
	$(x+4)^2-4=x\Leftrightarrow(x+4)(x+3)=0\Leftrightarrow x_1=-4$ și $x_2=-3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2x^3\right)'+\left(3x^2\right)'+5'=$	**2p**
	$=6x^2+6x=6x(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x(x+1)}{3x^2+5}=$	**2p**
	$=2$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x_1=-1$ și $x_2=0$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-1]$	**1p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,0]$, deci f este descrescătoare pe $[-1,0]$	**1p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_1^2 4x^3dx=x^4\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=16-1=15$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^4+x^3+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(1)=2015\Rightarrow c=2013$, deci $F(x)=x^4+x^3+2013$	**3p**
c)	$\int_1^n\dfrac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^n(4x+3)dx=2x^2\Big\vert_1^n+3x\Big\vert_1^n=2n^2+3n-5$	**3p**
	$2n^2+3n-5=9$ și cum n este număr natural, $n>1$, obținem $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
	$\frac{3}{2}\cdot\frac{10}{3}=5$	**2p**
2.	$f(-2)=0$, $f(2)=0$	**2p**
	$f(-2)+f(2)=0$	**3p**
3.	$2x-1=9$	**3p**
	$x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 2 multipli de 5, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**2p**
5.	$MO=4$	**2p**
	$ON=4\Rightarrow \Delta MON$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=$	**3p**
	$=60$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=$	**3p**
	$=-9+10=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1 & 0\\ 0 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A-aI_2=\begin{pmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-aI_2)=\begin{vmatrix}3-a & -2\\ 5 & -3-a\end{vmatrix}=-9+a^2+10=$	**3p**
	$=a^2+1\geq 1$, pentru orice număr real a	**2p**
2.a)	$f(-5)=(-5)^3+5\cdot(-5)^2+(-5)+5=$	**3p**
	$=-125+125-5+5=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-1$	**3p**
	Restul este $2X+10$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-5,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1,\ x_1x_2x_3=-5$	**3p**
	$\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=\frac{\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)}{x_1x_2x_3}=\frac{(-5)^2-2\cdot 1}{-5}=-\frac{23}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-4x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=0,\ f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=0$	**3p**
c)	$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0$, $f'(x)\geq 0$, pentru $x\in[-1,0]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru $x\in[0,1]$	**2p**
	$f(-1)=f(1)=0$ și $f(0)=1\Rightarrow 0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\int_1^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3}=\frac{26}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=\frac{3x^2}{3}+\frac{2}{3}\left(\sqrt{x}+x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=$	**3p**
	$=x^2+\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^2 x^2e^xdx=x^2e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=4e^2-e-2\left(xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=4e^2-e-2\left(2e^2-e\right)+2e^x\Big\vert_1^2=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_a=\dfrac{10-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{10}{2}=5$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=3$	**2p**
3.	$\log_5\dfrac{2x-1}{3}=0\Leftrightarrow\dfrac{2x-1}{3}=1$	**3p**
	$x=2$ care verifică ecuația	**2p**
4.	Sunt 4 numere de o cifră multipli ai lui 3, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 10 numere de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$	**2p**
5.	M mijlocul segmentului $AB\Rightarrow x_M=\dfrac{2+6}{2}=4$	**3p**
	$y_M=4$	**2p**
6.	$\cos a=\dfrac{4}{5},\ \cos b=\dfrac{5}{13}$	**2p**
	$\sin(a+b)=\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{63}{65}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2+2=$	**3p**
	$=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$p=1$	**2p**
c)	$A+B=\begin{pmatrix}2 & b-2\\ b+1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+B)=-b^2+b$	**2p**
	$\det(A+B)=0\Leftrightarrow b=0$ sau $b=1\Leftrightarrow B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ sau $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$1\circ 2015=-1\cdot 2015+1+2015=$	**3p**
	$=1$	**2p**

b)	$x \circ y = -x(y-1)+(y-1)+1 =$	**3p**
	$= -(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y	**2p**
c)	$(3^x-1)(5^x-1)=0$	**2p**
	$x=0$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x}{x^2+1} =$	**2p**
	$= \dfrac{3\cdot 1}{1^2+1} = \dfrac{3}{2}$	**3p**
b)	$f'(x) = \dfrac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$	**2p**
	$= \dfrac{3-3x^2}{(x^2+1)^2} = -\dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=-1$ şi $x_2=1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,-1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$	**1p**
	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[-1,1] \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$	**1p**
	$f'(x)\le 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_{-1}^{1} x^5 dx = \dfrac{x^6}{6}\Big\vert_{-1}^{1} =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=0$	**2p**
b)	$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\Big\vert_0^1 - \int_0^1 e^x dx =$	**3p**
	$= e-0-e+1=1$	**2p**
c)	$g(x) = \dfrac{(x^5+x)-x}{x^3} = x^2 \Rightarrow V = \pi\int_1^2 x^4 dx = \pi\dfrac{x^5}{5}\Big\vert_1^2 =$	**3p**
	$= \dfrac{31}{5}\pi$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{2}:0,5-1=0$.

5p **2.** Calculați $f(-1)+f(0)+f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 150 lei. Calculați prețul obiectului după o scumpire cu 30% .

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$ și $B(3,5)$. Determinați distanța de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=5$ și $m(\sphericalangle B)=45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det M=4$.

5p **b)** Arătați că $M\cdot M+3M+4I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b astfel încât $M\cdot M\cdot M=aM+bI_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+5X-1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Arătați că $f(a)+f(-a)+2\le 0$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(2012)+f(2014)\le f(2013)+f(2015)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)+4)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)+5}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}\,dx=12$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media geometrică a numerelor $a=16$ și $b=9$ este egală cu 12.

5p **2.** Determinaţi numărul real m pentru care $f(2)=0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+1}=3^5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie multiplu de 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,3)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{1}{2}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $C(x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A+C(-1)\right)=\det B$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $C(x)\cdot A-A\cdot C(x)=B$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2-6X+3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+3X-3.

5p **c)** Demonstrați că $x_1+x_2+x_3+\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x}$.

5p **c)** Arătați că $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_2^3\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=5$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-2x$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\sqrt{3}=1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x+2015$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=2$.

5p **4.** După o reducere cu 10% un obiect costă 99 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de reducere.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,1)$ și $N(4,1)$. Determinați lungimea segmentului MN.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{4}{5}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Arătați că $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=-2$.

5p **b)** Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1(f(x)-2)\,dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(3)=5$.

5p **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\cdot f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$, are aria egală cu $3e-4$.

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(4,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că $A+B=5C$.

5p **c)** Demonstrați că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Arătați că $5\circ(-4)=-4$.

5p **b)** Arătați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2015$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n>1$, știind că $\int_1^n\frac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{3}{10}=5$.

5p **2.** Calculați $f(-2)+f(2)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1}=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0), M(0,4)$ și $N(4,0)$. Arătați că triunghiul MON este isoscel.

5p **6**. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AB=10$ și $AC=12$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det(A-aI_2)\geq 1$, pentru orice număr real a.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2+X+5$.

5p **a)** Arătați că $f(-5)=0$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+6X+5.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2}+\frac{x_2}{x_1x_3}+\frac{x_1}{x_2x_3}=-\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $0\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\sqrt{x}\right)dx=\frac{26}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2015$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(f(x)-\sqrt{x}\right)e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$, are aria egală cu $e(2e-1)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi media aritmetică a numerelor $a=2\left(5-\sqrt{5}\right)$ şi $b=2\sqrt{5}$.

5p **2.** Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-4x+3$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(2x-1\right)-\log_5 3=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(2,4\right)$ şi $B\left(6,4\right)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Arătaţi că $\sin\left(a+b\right)=\frac{63}{65}$, ştiind că $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a=\frac{3}{5}$ şi $\sin b=\frac{12}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale p pentru care $A\cdot A=pA$.

5p **c)** Determinaţi matricele $B=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}$, ştiind că $\det\left(A+B\right)=0$, unde b este un număr real.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie dată de $x\circ y=-xy+x+y$.

5p **a)** Calculaţi $1\circ 2015$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=-\left(x-1\right)\left(y-1\right)+1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\circ 5^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\frac{3x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f\left(x\right)$.

5p **b)** Arătaţi că $f'\left(x\right)=-\frac{3\left(x-1\right)\left(x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^5+x$.

5p **a)** Calculaţi $\int_{-1}^{1} x^5dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f\left(x\right)-x^5\right)e^x dx=1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:\left[1,2\right]\to\mathbb{R}$, definită prin $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)-x}{x^3}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 01

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{4}:0,25=1$	**3p**
	$1-\frac{1}{4}:0,25=1-1=0$	**2p**
2.	$f(-1)=0$	**3p**
	$f(-1)\cdot f(1)=0$	**2p**
3.	$2x-3=25$	**3p**
	$x=14$, care verifică ecuația	**2p**
4.	20% din 100 este egal cu $\frac{20}{100}\cdot 100=20$	**3p**
	Prețul după scumpire este $100+20=120$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(5-2)^2+(4-4)^2}=$	**3p**
	$=3$	**2p**
6.	ΔABC este isoscel $\Rightarrow AB=AC=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)-1\cdot 2=$	**3p**
	$=-2-2=-4$	**2p**
b)	$A-2B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x & 2\\ 2y & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$\det(A-2B)=\begin{vmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	$1\circ(-2)=1\cdot(-2)+2\cdot 1+2\cdot(-2)+2=$	**3p**
	$=-2+2-4+2=-2$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+4-2=$	**3p**
	$=x(y+2)+2(y+2)-2=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$(x+2)\left(\frac{1}{x}+2\right)-2=x \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+2\right)=x+2 \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+1\right)=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3\right)'+\left(x^2\right)'-x'+1'=$	**2p**
	$=3x^2+2x-1+0=3x^2+2x-1,\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2-x}{x^3+x^2-x+1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**3p**
c)	$f'(x)=4$	**2p**
	$3x^2+2x-5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5}{3}$ sau $x=1$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^5+x^3+2x-x^3-2x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^5\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^6}{6}\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$	**3p**
b)	$\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3+1\right)dx=\int_{0}^{2}e^x(2x+1)dx=e^x(2x+1)\Big\vert_{0}^{2}-\int_{0}^{2}2e^x dx=$	**3p**
	$=5e^2-1-2\left(e^2-1\right)=3e^2+1$	**2p**
c)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x)=f(x),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=5x^4+3x^2+2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă pe $\mathbb{R}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}:0,5=1$	**3p**
	$1-\frac{1}{2}:0,5=1-1=0$	**2p**
2.	$x_1+x_2=8,\ x_1x_2=15$	**2p**
	$2\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2=2\cdot 8-15=1$	**3p**
3.	$5x+1=36$	**3p**
	$x=7$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 8 elemente, deci sunt 8 cazuri posibile	**1p**
	Numerele divizibile cu 2 din mulțimea A sunt 2, 4, 6 și 8, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	**2p**
5.	$AB=\sqrt{\left(0-6\right)^2+\left(8-0\right)^2}=$	**3p**
	$=10$	**2p**
6.	$\cos B=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AB}{3\sqrt{2}}$	**3p**
	$AB=3$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot\left(-2\right)=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=2A$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-2 & b\\ c+1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}a-2 & b\\ -2\left(a-2\right)+c+1 & -2b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$a=3,\ b=0,\ c=1$	**3p**
2.a)	$1\circ\left(-3\right)=1\cdot\left(-3\right)+3\cdot 1+3\cdot\left(-3\right)+6=$	**3p**
	$=-3+3+\left(-9\right)+6=-3$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+3x+3y+9-3=$	**2p**
	$=x\left(y+3\right)+3\left(y+3\right)-3=\left(x+3\right)\left(y+3\right)-3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**

c)	$(x+3)(x+3)-3\le x\Leftrightarrow (x+3)(x+2)\le 0$	**3p**
	$x\in[-3,-2]$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(2x^3\right)'-\left(3x^2\right)'+7'=$	**2p**
	$=6x^2-6x=6x(x-1),\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-11}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=$	**3p**
	$=6\cdot 2\cdot 1=12$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=1$	**2p**
	$x\in[0,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=6$, obținem $f(x)\ge 6$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-3x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2+3x-3x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}x^2dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_{-1}^{1}=\dfrac{2}{3}$	**3p**
b)	$\int\limits_{0}^{1}\left(f(x)-x^2\right)e^x dx=\int\limits_{0}^{1}\left(x^2+3x-x^2\right)e^x dx=3\int\limits_{0}^{1}xe^x dx=3\left(xe^x\Big\vert_{0}^{1}-\int\limits_{0}^{1}e^x dx\right)=$	**3p**
	$=3(x-1)e^x\Big\vert_{0}^{1}=3$	**2p**
c)	$g(x)=3(x+3)\Rightarrow V=\pi\int\limits_{1}^{2}g^2(x)dx=\pi\int\limits_{1}^{2}9(x+3)^2dx=9\pi\cdot\dfrac{(x+3)^3}{3}\Big\vert_{1}^{2}=$	**3p**
	$=183\pi$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$	**3p**
	$\frac{1}{12}:\frac{1}{12}=1$	**2p**
2.	$x_1+x_2=5$, $x_1x_2=6$	**2p**
	$4\left(x_1+x_2\right)-3x_1x_2=4\cdot 5-3\cdot 6=2$	**3p**
3.	$x-1=4$	**3p**
	$x=5$, care verifică ecuația	**2p**
4.	$p-10\%\cdot p=90$, unde p este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$p=100$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{\left(3-5\right)^2+\left(1-1\right)^2}=$	**3p**
	$=2$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-3\cdot 3=$	**3p**
	$=4-9=-5$	**2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2x+3 & 2+3x\\ 3x+2 & 3+2x\end{pmatrix}$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}2x+3 & 3x+2\\ 2+3x & 3+2x\end{pmatrix}=A\cdot B$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}2+x & 4\\ 4 & 2+x\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A-3\left(A+B\right)=I_2\Leftrightarrow\begin{pmatrix}13-3\left(2+x\right) & 12-12\\ 12-12 & 13-3\left(2+x\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**3p**
2.a)	$1*\left(-3\right)=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\left(-3\right)+1+\left(-3\right)=$	**3p**
	$=-1+1+\left(-3\right)=-3$	**2p**

b)	$x*y=\frac{1}{3}xy+x+y+3-3=\frac{1}{3}(xy+3x+3y+9)-3=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\left(x(y+3)+3(y+3)\right)-3=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$\frac{1}{3}(x+3)\left(\frac{1}{x}+3\right)-3=-3\Leftrightarrow(x+3)\left(\frac{1}{x}+3\right)=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=-\frac{1}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3=$	**3p**
	$=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)+3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^3}{x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to0}x^2=0$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
	$x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\le0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,1]$	**1p**
	$x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\ge0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**1p**
	Cum $f(1)=-2$, obținem $f(x)\ge-2$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**1p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-x-1\right)dx=\int_0^1\left(x^4+x+1-x-1\right)dx=\int_0^1x^4dx=$	**2p**
	$=\frac{x^5}{5}\Big\vert_0^1=\frac{1}{5}-0=\frac{1}{5}$	**3p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)-x^4-1\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_0^1\left(x^4+x+1\right)dx=\frac{x^5}{5}\Big\vert_0^1+\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1+x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+1=\frac{17}{10}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$	**3p**
	$\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{3}=1$	**2p**
2.	$f(1)=0\Rightarrow 1-a=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x+1=25$	**3p**
	$x=24$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	Multiplii de 30 din mulțimea M sunt 30, 60 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p**
5.	$x_M=5$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$y_M=5$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**3p**
	$\text{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot B+A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 4^y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x=1\\ 4^y=1\end{cases}$, deci $x=0$ și $y=0$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+1=$	**3p**
	$=1-2-2+1=-2$	**2p**

b)	Câtul este X^2-3X+1 Restul este 0	**3p** **2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=2$ $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=f(2)=-3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-3x^2+3=$ $=3(1-x^2)=3(1-x)(1+x),\ x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=$ $=f'(2)=-9$	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$ $x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,1]$ $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ Cum $f(1)=4$, obținem $f(x)\leq 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}(f(x)-2)dx=\int_{-1}^{1}(x+2-2)dx=\int_{-1}^{1}xdx=$ $=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^{1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$	**2p** **3p**
b)	$\int_{0}^{1}e^x f(x)dx=\int_{0}^{1}e^x(x+2)dx=e^x(x+2)\Big\vert_{0}^{1}-e^x\Big\vert_{0}^{1}=$ $=(3e-2)-(e-1)=2e-1$	**3p** **2p**
c)	$\int_{0}^{a}f(x)dx=\int_{0}^{a}(x+2)dx=\dfrac{a^2}{2}+2a$ $\int_{0}^{6-a}(f(x)-4)dx=\int_{0}^{6-a}(x-2)dx=\dfrac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)$ $\dfrac{a^2}{2}+2a=\dfrac{(6-a)^2}{2}-2(6-a)\Leftrightarrow a=1$	**2p** **2p** **1p**

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=1$	**2p**
2.	$f(-1)=0$	**2p**
	$f(1)=0\Rightarrow f(-1)+f(1)=0$	**3p**
3.	$3x+4=16$	**3p**
	$x=4$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	Multiplii de 3 din mulțimea A sunt 3, 6 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{10}$	**2p**
5.	$AO=5$	**2p**
	$BO=5\Rightarrow \Delta AOB$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{4\cdot 3}{2}=$	**3p**
	$=6$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 1=$	**3p**
	$=1-2=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A-2A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+5\cdot 1^2-4=$	**3p**
	$=1+5-4=2$	**2p**
b)	Câtul este X^2+4X-4	**3p**
	Restul este 0	**2p**

c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=0$, $x_1x_2x_3=4$	**2p**
	$x_1+x_2+x_3=-5\Rightarrow\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_3}=\frac{-5-x_1}{x_1}+\frac{-5-x_2}{x_2}+\frac{-5-x_3}{x_3}=-5\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)-3=$	**3p**
	$=-5\cdot\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}-3=-5\cdot 0-3=-3$	

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(3x)'-\left(x^3\right)'=$	**2p**
	$=3-3x^2=3\left(1-x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{3x-x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(3x-x^3\right)'}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3-3x^2}=0$	**2p**
c)	$f(1)=2$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)+x^2-x+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x^2+x-1+x^2-x+1\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)'=\frac{4x^3}{4}-\frac{3x^2}{3}+\frac{2x}{2}-1=$	**3p**
	$=x^3-x^2+x-1=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$g(x)=x-1\Rightarrow V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2(x-1)^2dx=\pi\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{\pi}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$	**3p**
	$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x_1=1$ și $x_2=2$	**2p**
3.	$2x-1=5^2$	**3p**
	$x=13$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 4 divizori ai lui 1000, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{9}$	**2p**
5.	$AO=3$, $BO=4$, $AB=5$	**3p**
	$P_{\Delta AOB}=3+4+5=12$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-1\cdot 0-1\cdot 0=0$	**3p**
b)	$A+I_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot(A+I_2)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**3p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1+m & -1\\ 0 & m\end{pmatrix}$, $\det B=m(m+1)$	**3p**
	$\det B=0\Leftrightarrow m=-1$ sau $m=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3+(-1)^2+4\cdot(-1)+4=$	**3p**
	$=-1+1-4+4=0$	**2p**
b)	Câtul este $X-2$	**3p**
	Restul este $8X+8$	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=4$, $x_1x_2x_3=-4$	**3p**
	$\dfrac{\left(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2\right)+\left(x_3+x_1+x_2\right)}{x_1x_2x_3}=\dfrac{4+(-1)}{-4}=-\dfrac{3}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-12=$	**3p**
	$=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(2)=-16$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=-16$	**3p**
c)	$f'(-2)=0$, $f'(2)=0$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-2,2]$	**3p**
	$f(2)\le f(x)\le f(-2)\Rightarrow -16\le f(x)\le 16$, pentru orice $x\in[-2,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-3x^2-1\right)dx=\int_0^1 5x^4\,dx=x^5\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_1^2\lvert f(x)\rvert dx=\int_1^2\left(5x^4+3x^2+1\right)dx=\left(x^5+x^3+x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\left(2^5+2^3+2\right)-\left(1^5+1^3+1\right)=39$	**2p**
c)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)=5x^4+3x^2+1>0$ pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 01

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{4}:0,25=0$.

5p **2.** Calculați $f(-1)\cdot f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x-3}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 100 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(5,4)$. Calculați distanța de la punctul A la punctul B.

5p **6**. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că $AC=6$ și $B=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & -1\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=-4$.

5p **b)** Arătați că $\det(A-2B)=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, pentru care $A\cdot B=B\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ(-2)=-2$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x\circ\frac{1}{x}=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2-x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3x^2+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=3$.

5p **c)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y=4x+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3+1\right)dx=3e^2+1$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $\mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1-\frac{1}{2}:0,5=0$.

5p **2.** Arătați că $2\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-8x+15=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{5x+1}=6$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(0,8)$. Calculați lungimea segmentului AB.

5p **6**. Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC, dreptunghic în A, știind că $BC=3\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B)=45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=2A$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a, b și c, pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}a-2 & b\\ c+1 & 1\end{pmatrix}=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+3x+3y+6$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ(-3)=-3$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $x\circ x\le x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+7$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-11}{x-2}=12$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\ge 6$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-3x\right)dx=\dfrac{2}{3}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^2\right)e^x dx=3$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{3f(x)}{x}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right):\frac{1}{12}=1$.

5p **2.** Arătați că $4\left(x_1+x_2\right)-3x_1x_2=2$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+6=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, prețul unui obiect este 90 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,1)$ și $B(3,1)$. Calculați lungimea segmentului AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{4}{5}$, arătați că $\sin x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B=B\cdot A$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $A\cdot A-3(A+B)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}xy+x+y$.

5p **a)** Arătaţi că $1*(-3)=-3$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x*\frac{1}{x}=-3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+3x}{x}=0$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq -2$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-x-1\right)dx=\frac{1}{5}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e\left(f(x)-x^4-1\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{10}{3}=1$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+1}=5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ şi $B(7,5)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg}x=\frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $B\cdot B+A=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y, pentru care $A+B=\begin{pmatrix}2^x & 0\\ 0 & 4^y\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+1$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=-2$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X+1$.

5p **c)** Demonstrați că $(x_2+x_3)(x_3+x_1)(x_1+x_2)=-3$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3+3x+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-9$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x)-2)\,dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_{0}^{1}e^x f(x)\,dx=2e-1$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, știind că $\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{6-a}(f(x)-4)\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{3}{4}\right):\frac{1}{4}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $f(-1)+f(1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+4}=4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,5)$ și $B(5,0)$. Arătați că triunghiul AOB este isoscel.

5p **6**. Calculați aria triunghiului ABC, dreptunghic în A cu $AB=4$ și $AC=3$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A-2A=I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $A\cdot B=I_2$, unde $B=\begin{pmatrix}-1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+5X^2-4$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=2$.

5p **b)** Determinaţi câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{x_2+x_3}{x_1}+\frac{x_3+x_1}{x_2}+\frac{x_1+x_2}{x_3}=-3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-x^3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3\left(1-x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=0$.

5p **c)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x^2+x-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)+x^2-x+1\right)dx=0$.

5p **b)** Arătaţi că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x^2+1}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$.

5p **2.** Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x-1)=2$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie divizor al lui 1000.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,3)$ şi $B(4,0)$. Calculaţi perimetrul triunghiului AOB.

5p **6.** Arătaţi că $\sin x=\frac{3}{5}$, ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

5p **b)** Verificaţi dacă $A\cdot(A+I_2)=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale m pentru care $\det B=0$, unde $B=A\cdot A+mI_2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+4X+4$.

5p **a)** Arătaţi că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul X^2+3X+2.

5p **c)** Demonstraţi că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2x_3}+\frac{1}{x_3x_1}=-\frac{3}{4}$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că $-16\le f(x)\le 16$, pentru orice $x\in[-2,2]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x^4+3x^2+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2-1\right)dx=1$.

5p **b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=2$.

5p **c)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$	**3p**
	$\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}=2$	**2p**
2.	$x_1+x_2=4,\ x_1x_2=3$	**2p**
	$\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=\frac{4-1}{3}=1$	**3p**
3.	$2^{x+1}=2^3\Leftrightarrow x+1=3$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Multiplii de 4 din mulțimea A sunt 4 și 8, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{9}$	**1p**
5.	$AB=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=5,\ AO=3,\ BO=4$	**3p**
	$P_{\Delta AOB}=AB+AO+BO=5+3+4=12$	**2p**
6.	$\sin 150^\circ=\frac{1}{2},\ \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\sin^2 150^\circ+\sin^2 60^\circ=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 2=$	**3p**
	$=9-4=5$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}2 & a+1\\ a+1 & a^2+1\end{pmatrix}$	**2p**
	$2B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2a\end{pmatrix}$, deci $B\cdot B=2B\Leftrightarrow a=1$	**3p**
c)	$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3+2a\\ 5 & 2+3a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 5\\ 3+2a & 2+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2a-2\\ 2-2a & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det(A\cdot B-B\cdot A)=\begin{vmatrix}0 & 2a-2\\ 2-2a & 0\end{vmatrix}=(2a-2)^2\geq 0$, pentru orice număr real a	**2p**

2.a)	$1\circ 3=1\cdot 3-3\cdot 1-3\cdot 3+12=$ $=3-3-9+12=3$	**3p** **2p**
b)	$x\circ y=xy-3x-3y+9+3=$ $=x(y-3)-3(y-3)+3=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
c)	$x\circ x=(x-3)^2+3$, $(x\circ x)\circ x=(x-3)^3+3$ $(x-3)^3+3=3\Leftrightarrow x=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3\right)'+(6x)'+(2)'=$ $=3x^2+6=3\left(x^2+2\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\left(x^2+2\right)}{x+2}=$ $=\dfrac{3\left(0^2+2\right)}{0+2}=3$	**2p** **3p**
c)	$x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)>0$, deci f este crescătoare pe $[-1,1]$ Cum $f(-1)=-5$ și $f(1)=9$, obținem $-5\le f(x)\le 9$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)+x\right)dx=\int_0^1\left(4x^3-x+x\right)dx=\int_0^1 4x^3dx=$ $=x^4\Big\vert_0^1=1$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1\left(4x^3-f(x)\right)e^x dx=\int_0^1\left(4x^3-4x^3+x\right)e^x dx=\int_0^1 xe^x dx=$ $=(x-1)e^x\Big\vert_0^1=1$	**2p** **3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_1^3\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_1^3\left(4x^3-x\right)dx=\left(x^4-\dfrac{x^2}{2}\right)\Big\vert_1^3=$ $=81-\dfrac{9}{2}-1+\dfrac{1}{2}=76$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**3p**
	$\frac{7}{3}:\frac{7}{6}=\frac{7}{3}\cdot\frac{6}{7}=2$	**2p**
2.	$x_1+x_2=5$, $x_1x_2=4$	**2p**
	$(x_1+x_2)^2-6x_1x_2=25-24=1$	**3p**
3.	$3x-5=4$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	$p-25\%\cdot p=600$, unde p este preţul televizorului înainte de ieftinire	**3p**
	$p=800$ de lei	**2p**
5.	$OM=\sqrt{(8-0)^2+(6-0)^2}=$	**3p**
	$=10$	**2p**
6.	$\sin 135^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sin^2 135^\circ+\sin^2 45^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-0\cdot 2=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
	$B-A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow (A+B)(B-A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -8-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$\det A\neq 0$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=A^{-1}\cdot B\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$1*2=1+2-3=$	**3p**
	$=3-3=0$	**2p**

b)	$x^2+x-3=-1\Leftrightarrow x^2+x-2=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=1$	**2p**
c)	$n*n*n*n=4n-9$	**2p**
	$4n-9<3\Rightarrow n<3$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3\right)'+\left(2x^2\right)'+(x)'=$	**2p**
	$=3x^2+4x+1=(x+1)(3x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x\,f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+2x^2+x}{x(x+1)(3x+1)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(3+\dfrac{1}{x}\right)}=\dfrac{1}{3}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=-\dfrac{1}{3}$	**1p**
	$x\in\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci funcția f este descrescătoare pe $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right]$ și $x\in\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)\Rightarrow f'(x)\ge 0$, deci funcția f este crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$	**2p**
	$f(x)\ge f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)$ și, cum $f\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}$, obținem $f(x)\ge-\dfrac{4}{27}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-x^2-1\right)dx=\int_0^1\left(x^2+x+1-x^2-1\right)dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2+x+2017\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2+\dfrac{1}{2}\cdot 2x+1=$	**3p**
	$=x^2+x+1=f(x),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^2\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^2\left(x^2+x+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^2=\dfrac{20}{3}$	**3p**
	Cum n este număr natural, din $n^2-\dfrac{7}{3}=\dfrac{20}{3}$, obținem $n=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$\frac{3}{2}:\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}=3$	**3p**
2.	$f(-1)=2$	**2p**
	$f(1)=2\Rightarrow f(-1)\cdot f(1)=4$	**3p**
3.	$2x+2=2$	**3p**
	$x=0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Multiplii de 2 din mulțimea A sunt 22, 44, 66 și 88, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{4}{9}$	**1p**
5.	$AO=\sqrt{5}$	**2p**
	$BO=\sqrt{5}\Rightarrow AO=BO$	**3p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-3\cdot 3=$	**3p**
	$=1-9=-8$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 10\end{pmatrix}$, $2A=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A-2A=\begin{pmatrix}10 & 6\\ 6 & 10\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 6\\ 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}=8\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=8I_2$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}6 & 2+3x\\ 2 & 6+x\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2+3x & 6+x\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 3x\\ -3x & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A\cdot B-B\cdot A)=\begin{vmatrix}0 & 3x\\ -3x & 0\end{vmatrix}=9x^2\geq 0$, pentru orice număr real x	**3p**

2.a)	$f(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-1-2=$	**3p**
	$=2+3-1-2=2$	**2p**
b)	Câtul este $2X^2+X-2$	**3p**
	Restul este 0	**2p**
c)	$f=(X+1)\left(2X^2+X-2\right)$	**2p**
	$x_1=-1$, $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$ și $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ sunt rădăcinile polinomului f	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-4x=$	**3p**
	$=4x\left(x^2-1\right)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{f(x)-x^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{-2x^2+12}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{-2+\frac{12}{x^2}}=-\dfrac{1}{2}$	**3p**
c)	$f(1)=11$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=11$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-2x+4\right)dx=\int_1^2\left(3x^2+2x-4-2x+4\right)dx=\int_1^2 3x^2dx=$	**2p**
	$=x^3\Big\vert_1^2=8-1=7$	**3p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^3+x^2-4x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=2017\Rightarrow c=2019$, deci $F(x)=x^3+x^2-4x+2019$	**2p**
c)	$\int_1^a f(x)dx=\left(x^3+x^2-4x\right)\Big\vert_1^a=a^3+a^2-4a+2$	**3p**
	$a^3+a^2-4a+2=a^3-2\Leftrightarrow(a-2)^2=0$, deci $a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4-\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$	**3p**
	$\frac{15}{4}\cdot\frac{8}{15}=2$	**2p**
2.	$f(1)=5\Leftrightarrow 1+m=5$	**3p**
	$m=4$	**2p**
3.	$x^2+x+1=1\Leftrightarrow x^2+x=0$	**2p**
	$x=-1$ sau $x=0$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	Numerele din mulțimea A care verifică egalitatea dată sunt 2 și 4, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{9}$	**2p**
5.	$MN=4$, $NP=3$, $MP=5$	**3p**
	$P_{\Delta MNP}=4+3+5=12$	**2p**
6.	$\sin 120^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\sin^2 120^\circ-\cos^2 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & -4\end{vmatrix}=1\cdot(-4)-3\cdot 3=$	**3p**
	$=-4-9=-13$	**2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 8\\ -2 & -2\end{pmatrix}$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 8 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 8\end{pmatrix}$, $B\cdot B-xI_2=\begin{pmatrix}8-x & 8\\ 8 & 8-x\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B\cdot B-xI_2)=\begin{vmatrix}8-x & 8\\ 8 & 8-x\end{vmatrix}=x^2-16x$	**3p**
	$x^2-16x=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=16$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+3\cdot 1^2-1-3=$	**3p**
	$=1+3-1-3=0$	**2p**
b)	Câtul este X^2+5X+9	**3p**
	Restul este 15	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-3,\ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-1$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)=9-2\cdot(-1)=11$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-6=$	**3p**
	$=6(x^2-1)=6(x-1)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=$	**2p**
	$=f'(1)=0$	**3p**
c)	$x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,1]$	**2p**
	Cum $f(-1)=8$ și $f(1)=0$, obținem $0\le f(x)\le 8$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 (f(x)-5x)\,dx=\int_0^1 (x^2+5x-5x)\,dx=\int_0^1 x^2\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{3}-0=\dfrac{1}{3}$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^2+2017\right)'=\dfrac{1}{3}\cdot 3x^2+\dfrac{5}{2}\cdot 2x=$	**3p**
	$=x^2+5x=f(x),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$g(x)=x+5\Rightarrow V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,dx=\pi\int_1^2 (x^2+10x+25)\,dx=$	**3p**
	$=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}+5x^2+25x\right)\Big\vert_1^2=\dfrac{127\pi}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}=2$.

5p **2.** Arătați că $\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-4x+3=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+1}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie multiplu de 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului OAB.

5p **6.** Arătați că $\sin^2 150^\circ+\sin^2 60^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=5$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $B\cdot B=2B$.

5p **c)** Arătați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ 3=3$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x\circ x)\circ x=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3\left(x^2+2\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2}=3$.

5p **c)** Demonstrați că $-5\leq f(x)\leq 9$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)+x\right)dx=1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(4x^3-f(x)\right)e^x dx=1$.

5p **c)** Determinaţi aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=3$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2+\frac{1}{3}\right):\frac{7}{6}=2$.

5p **2.** Arătați că $\left(x_1+x_2\right)^2-6x_1x_2=1$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-5x+4=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x-5}=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 25%, prețul unui televizor este 600 de lei. Determinați prețul televizorului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $M(8,6)$. Calculaţi distanța dintre punctele O și M.

5p **6**. Arătați că $\sin^2 135^\circ+\sin^2 45^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $(A+B)(B-A)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -12\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A\cdot X=B$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-3$.

5p **a)** Arătaţi că $1*2=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x^2\right)*x=-1$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n*n*n*n<3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x^2+x$**.**

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x+1)(3x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\,f'(x)}=\frac{1}{3}$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq-\frac{4}{27}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x^2-1\right)dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+2017$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi numărul natural n, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ și $x=2$ are aria egală cu $n^2-\frac{7}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{2}=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$. Calculați $f(-1)\cdot f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x+2}=9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{11,22,33,44,55,66,77,88,99\}$, acesta să fie multiplu de 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,-1)$. Arătați că $AO=OB$.

5p **6.** Arătați că $\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-8$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A-2A=8I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3+3X^2-X-2$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=2$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X+1$.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+12$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{f(x)-x^4}=-\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+2x-4$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-2x+4\right)dx=7$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=2017$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^a f(x)\,dx=a^3-2$.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(4-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{8}{15}=2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+x+1}=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice egalitatea $(n-2)(n-4)=0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,3)$, $N(4,3)$ și $P(4,0)$. Calculați perimetrul triunghiului MNP.

5p **6.** Arătați că $\sin^2 120^\circ-\cos^2 30^\circ=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & -4\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-13$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 10\\ -10 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(B\cdot B-xI_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-X-3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X-2$.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+4$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$.

5p **c)** Demonstrați că $0\le f(x)\le 8$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-5x\right)dx=\frac{1}{3}$.

5p **b)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+2017$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ este egal cu $\frac{127\pi}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$30\cdot\left(\frac{1}{3}-0,3\right)=30\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{10}\right)=30\cdot\frac{10-9}{30}=$	**3p**
	$=30\cdot\frac{1}{30}=1$	**2p**
2.	$x_1x_2=a$	**3p**
	$a-1<0\Leftrightarrow a\in(-\infty,1)$	**2p**
3.	$3^{x+1}=3^{2x}\Leftrightarrow x+1=2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**1p**
	Sunt 9 numere naturale de două cifre care au cifra unităților egală cu 3, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**2p**
5.	$AO=\sqrt{2}$, $OB=4\sqrt{2}$	**2p**
	$AB=5\sqrt{2}\Rightarrow AB=AO+OB$, deci punctele A, O și B sunt coliniare	**3p**
6.	$\sin^2x+2\sin x\cos x+\cos^2x-2\sin x\cos x=$	**3p**
	$=\sin^2x+\cos^2x=1$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{vmatrix}=1\cdot6-2\cdot(-5)=$	**3p**
	$=6+10=16$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$	**3p**
	$a=16$	**2p**
c)	$\det\left(xA+\frac{1}{x}B\right)=\begin{vmatrix}x+\frac{6}{x} & -5x+\frac{5}{x}\\ 2x-\frac{2}{x} & 6x+\frac{1}{x}\end{vmatrix}=16x^2+\frac{16}{x^2}+17$	**3p**
	$16x^2+\frac{16}{x^2}+17\geq49\Leftrightarrow16x^2+\frac{16}{x^2}-32\geq0\Leftrightarrow16\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\geq0$, relație adevărată pentru orice număr real nenul x	**2p**

2.a)	$(-2)\circ(-2)=5\cdot(-2)\cdot(-2)+15\left(-2+(-2)\right)+42=$	**3p**
	$=20-60+42=2$	**2p**
b)	$x\circ y=5xy+15x+15y+45-3=$	**2p**
	$=5x(y+3)+15(y+3)-3=5(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$(x-3)\circ(x-3)=5x^2-3$, $(x-3)\circ(x-3)\circ(x-3)=25x^3-3$	**2p**
	$25x^3-3=197\Leftrightarrow x=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot e^x+(x-2)e^x=$	**3p**
	$=e^x(1+x-2)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{e^{-x}}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,2]$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(1)=-e$ și $f(2)=0$, deci $-e\le f(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$	**3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-1\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}3x^2dx=x^3\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=1-(-1)=2$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=3x^2+1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\int\limits_{1}^{e}f(x)\ln x\,dx=\int\limits_{1}^{e}\left(3x^2+1\right)\ln x\,dx=\left(x^3+x\right)\ln x\Big\vert_{1}^{e}-\int\limits_{1}^{e}\left(x^3+x\right)\cdot\dfrac{1}{x}dx=e^3+e-\int\limits_{1}^{e}\left(x^2+1\right)dx=$	**3p**
	$=e^3+e-\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_{1}^{e}=e^3+e-\left(\dfrac{e^3}{3}+e\right)+\left(\dfrac{1^3}{3}+1\right)=\dfrac{2e^3+4}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=2\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{6}-\sqrt{12}=$	**3p**
	$=2\sqrt{3}-2\sqrt{3}=0$	**2p**
2.	$f(a)=a^2-2$	**2p**
	$a^2-2=a$, deci $a=-1$ sau $a=2$	**3p**
3.	$2^{7x-5}=2^{2x}\Leftrightarrow 7x-5=2x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea A sunt 4 numere care verifică relația dată, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{5}$	**2p**
5.	$Q(5,2)$	**2p**
	$MQ=\sqrt{(5-1)^2+(2-2)^2}=4$	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ$, $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ$	**2p**
	$\sin 30^\circ+\sin 45^\circ-\cos 60^\circ-\cos 45^\circ=\sin 30^\circ+\sin 45^\circ-\sin 30^\circ-\sin 45^\circ=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=4+1=5$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}x & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}xy-1 & x+2\\ -y-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=-2$, $y=-2$	**2p**
c)	$A(p)\cdot A(p)+I_2=\begin{pmatrix}p^2 & p+2\\ -p-2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(p)\cdot A(p)+I_2\right)=5p^2+4p+4$	**2p**
	$5p^2+4p+4=5\Leftrightarrow 5p^2+4p-1=0$ și, cum p este număr întreg, obținem $p=-1$	**3p**
2.a)	$2*2=2\cdot 2-(2+2)+2=$	**3p**
	$=4-4+2=2$	**2p**
b)	$x*y=xy-x-y+1+1=$	**2p**
	$=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$1*x=x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$1*2*3*\ldots*2018=1*(2*3*\ldots*2018)=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+1)\left(x^2+2x+2\right)-\left(x^2+x+1\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+2x}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\dfrac{x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(-1)=1$, $f'(-1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$, adică $y=-x$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-2]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-2,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-2,0]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$, $f(-2)=\dfrac{3}{2}$, $f(0)=\dfrac{1}{2}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, deci $\dfrac{1}{2}\leq f(x)\leq\dfrac{3}{2}$ și $\dfrac{1}{2}\leq f(y)\leq\dfrac{3}{2}$, de unde obținem $1\leq f(x)+f(y)\leq 3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)dx=\int_0^1\left(-6x^2+12x+5\right)dx=\left(-2x^3+6x^2+5x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=-2+6+5-0=9$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $F''(x)=3x^2-12x+12$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F''(x)=3(x-2)^2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci funcția F este convexă pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$f'(x)=3(x-2)^2\Rightarrow\int_2^4\dfrac{3}{f'(x)+12}dx=\int_2^4\dfrac{1}{(x-2)^2+4}dx=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x-2}{2}\Big\vert_2^4=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=\dfrac{\pi}{8}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+0,5)=\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{5}{10}\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$	**2p**
2.	$3x-5=1-3x$	**3p**
	$x=1$	**2p**
3.	$x+5=9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	$x-\frac{30}{100}\cdot x=700$, unde x este preţul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=1000$ de lei	**2p**
5.	Triunghiul AOB este dreptunghic în O, $AB=10$	**2p**
	Lungimea medianei din O este egală cu $\frac{AB}{2}=\frac{10}{2}=5$	**3p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**
	$\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ-(\sin 30^\circ+\cos 60^\circ)=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2}-1=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-1)\cdot 3=$	**3p**
	$=2+3=5$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3 & 3+x\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=-3$	**3p**
	$A\cdot B(-3)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=5I_2$	**2p**
c)	$B(x)\cdot B(x)-I_2=\begin{pmatrix}4+x & 3x\\ 3 & x+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+x & 3x\\ 3 & x\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix}3+x & 3x\\ 3 & x\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x^2-6x=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=6$	**3p**
2.a)	$10\circ 8=10\cdot 8-9(10+8)+90=$	**3p**
	$=80-162+90=8$	**2p**
b)	$x\circ y=xy-9x-9y+81+9=$	**2p**
	$=x(y-9)-9(y-9)+9=(x-9)(y-9)+9$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**

c)	$(n-9)^2+9\le 10 \Leftrightarrow (n-10)(n-8)\le 0$	**2p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=8$, $n=9$ sau $n=10$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot\left(x^2+3\right)-(x-1)\cdot 2x}{\left(x^2+3\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x^2+2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}=\dfrac{(3-x)(x+1)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{x\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,3]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,3]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[3,+\infty)$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{2}$, $f(3)=\dfrac{1}{6}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, deci $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{6}$ și $-\dfrac{1}{2}\le f(y)\le\dfrac{1}{6}$, de unde obținem $-1\le f(x)+f(y)\le\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-\dfrac{1}{e^x}\right)dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=0$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a lui $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $F''(x)=-\dfrac{1}{e^x}+1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția F este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$\int_{0}^{1}e^x f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\left(1+xe^x\right)dx=\left(x+(x-1)e^x\right)\Big\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=1+0-0-(-1)\cdot e^0=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=\frac{4-1}{2}\cdot\frac{9-1}{3}\cdot\frac{16-1}{4}\cdot\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{1}{5}=3$	**2p**
2.	$a^2+2+(a+1)^2+2=5\Leftrightarrow 2a^2+2a=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=0$	**2p**
3.	$5^{2x-4}=5^2\Leftrightarrow 2x-4=2$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea M are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**1p**
	În mulțimea M sunt 5 numere divizibile cu 10, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{9}$	**2p**
5.	$M(4,3)$	**2p**
	$OM=5$	**3p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**
	$2\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}5 & 1\\ 4 & 8\end{vmatrix}=5\cdot 8-4\cdot 1=$	**3p**
	$=40-4=36$	**2p**
b)	$\det(M(a))=\begin{vmatrix}a-2 & 1\\ 4 & a+1\end{vmatrix}=a^2-a-6$	**2p**
	$M(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(M(a))\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-2,3\}$	**3p**
c)	$\begin{pmatrix}xy-2x-2y+8 & x+y-1\\ 4x+4y-4 & xy+x+y+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 8\end{pmatrix}\Leftrightarrow xy=1$ și $x+y=2$	**3p**
	$x=1$, $y=1$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+m\cdot 1-6=$	**3p**
	$=1+m-6=m-5$, pentru orice număr real m	**2p**

b)	$x_1+x_2+x_3=0,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m \Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2m$	**3p**
	$-2m=4 \Leftrightarrow m=-2$	**2p**
c)	$X^3-7X-6=X^3+(p+1)X^2+(p+q)X+q$	**3p**
	$p=-1,\ q=-6$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3\cdot 2x=$	**3p**
	$=3x^2-6x=3x(x-2),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=1,\ f'(1)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-3x+4$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[0,2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,2]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\ge f(2)$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$ și $f(2)=-1$, deci $f(x)\ge -1$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2-x\right)dx=\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-1-\frac{1}{2}\right)=2$	**2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(3x^2-x\right)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(2+\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)=2$ și $f(1)=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x=1$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,1)$ și pe $(1,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\left(3x^2-x\right)dx+\int_{1}^{2}\left(2+\frac{1}{x}\cdot\ln x\right)dx=\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_{0}^{1}+2x\Big\vert_{1}^{2}+\frac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_{1}^{2}=\frac{5+\ln^2 2}{2}$	**3p**
	$\frac{5+\ln^2 2}{2}=\frac{n^2-4+\ln^2 2}{2}\Leftrightarrow n^2-9=0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=3$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$n=\sqrt{16}+\sqrt{8}-2\sqrt{2}=$	**2p**
	$=4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4=2^2$	**3p**
2.	$f(a)=a^2-a+2$, $g(a)=a+1$	**2p**
	$a^2-a+2=a+1\Leftrightarrow a^2-2a+1=0\Leftrightarrow a=1$	**3p**
3.	$2x^2-6x+5=x^2-2x+1\Rightarrow x^2-4x+4=0$	**3p**
	$x=2$ care convine	**2p**
4.	Prima cifră se poate alege în 5 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primei cifre, a doua cifră se poate alege în câte 4 moduri	**1p**
	Pentru fiecare alegere a primelor două cifre, a treia cifră se poate alege în câte 3 moduri, deci se pot forma $5\cdot4\cdot3=60$ de numere	**3p**
5.	$m_{AB}=-1$, deci panta dreptei d este $m_d=-1$	**2p**
	Mijlocul segmentului OA este punctul $M\left(1,\frac{1}{2}\right)$, deci ecuația dreptei d este $y=-x+\frac{3}{2}$	**3p**
6.	$(\sin x+7\cos x)^2=\sin^2 x+14\sin x\cos x+49\cos^2 x$	**2p**
	$(7\sin x-\cos x)^2=49\sin^2 x-14\sin x\cos x+\cos^2 x\Rightarrow(\sin x+7\cos x)^2+(7\sin x-\cos x)^2=$ $=50\sin^2 x+50\cos^2 x=50(\sin^2 x+\cos^2 x)=50$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}1&2\\m&m+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-m&-m+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\0&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real m	**2p**
c)	$A(2)=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$, $\det(A(2))=-1\Rightarrow(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(A(2))^{-1}\cdot A(5)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3&2\\2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\5&6\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}7&6\\-3&-2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$	**2p**
	$=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**

b)	$x\circ\left(-\frac{2}{3}\right)=3\left(x+1\right)\left(-\frac{2}{3}+1\right)-1=3\left(x+1\right)\cdot\frac{1}{3}-1=$	**3p**
	$=x+1-1=x$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$3\left(n+1\right)n-1<17\Leftrightarrow n^2+n-6<0$	**3p**
	$n\in\left(-3,2\right)$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$, $n=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'\left(x\right)=\frac{\left(2x+6\right)\left(x-2\right)-\left(x^2+6x\right)\cdot1}{\left(x-2\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^2-4x-12}{\left(x-2\right)^2}=\frac{\left(x-6\right)\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)^2}$, $x\in\left(2,+\infty\right)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x}{x\left(x-2\right)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f\left(x\right)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x-x^2+2x}{x-2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{8x}{x-2}=8$, deci dreapta de ecuație $y=x+8$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''\left(x\right)=\frac{32}{\left(x-2\right)^3}$, $x\in\left(2,+\infty\right)$	**3p**
	$f''\left(x\right)>0$, pentru orice $x\in\left(2,+\infty\right)\Rightarrow f$ nu are puncte de inflexiune	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(e^x+1\right)f\left(x\right)dx=\int_0^1\left(e^x+1\right)\cdot\frac{1}{e^x+1}dx=\int_0^1 1\,dx=x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$\int_0^1\frac{x}{f\left(x\right)}dx=\int_0^1 x\left(e^x+1\right)dx=\int_0^1 xe^x\,dx+\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\left(x-1\right)e^x\Big\vert_0^1+\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**3p**
c)	$g\left(x\right)=\sqrt{\frac{e^x}{e^x+1}}\Rightarrow V=\pi\int_0^1 g^2\left(x\right)dx=\pi\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=$	**2p**
	$=\pi\ln\left(e^x+1\right)\Big\vert_0^1=\pi\ln\frac{e+1}{2}$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $30\cdot\left(\frac{1}{3}-0,3\right)=1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-x+a=0$, unde a este număr real. Determinați valorile reale ale lui a pentru care $x_1x_2-1<0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}=9^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra unităților egală cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-1)$ și $B(4,4)$. Demonstraţi că punctele A, O și B sunt coliniare.

5p **6**. Demonstraţi că $(\sin x+\cos x)^2-\sin 2x=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -5\\ 2 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5\\ -2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=16$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $A\cdot B=aI_2$.

5p **c)** Demonstrați că $\det\left(xA+\frac{1}{x}B\right)\geq 49$, pentru orice număr real nenul x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy+15(x+y)+42$.

5p **a)** Arătaţi că $(-2)\circ(-2)=2$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x-3)\circ(x-3)\circ(x-3)=197$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

5p **c)** Demonstrați că $-e\leq f(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+1$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}(f(x)-1)dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Calculați $\int_{1}^{e}f(x)\ln x\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2$. Determinaţi numerele reale a, știind că $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{7x-5}=4^x$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice relaţia $2^n\le 16$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,2)$, $N(4,3)$ şi $P(6,1)$. Determinaţi lungimea segmentului MQ, unde Q este mijlocul segmentului NP.

5p **6**. Arătați că $\sin 30^\circ+\sin 45^\circ-\cos 60^\circ-\cos 45^\circ=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(x)=\begin{pmatrix}x&1\\-1&2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(x)\cdot A(y)=3I_2$.

5p **c)** Determinați numărul întreg p pentru care $\det(A(p)\cdot A(p)+I_2)=5$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-(x+y)+2$.

5p **a)** Arătaţi că $2*2=2$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\ldots*2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $1\le f(x)+f(y)\le 3$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+12x+5$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-x^3\right)dx=9$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este o funcție convexă pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătați că $\int_2^4\dfrac{3}{f'(x)+12}dx=\dfrac{\pi}{8}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{2}\right)(1+0,5)=\frac{3}{4}$.

5p **2.** Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-3x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+5)=\log_3 9$.

5p **4.** După o ieftinire cu 30%, prețul unui obiect este 700 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$ și $B(8,0)$. Determinați lungimea medianei din vârful O în triunghiul AOB.

5p **6.** Arătați că $\sqrt{2}\cdot\sin 45^\circ-(\sin 30^\circ+\cos 60^\circ)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2 & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=5$.

5p **b)** Arătați că, dacă $A+B(x)=3I_2$, atunci $A\cdot B(x)=5I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B(x)\cdot B(x)-I_2\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-9(x+y)+90$.

5p **a)** Arătați că $10\circ 8=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x-9)(y-9)+9$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n\le 10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(3-x)(x+1)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-1\le f(x)+f(y)\le\frac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{e^x}+x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-\frac{1}{e^x}\right)dx=0$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$.

5p **c)** Calculați $\int_0^1 e^x f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{5}=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)+f(a+1)=5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x-4}=25$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,15,20,25,30,35,40,45,50\}$, acesta să fie un număr divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,1)$ și $B(2,5)$. Calculați lungimea segmentului OM, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $2\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ-\sin^2 45^\circ-\cos^2 60^\circ=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 8\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}a-2 & 1\\ 4 & a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=36$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea $M(a)$ este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $M(x)\cdot M(y)=A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX-6$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)=m-5$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=-7$, determinați numerele reale p și q, pentru care $f=(X+1)\left(X^2+pX+q\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3x(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq -1$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-x, & x\in(-\infty,1]\\ 2+\frac{1}{x}\cdot\ln x, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\frac{n^2-4+\ln^2 2}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $n=\sqrt{8}\left(\sqrt{2}+1\right)-2\sqrt{2}$ este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-x+2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=x+1$. Determinaţi numărul real a pentru care $f\left(a\right)=g\left(a\right)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2-6x+5}=x-1$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulţimii $\left\{1,\,2,\,3,\,4,\,5\right\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(2,1\right)$ şi $B\left(3,0\right)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin mijlocul segmentului AO şi este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Arătaţi că $\left(\sin x+7\cos x\right)^2+\left(7\sin x-\cos x\right)^2=50$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A\left(m\right)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & m+1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det\left(A\left(0\right)\right)=1$.

5p **b)** Demonstraţi că $A\left(m\right)+A\left(-m\right)=2A\left(0\right)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2\left(\mathbb{R}\right)$ pentru care $A\left(2\right)\cdot X=A\left(5\right)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ y=3\left(x+1\right)\left(y+1\right)-1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ\left(-\frac{2}{3}\right)=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ\left(n-1\right)<17$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\left(2,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\frac{x^2+6x}{x-2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'\left(x\right)=\frac{\left(x-6\right)\left(x+2\right)}{\left(x-2\right)^2}$, $x\in\left(2,+\infty\right)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f **nu** are puncte de inflexiune.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\frac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1\left(e^x+1\right)f\left(x\right)dx=1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\frac{x}{f\left(x\right)}dx=\frac{3}{2}$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=\sqrt{e^xf\left(x\right)}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$6\sqrt{3}+2\left(1-\sqrt{27}\right)=6\sqrt{3}+2\left(1-3\sqrt{3}\right)=$	**3p**
	$=6\sqrt{3}+2-6\sqrt{3}=2$	**2p**
2.	$f(2)=0$	**3p**
	$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)=0$	**2p**
3.	$20x-6=14$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	$x+\frac{10}{100}\cdot x=440$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=400$ de lei	**2p**
5.	Mijlocul segmentului BC este punctul $M(3,3)$	**2p**
	$AM=1$	**3p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$	**3p**
	$\frac{\cos 30^\circ}{1+\sin 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-9)-(-6)\cdot 2=$	**3p**
	$=9+12=21$	**2p**
b)	$A(-a)+A(a)=\begin{pmatrix}-a+1 & -a+2\\ -a-2 & -a+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a+1 & a+2\\ a-2 & a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -4 & 2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}a+1 & a+2\\ a-2 & a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b+1 & b+2\\ b-2 & b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2ab-a+3b-3 & 2ab+3a+3b+4\\ 2ab-a-b-4 & 2ab-b+3a-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{pmatrix}$	**2p**
	Obținem $a=-1$, $b=1$	**3p**
2.a)	$2\circ(-2)=2\left(2+(-2)\right)-\frac{2\cdot(-2)}{2}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**

b)	$2\left(n+\frac{1}{n}\right)-\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{2}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow n+\frac{1}{n}=\frac{5}{2}$	**3p**
	Cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$	**2p**
c)	$2(x+y)-\frac{xy}{2}=8\Leftrightarrow 4x+4y-xy-16=0\Leftrightarrow (x-4)(4-y)=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$y=4$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{x^2+4-x\cdot 2x}{\left(x^2+4\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{4-x^2}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{(2-x)(2+x)}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-2]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-2,2]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-2,2]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[2,+\infty)$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-2)=-\frac{1}{4}$, $f(2)=\frac{1}{4}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci mulțimea valorilor funcției f este $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 x(x+1)\left(f(x)+\frac{1}{x+2}\right)dx=\int_0^2 x\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\|_0^2=2$	**3p**
b)	$\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\int_0^1\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x+2}\right)dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}-1+\frac{2}{x+2}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(-\ln(x+1)+2\ln(x+2)\right)\Big\|_0^1=2\ln 3-3\ln 2=\ln\frac{9}{8}$	**3p**
c)	$\mathcal{A}=\int_0^1\|f(x)\|dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\left(\ln(x+1)-\ln(x+2)\right)\Big\|_0^1=\ln\frac{4}{3}$	**3p**
	$\ln\left(p^2+\frac{1}{3}\right)=\ln\frac{4}{3}\Leftrightarrow p^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\Leftrightarrow p^2-1=0$ și, cum p este număr natural, obținem $p=1$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{7}-\sqrt{7}=$	**2p**
	$=7+0=7$	**3p**
2.	$f(0)=8$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=8$	**2p**
3.	$x^2+9=5^2\Rightarrow x^2-16=0$	**2p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care convin	**3p**
4.	$x-\frac{40}{100}\cdot x=300$, unde x este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=500$ de lei	**2p**
5.	$M(0,2)$, unde punctul M este mijlocul laturii AB	**2p**
	$CM=4$	**3p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{vmatrix}=6\cdot(-5)-3\cdot(-10)=$	**3p**
	$=-30+30=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=A$ și $M(a)\cdot M(b)=(I_2+aA)(I_2+bA)=I_2+aA+bA+abA\cdot A=$	**2p**
	$=I_2+aA+bA+abA=I_2+(a+b+ab)A=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b	**3p**
c)	$(I_2+A)+(I_2+2A)+\ldots+(I_2+2019A)=2019I_2+(1+2+\ldots+2019)A=$	**3p**
	$=2019(I_2+1010A)=2019M(1010)$, de unde obținem $a=1010$	**2p**
2.a)	$f(1)=m\cdot 1^3+2\cdot 1^2-m\cdot 1-2=$	**3p**
	$=m+2-m-2=0$, pentru orice număr real nenul m	**2p**
b)	$f=3X^3+2X^2-3X-2\Rightarrow f=(X-1)(X+1)(3X+2)$	**2p**
	$x_1=-1$, $x_2=-\frac{2}{3}$, $x_3=1$	**3p**
c)	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-1$, $x_1x_2x_3=\frac{2}{m}$	**2p**
	$\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=-4\Leftrightarrow\frac{-m}{2}=-4\Leftrightarrow m=8$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-3=$	**3p**
	$=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=6x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $[0,+\infty)$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]$	**2p**
	$f(x)\leq f(-1)$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$ și $f(-1)=7$, deci $f(x)\leq 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)\,dx=\int_0^1\left(3x^2+6x+7\right)dx=\left(\frac{3x^3}{3}+\frac{6x^2}{2}+7x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+3+7-0=11$	**2p**
b)	$\int_{-1}^1\frac{x+1}{f(x)}\,dx=\int_{-1}^1\frac{x+1}{\sqrt{3x^2+6x+7}}dx=\frac{1}{3}\sqrt{3x^2+6x+7}\Big\vert_{-1}^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\left(\sqrt{16}-\sqrt{4}\right)=\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$\sqrt{3x^2+6x+7}\geq\sqrt{7}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$	**2p**
	$\mathcal{A}=\int_0^a\left\vert f(x)\right\vert dx=\int_0^a\sqrt{3x^2+6x+7}\,dx\geq\int_0^a\sqrt{7}\,dx=a\sqrt{7}$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{13}{5}=\frac{5}{6}:\frac{13}{6}\cdot\frac{13}{5}=$	**3p**
	$=\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{13}\cdot\frac{13}{5}=1$	**2p**
2.	$f(m+1)=2(m+1)-4=2m-2$	**3p**
	$2m-2=m\Leftrightarrow m=2$	**2p**
3.	$2x+3=9\Rightarrow 2x=6$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 3 numere multiplu de 3, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**1p**
5.	$MP=4$, $NP=3$	**2p**
	ΔMPN este dreptunghic în P, deci $\mathcal{A}_{\Delta MPN}=\frac{4\cdot 3}{2}=6$	**3p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin 60^\circ+\sin^2 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$M(a)\cdot M(b)=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ a & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+b & -b\\ b & 1-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a+b & -b-a\\ a+b & 1-a-b\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+(a+b) & -(a+b)\\ a+b & 1-(a+b)\end{pmatrix}=M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$M(a)\cdot M(-a)=M(0)=I_2\Rightarrow (M(a))^{-1}=M(-a)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$X=(M(1))^{-1}\cdot A\cdot(M(2))^{-1}\Rightarrow X=M(-1)\cdot A\cdot M(-2)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-11 & 18\\ -17 & 28\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(0)=2\cdot 0^3-4\cdot 0^2+4\cdot 0-3=$	**3p**
	$=0-0+0-3=-3$	**2p**

b)	$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$, $x_1x_2x_3=\dfrac{3}{2}$	**2p**
	$a=\dfrac{3}{x_1}+\dfrac{3}{x_2}+\dfrac{3}{x_3}=\dfrac{3\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)}{x_1x_2x_3}=4$, care este număr natural	**3p**
c)	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1\right)=2^2-2\cdot 2=0$	**2p**
	Dacă x_1, x_2 și x_3 sunt numere reale, atunci $x_1=x_2=x_3=0$, ceea ce nu convine deoarece $f(0)=-3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x^6+5-x\cdot 6x^5}{\left(x^6+5\right)^2}=\dfrac{5-5x^6}{\left(x^6+5\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{5\left(1-x^6\right)}{\left(x^6+5\right)^2}=\dfrac{5\left(1-x^3\right)\left(1+x^3\right)}{\left(x^6+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=0$, $f'(0)=\dfrac{1}{5}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=\dfrac{1}{5}x$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$, $f(-1)=-\dfrac{1}{6}$, $f(1)=\dfrac{1}{6}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, deci mulțimea valorilor funcției f este $\left[-\dfrac{1}{6},\dfrac{1}{6}\right]$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1(x-1)dx=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}-1-0=-\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$F'(x)=\left((x-2)e^x+2019\right)'=1\cdot e^x+(x-2)e^x+0=$	**3p**
	$=(x-1)e^x=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_0^1 f^2(x)f'(x)dx=\frac{f^3(x)}{3}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{f^3(1)-f^3(0)}{3}=\dfrac{0-(-1)}{3}=\dfrac{1}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{12}\right)=\frac{12-4+3}{12}:\frac{11}{12}=$	**3p**
	$=\frac{11}{12}\cdot\frac{12}{11}=1$	**2p**
2.	$f(-2)+f(2)=8+8=$	**2p**
	$=16=4\cdot 4=4f(0)$	**3p**
3.	$x^2-27=(x-3)^2\Rightarrow 6x-36=0$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea M are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 5 numere pare, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$8=\frac{4+x_C}{2}\Rightarrow x_C=12$	**3p**
	$3=\frac{3+y_C}{2}\Rightarrow y_C=3$	**2p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\cos^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ-2\cos 30^\circ\cdot\sin 60^\circ=(\cos 30^\circ-\sin 60^\circ)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=4-1=3$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a^2+3 & a+2\\ 3a+6 & 7\end{pmatrix}$	**2p**
	$4A(a)-I_2=\begin{pmatrix}4a-1 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}$, deci $\begin{pmatrix}a^2+3 & a+2\\ 3a+6 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4a-1 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}$, de unde obținem $a=2$	**3p**
c)	$aA(a)+M=\begin{pmatrix}a^2+2 & a+1\\ 3a+1 & 2a+2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(aA(a)+M)=(a+1)(2a^2-3a+3)$	**3p**
	Cum $2a^2-3a+3\neq 0$, pentru orice număr real a, obținem $a=-1$	**2p**

2.a)	$f(2)=2^3-4\cdot 2^2+m\cdot 2+2=$	**3p**
	$=8-16+2m+2=2m-6$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=4$, $x_1x_2x_3=-2$	**2p**
	Pentru orice număr real m, $E=x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=-8$, care este număr întreg	**3p**
c)	$f=X^3-4X^2+3X+2=(X-2)(X^2-2X-1)$	**2p**
	$x_1=1-\sqrt{2}$, $x_2=2$, $x_3=1+\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=7\cdot 3x^2-5\cdot 2x+1=$	**2p**
	$=21x^2-10x+1=(3x-1)(7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x(3x-1)(7x-1)}{7x^3-5x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(7-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(7-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(3-\frac{1}{x}\right)\left(7-\frac{1}{x}\right)}{7-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(-\infty,\frac{1}{7}\right]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right]$	**2p**
	Cum $f(x)\leq f\left(\frac{1}{7}\right)$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ și $f\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{52}{49}$, obținem $f(x)\leq\frac{52}{49}$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$	**3p**
2.a)	$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2(x-2)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=(2-4)-\left(\frac{1}{2}-2\right)=-\frac{1}{2}$	**2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}(x^2+8x-2)=-2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}(x-2)=-2$ și $f(0)=-2$, obținem $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^0\vert f(x)\vert dx=\int_{-1}^0\vert x^2+8x-2\vert dx=\int_{-1}^0(-x^2-8x+2)dx=$	**2p**
	$=\left(-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{8x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_{-1}^0=\dfrac{17}{3}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$N=16+24i+9i^2+9-24i+16i^2=$	**2p**
	$=16-9+9-16=0$, care este număr natural	**3p**
2.	$f(a)=a \Leftrightarrow 2-a^2=a \Leftrightarrow a^2+a-2=0$	**3p**
	$a=-2$ sau $a=1$	**2p**
3.	$5^x(1+5)=30 \Leftrightarrow 5^x=5$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulţimea M are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile	**1p**
	În mulţimea M sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{49}=\dfrac{1}{7}$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$	**2p**
	$BM=\sqrt{(3-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$	**3p**
6.	$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=$	**2p**
	$=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}n-1 & 0\\ 0 & n-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}n+1 & 0\\ 0 & n+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2018 & 0\\ 0 & 2018\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}2n & 0\\ 0 & 2n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2018 & 0\\ 0 & 2018\end{pmatrix}$	**3p**
	$n=1009$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & -1\\ 1 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2\\ -2 & a\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x^2-1 & -2x\\ 2x & x^2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 2\\ -2 & a\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=-1$, de unde obţinem $a=0$	**2p**
2.a)	$f(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)-8=-m-16$	**2p**
	$f(1)=1^3-7\cdot 1^2+m\cdot 1-8=m-14 \Rightarrow f(-1)+f(1)=-m-16+m-14=-30$, pentru orice număr real m	**3p**
b)	$f(2)=0 \Rightarrow m=14$, deci $f=X^3-7X^2+14X-8$	**2p**
	Câtul este $X-4$ şi restul este $X-4$	**3p**
c)	$x_1x_3=x_2^2 \Rightarrow x_1x_2x_3=x_2^3$ şi, cum $x_1x_2x_3=8$, obţinem $x_2=2$	**2p**
	Polinomul f are rădăcinile 1, 2 şi 4, deci $m=14$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x+2)-\left(x^2+2x+1\right)\cdot 1}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+2)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+2}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	Cum $F(1)=\dfrac{1}{3}+c$, obținem $F(1)=0\Leftrightarrow c=-\dfrac{1}{3}$, deci $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+\ln x-\dfrac{1}{3}$	**2p**
b)	$g(x)=x^2+\dfrac{1}{x}\Rightarrow V=\pi\int\limits_1^2 g^2(x)\,dx=\pi\int\limits_1^2\left(x^4+2x+\dfrac{1}{x^2}\right)dx=\pi\cdot\left(\dfrac{x^5}{5}+x^2-\dfrac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\pi\left(\dfrac{32}{5}+4-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}-1+1\right)=\dfrac{97\pi}{10}$	**2p**
c)	$\int\limits_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\int\limits_1^m\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big\vert_1^m=\dfrac{1}{2}\ln^2 m$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln^2 m=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\ln m=-1$ sau $\ln m=1$, deci $m=\dfrac{1}{e}$, care nu convine sau $m=e$, care convine	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $6\sqrt{3}+2\left(1-\sqrt{27}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(20x-6)=\log_5 14$.

5p **4.** După o scumpire cu 10%, un obiect costă 440 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$, $B(0,6)$ și $C(6,0)$. Calculați distanța de la punctul A la mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Arătați că $\dfrac{\cos 30^\circ}{1+\sin 30^\circ}=\operatorname{tg}30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -6 & -9\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a+1 & a+2\\ a-2 & a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det M=21$.

5p **b)** Demonstrați că $A(-a)+A(a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b pentru care $A(a)\cdot A(b)=M$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(x+y)-\dfrac{xy}{2}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ(-2)=2$.

5p **b)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $n\circ\dfrac{1}{n}=\dfrac{9}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real y astfel încât $x\circ y=8$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(2-x)(2+x)}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 x(x+1)\left(f(x)+\frac{1}{x+2}\right)dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,dx=\ln\frac{9}{8}$.

5p **c)** Determinați numărul natural p, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $\ln\left(p^2+\dfrac{1}{3}\right)$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{7}\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{7}=7$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5\left(x^2+9\right)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 40%, prețul unui obiect este 300 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,2)$, $B(-3,2)$ și $C(0,6)$. Determinați, în triunghiul ABC, lungimea medianei din vârful C.

5p **6.** Arătați că $\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin 60^\circ-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin 45^\circ=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}6 & -10\\ 3 & -5\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b+ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $M(1)+M(2)+\ldots+M(2019)=2019M(a)$.

2. Se consideră polinomul $f=mX^3+2X^2-mX-2$, unde m este număr real nenul.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr real nenul m.

5p **b)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real nenul m pentru care $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=-4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{3x^2+6x+7}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f^2(x)\,dx=11$.

5p **b)** Calculați $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{f(x)}\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice $a\in(0,+\infty)$, suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=a$ are aria mai mare sau egală cu $a\sqrt{7}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{2}+\frac{2}{3}\right)\cdot\frac{13}{5}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$. Determinați numărul real m, știind că $f(m+1)=m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+3)=\log_7 9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(4,1)$, $N(1,5)$ și $P(4,5)$. Calculați aria triunghiului MNP.

5p **6.** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sin 60^\circ+\sin^2 45^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ și $M(a)=\begin{pmatrix}1+a & -a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)=M(a+b)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $M(1)\cdot X\cdot M(2)=A$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2+4X-3$.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-3$.

5p **b)** Demonstrați că numărul $a=\frac{3}{x_1}+\frac{3}{x_2}+\frac{3}{x_3}$ este natural, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

5p **c)** Demonstrați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^6+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{5\left(1-x^3\right)\left(1+x^3\right)}{\left(x^6+5\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(x-2)e^x+2019$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\int_0^1 f^2(x)\,f'(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\left(1-\frac{1}{12}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$. Arătați că $f(-2)+f(2)=4f(0)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_8\left(x^2-27\right)=\log_8(x-3)^2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$, acesta să fie număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,3)$ și $B(8,3)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

5p **6.** Arătați că $\cos^2 30^\circ+\sin^2 60^\circ-2\cos 30^\circ\cdot\sin 60^\circ=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det M=3$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A(a)\cdot A(a)=4A(a)-I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(aA(a)+M\right)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(2)=2m-6$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că, pentru orice număr real m, numărul $E=x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2$ este întreg, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=3$, determinați rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=7x^3-5x^2+x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(3x-1)(7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le\frac{52}{49}$, pentru orice $x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+8x-2, & x\in(-\infty,0]\\ x-2, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 f(x)\,dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=0$ are aria egală cu $\frac{17}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $N=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numerele reale a, știind că punctul $A(a,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x^2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x+5^{x+1}=30$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(3,5)$ și $C(2,1)$. Determinați lungimea medianei din B a triunghiului ABC.

5p **6.** Demonstrați că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=2$.

5p **b)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n-1,0)+A(n+1,0)=A(2018,0)$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că există un număr real x pentru care $A(x,1)\cdot A(x,1)=A(a,-2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-7X^2+mX-8$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=-30$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-3X+1, știind că f se divide cu $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\dfrac{97\pi}{10}$.

5p **c)** Determinați numărul $m\in(1,+\infty)$, știind că $\displaystyle\int_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\frac{1}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\left(2-\sqrt{20}\right)+\sqrt{180}=3\left(2-2\sqrt{5}\right)+6\sqrt{5}=$	**3p**
	$=6-6\sqrt{5}+6\sqrt{5}=6$	**2p**
2.	$f(1)=3\cdot 1-1=2$	**2p**
	$(f\circ f)(1)=f(2)=3\cdot 2-1=5$	**3p**
3.	$\lg(5x-1)=\lg 14\Rightarrow 5x-1=14$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	$x+\frac{30}{100}\cdot x=5200$, unde x este preţul iniţial al obiectului	**3p**
	$x=4000$ de lei	**2p**
5.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{d(A,BC)\cdot BC}{2}=\frac{4\cdot 8}{2}=16$	**2p**
	$AC=5$ şi, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{d(B,AC)\cdot AC}{2}$, obţinem $d(B,AC)=\frac{32}{5}$	**3p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}45^\circ=1$, $\operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$	**3p**
	$\frac{2\cos 30^\circ}{2\operatorname{tg}45^\circ+1}=\frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot 1+1}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\operatorname{tg}30^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(10))=\begin{vmatrix}11 & 21\\ 10 & 20\end{vmatrix}=11\cdot 20-21\cdot 10=$	**3p**
	$=220-210=10$	**2p**
b)	$A(a)-A(b)=\begin{pmatrix}a-b & 2(a-b)\\ a-b & 2(a-b)\end{pmatrix}=(a-b)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
	$(A(a)-A(b))(A(a)-A(b))=(a-b)^2\begin{pmatrix}3 & 6\\ 3 & 6\end{pmatrix}=3(a-b)^2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=3(a-b)(A(a)-A(b))$, pentru orice numere reale a şi b	**3p**
c)	Pentru orice număr natural n, $\det(A(n))=n$, deci $\det(A(2))+\det(A(3))+\cdots+\det(A(n))=$ $=2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}-1$	**3p**
	$\frac{n(n+1)}{2}-1=35$, deci $n(n+1)=72$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=8$	**2p**

2.a)	$4*\sqrt{3}=\sqrt{\left(4^2-2\right)(3-2)+2}=\sqrt{4^2-2+2}=$	**3p**
	$=\sqrt{16}=4$	**2p**
b)	$x*\sqrt{3}=\sqrt{3}*x=x$, pentru orice $x\in M$, deci $e=\sqrt{3}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**2p**
	$t*\sqrt{6}=\sqrt{6}*t=\sqrt{3}$, unde t este simetricul lui $x=\sqrt{6}$, deci $\sqrt{4\left(t^2-2\right)+2}=\sqrt{3}$, de unde $t^2=\frac{9}{4}$ și, cum $t\in M$, obținem $t=\frac{3}{2}$, care convine	**3p**
c)	$\sqrt{2}*x=\sqrt{(2-2)\left(x^2-2\right)+2}=\sqrt{2}$, unde $x\in M$	**2p**
	$\sqrt{2}*\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}=\sqrt{2}*\left(\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}\right)=\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x}}(\ln x-1)+2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{\sqrt{x}\ln x-\sqrt{x}+2\sqrt{x}}{x}=\frac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$, $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{4}{\sqrt{e}}$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f\left(\frac{1}{e}\right)=f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x-\frac{1}{e}\right)$, deci $y=-\frac{4}{\sqrt{e}}$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$	**3p**
	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f\left(\frac{1}{e}\right)$, deci $f(x)\ge-\frac{4}{\sqrt{e}}$, de unde obținem $\sqrt{e}f(x)+4\ge 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}f(x)=-1=f(0)\Rightarrow$ funcția f este continuă în $x=0$	**3p**
	f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)\Rightarrow f$ este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\frac{3x-1}{x+1}\,dx=\int_1^2\frac{3x+3-4}{x+1}\,dx=\int_1^2\left(3-\frac{4}{x+1}\right)dx=\left(3x-4\ln(x+1)\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=6-4\ln 3-3+4\ln 2=3+4\ln\frac{2}{3}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 e^x f(x)\,dx=\int_{-1}^0 e^x(2x-1)\,dx=e^x(2x-3)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=e^0\cdot(-3)-e^{-1}\cdot(-5)=\frac{5-3e}{e}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{5}\left(1+2\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}=\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}=$	**3p**
	$=2\cdot 5=10$	**2p**
2.	$f\left(1\right)=1^2-3\cdot 1+1=-1$	**2p**
	$f\left(2\right)=2^2-3\cdot 2+1=-1$, deci $f\left(1\right)=f\left(2\right)$	**3p**
3.	$x^2-21=4\Rightarrow x^2-25=0$	**3p**
	$x=-5$ sau $x=5$, care convin	**2p**
4.	$x+\frac{10}{100}\cdot x=220$, unde x este preţul iniţial al obiectului	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=2$	**3p**
	$y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=6$	**2p**
6.	$m\left(\sphericalangle A\right)=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$	**3p**
	$\cos A=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{vmatrix}=1\cdot\left(-4\right)-\left(-1\right)\cdot 6=$	**3p**
	$=-4+6=2$	**2p**
b)	$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & -4\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot A=-B$, deci $B\cdot A+B=O_2$	**2p**
c)	$B+nA=\begin{pmatrix}1+n & 2+6n\\ 2-n & 4-4n\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(B+nA\right)=\begin{vmatrix}1+n & 2+6n\\ 2-n & 4-4n\end{vmatrix}=2n^2-10n$, pentru orice număr natural n	**2p**
	Cum $\det B=0$, obţinem $2n^2-10n=2n$, deci $n=0$ sau $n=6$, care convin	**3p**
2.a)	$1\circ\left(-1\right)=1+2\left(-1\right)+1=$	**3p**
	$=1-2+1=0$	**2p**
b)	$x\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=x+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1=$	**3p**
	$=x+\left(-1\right)+1=x$, pentru orice număr real x	**2p**

c)	Presupunem că legea de compoziție „$\circ$” admite elementul neutru $e \Rightarrow 0 \circ e = e \circ 0 = 0$	**3p**
	$0 \circ e = 0 \Leftrightarrow 2e+1=0 \Leftrightarrow e=-\frac{1}{2}$, $e \circ 0 = 0 \Leftrightarrow e+1=0 \Leftrightarrow e=-1$, contradicție, deci legea de compoziție „$\circ$” nu admite element neutru	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{2x\left(x^2+1\right)-2x\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x\left(x^2+1-x^2-2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	Dacă $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\ln\left(x^2+1\right)$, atunci $g'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{2x^3}{\left(x^2+1\right)^2}\geq 0$,	**3p**
	pentru orice $x\in[0,1]$, deci g este crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow g(x)\leq g(1)$, pentru orice $x\in[0,1]$ Cum $g(1)=\frac{3}{2}+\ln 2<\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$, obținem $g(x)<\frac{5}{2}$, deci $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)<\frac{5}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$	**2p**
2.a)	$\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=\int_0^2 (x+1)\cdot\frac{e^x}{x+1}\,dx=\int_0^2 e^x dx=e^x\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=e^2-e^0=e^2-1$	**2p**
b)	$\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\ln\vert f(x)\vert\Big\vert_0^1=\ln\frac{e^x}{x+1}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\ln\frac{e}{2}=1-\ln 2$	**2p**
c)	$\int_0^1 \frac{e^x}{x+1}\,dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=\int_0^1 e^x\left(\ln(x+1)\right)'dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=$	**3p**
	$=e^x\ln(x+1)\Big\vert_0^1-\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{11}\left(\sqrt{11}+1\right)-\left(\sqrt{11}+3\right)=\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}+\sqrt{11}-\sqrt{11}-3=$	**2p**
	$=11-3=8$	**3p**
2.	$f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$	**2p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=2$ și $x=3$	**3p**
3.	$x^2+2=27\Rightarrow x^2-25=0$	**2p**
	$x=-5$ sau $x=5$, care convin	**3p**
4.	Numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte este egal cu $C_4^2=$	**2p**
	$=\dfrac{4!}{2!\left(4-2\right)!}=6$	**3p**
5.	N este mijlocul segmentului MP, unde $P\left(a,b\right)$ este simetricul punctului M față de punctul N, deci $2=\dfrac{-1+a}{2}$ și $1=\dfrac{2+b}{2}$	**3p**
	$a=5$ și $b=0$	**2p**
6.	$\cos B=\dfrac{BC^2+AB^2-AC^2}{2\cdot BC\cdot AB}=$	**2p**
	$=\dfrac{81+18-45}{2\cdot 9\cdot 3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de unde obținem că măsura unghiului B este de $45°$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A\left(1\right)=\begin{pmatrix}-9 & 8\\ -5 & 5\end{pmatrix}\Rightarrow \det A=\begin{vmatrix}-9 & 8\\ -5 & 5\end{vmatrix}=\left(-9\right)\cdot 5-\left(-5\right)\cdot 8=$	**3p**
	$=-45+40=-5$	**2p**
b)	$A\left(a\right)\cdot A\left(b\right)=\begin{pmatrix}1-10b-10a+100ab-40ab & 8b-80ab+8a+32ab\\ -5a+50ab-5b-20ab & -40ab+1+4a+4b+16ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1-10\left(a+b-6ab\right) & 8\left(a+b-6ab\right)\\ -5\left(a+b-6ab\right) & 1+4\left(a+b-6ab\right)\end{pmatrix}=A\left(a+b-6ab\right)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$A\left(m+n-6mn\right)=A\left(6-5mn\right)$, deci $mn-m-n+6=0$	**2p**
	$\left(m-1\right)\left(n-1\right)=-5$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem $m=0$, $n=6$ sau $m=6$, $n=0$	**3p**
2.a)	$1*3=1\cdot 3-3\cdot 1-3\cdot 3+12=$	**3p**
	$=3-3-9+12=3$	**2p**
b)	$x*y=xy-3x-3y+9+3=$	**3p**
	$=x\left(y-3\right)-3\left(y-3\right)+3=\left(x-3\right)\left(y-3\right)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$x*x=(x-3)^2+3$, $x*x*x=(x-3)^3+3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(x-3)^3+3=x$, deci $x=2$, $x=3$ sau $x=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5x^4-5=5\left(x^4-1\right)=$	**3p**
	$=5\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)=5(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=20x^3$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\le 0$ pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția f este concavă pe $(-\infty,0]$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-1,1]\Rightarrow f(x)\le f(-1)$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
	$f(-1)=2024$, deci $f(x)\le 2024$ pentru orice $x\in[-1,1]$, deci ecuația $f(x)=2025$ **nu** admite nicio soluție în intervalul $[-1,1]$	**3p**
2.a)	$F'(x)=f(x)=\sin x$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $\sin x\ge 0$, pentru orice $x\in[0,\pi]$, obținem $F'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,\pi]$, deci orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0,\pi]$	**2p**
b)	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin x\cos x\,dx=\sin^2 x\Big\vert_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$	**3p**
	$=\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$	**2p**
c)	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(-\cos x)'\,dx=-x\cos x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=$	**2p**
	$=-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}+\sin x\Big\vert_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5+\frac{1}{2}=\frac{11}{2}$	**2p**
	$5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}\Rightarrow\left(5+\frac{1}{2}\right)\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{2}\cdot\frac{9}{2}=\frac{99}{4}$	**3p**
2.	$3x+4=8-x\Leftrightarrow x=1$	**3p**
	$y=7$	**2p**
3.	$2x+1=5^2$	**3p**
	$x=12$, care convine	**2p**
4.	$p-10\%\cdot p=630$, unde p este preţul tabletei înainte de ieftinire	**3p**
	$p=700$ de lei	**2p**
5.	$AB=4$	**2p**
	$AM=\frac{AB}{2}=2$	**3p**
6.	$\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\cos^2 45^\circ-\sin^2 30^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det M=\begin{vmatrix}8 & 6\\ 6 & 5\end{vmatrix}=8\cdot 5-6\cdot 6=$	**3p**
	$=40-36=4$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(-a)=\begin{pmatrix}2+a & 2\\ 2 & 1+a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2-a & 2\\ 2 & 1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-a^2 & 6\\ 6 & 5-a^2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix}8-a^2 & 6\\ 6 & 5-a^2\end{pmatrix}+a^2\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8-a^2+a^2 & 6\\ 6 & 5-a^2+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 6 & 5\end{pmatrix}=M$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$\det M\neq 0$, deci există $M^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=M^{-1}\cdot A(0)$ şi, cum $A(0)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, obţinem $X=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$5*5=5+5-10=$ $=10-10=0$	**3p** **2p**
b)	$n^2+n-10<-4\Leftrightarrow n^2+n-6<0\Leftrightarrow n\in(-3,2)$ Cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**2p** **3p**
c)	$x*x=2x-10$, $x*x*x=3x-20$, deci $3x-20=x^2-18\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ $x=1$ sau $x=2$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\left(x^3\right)'-3\left(x^2\right)'+(1)'=$ $=6x^2-6x=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-x^3+2x^2+x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x-1}=$ $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\left(x^2+1\right)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\left(x^2+1\right)=2$	**2p** **3p**
c)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=12x+2020\Leftrightarrow f'(a)=12$ $6a(a-1)=12\Leftrightarrow a^2-a-2=0\Leftrightarrow a=-1$ sau $a=2$	**2p** **3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)-x+2\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^3+x-2-x+2\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}x^3dx=$ $=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_{-1}^{1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=0$	**2p** **3p**
b)	$\int\limits_{0}^{1}\left(f(x)-x^3+2\right)e^x\,dx=\int\limits_{0}^{1}xe^xdx=$ $=(x-1)e^x\Big\vert_{0}^{1}=0-(-1)\cdot e^0=1$	**2p** **3p**
c)	$\int\limits_{1}^{2}f(x)dx=\int\limits_{1}^{2}\left(x^3+x-2\right)dx=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_{1}^{2}+\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_{1}^{2}-2x\Big\vert_{1}^{2}=\dfrac{13}{4}$ $m^2+1=\dfrac{13}{4}\Rightarrow m^2=\dfrac{9}{4}$ și, cum m este număr real pozitiv, obținem $m=\dfrac{3}{2}$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(10+\frac{1}{2}\right)\left(10-\frac{1}{2}\right)=100-\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{400-1}{4}=\frac{399}{4}$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x+1=10-x$	**3p**
	$3x=9\Rightarrow x=3$	**2p**
3.	$x^2+13=7^2\Rightarrow x^2-36=0$	**3p**
	$x=-6$ sau $x=6$, care convin	**2p**
4.	$p-\frac{20}{100}\cdot p=800$, unde p este preţul tabletei înainte de ieftinire	**3p**
	$p=1000$ de lei	**2p**
5.	$AB=6$	**2p**
	$AM=\frac{AB}{2}=3$	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$2\sin^2 30^\circ-\sin^2 45^\circ=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2\cdot\frac{1}{4}-\frac{2}{4}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)-1\cdot 1=$	**3p**
	$=-1-1=-2$	**2p**
b)	$A(a)\cdot A(-a)=\begin{pmatrix}a+1 & 1\\ 1 & a-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-a+1 & 1\\ 1 & -a-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-a^2 & 0\\ 0 & 2-a^2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\left(2-a^2\right)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\left(2-a^2\right)I_2$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(1)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=-1\neq 0$, deci există $(A(1))^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=A^{-1}(1)\cdot A(2)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$3*2=3^2+3\cdot 2-3-2+1=$	**3p**
	$=9+6-3-2+1=11$	**2p**

b)	$x*(-x)=x^2+x\cdot(-x)-x-(-x)+1=$	**3p**
	$=x^2-x^2-x+x+1=1$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$2^{2x}+4\cdot 2^x-2^x-4+1=1\Leftrightarrow 2^{2x}+3\cdot 2^x-4=0\Leftrightarrow \left(2^x+4\right)\left(2^x-1\right)=0$	**3p**
	$2^x=1$, de unde obținem $x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x+2)\left(x^2+2x+2\right)-\left(x^2+2x+3\right)(2x+2)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(2x+2)\left(x^2+2x+2-x^2-2x-3\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}=\dfrac{-2(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$; pentru $x\in(-\infty,-1]$, $f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-1]$ și pentru $x\in[-1,+\infty)$, $f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $f(-1)=2$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$, f este continuă și $f(x)\neq 1$, pentru orice număr real x, deci $\text{Im } f=(1,2]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}dx=\int_0^1 (x+2)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\|_0^1=\dfrac{5}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^1\left(f^2(x)-1\right)dx=\int_0^1\left(\dfrac{x^2+4x+4}{x^2+4}-1\right)dx=\int_0^1\dfrac{4x}{x^2+4}dx=$	**2p**
	$=2\ln\left(x^2+4\right)\Big\|_0^1=2\ln 5-2\ln 4=2\ln\dfrac{5}{4}$	**3p**
c)	$F(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x\dfrac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt+\int_0^x\dfrac{2}{\sqrt{t^2+4}}dt=\left(\sqrt{t^2+4}+2\ln\left(t+\sqrt{t^2+4}\right)\right)\Big\|_0^x=$	**3p**
	$=\sqrt{x^2+4}+2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)-2-2\ln 2$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{6+3+2+1}{6}=\frac{12}{6}=2$	**3p**
	$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=2^2-2=2$	**2p**
2.	$x_1+x_2=4$, $x_1x_2=m\Rightarrow x_1^2+x_2^2=16-2m$	**3p**
	$16-2m=2\Leftrightarrow m=7$	**2p**
3.	$3x+1=(3x+1)^2\Rightarrow 3x(3x+1)=0$	**2p**
	$x=-\frac{1}{3}$ sau $x=0$, care convin	**3p**
4.	$x-\frac{25}{100}\cdot x=750$, unde x este preţul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=1000$ de lei	**2p**
5.	$OABC$ este paralelogram, deci segmentele OB şi AC au acelaşi mijloc	**2p**
	Punctul $M(4,3)$ este mijlocul segmentului OB, deci $x_C=8$ şi $y_C=4$	**3p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 90^\circ=0$	**3p**
	$\sqrt{3}\cos 30^\circ+\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cos 90^\circ=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M(1)=I_2+A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(M(1))=\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=1-2=-1$	**2p**
b)	$M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=(I_2+aA)(I_2+bA)-(I_2+(a+b)A)=abA\cdot A$, pentru orice numere reale a şi b	**3p**
	Cum $A\cdot A=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=2I_2$ şi $M(0)=I_2$, obţinem $M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=2abM(0)$, pentru orice numere reale a şi b	**2p**
c)	$\det M(1)\neq 0$, $(M(1))^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=M(0)\cdot(M(1))^{-1}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-1&1\\2&-1\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$1*(-1)=4\cdot 1\cdot(-1)+4\cdot 1+4\cdot(-1)+3=$	**3p**
	$=-4+4-4+3=-1$	**2p**

b)	$x*y=4xy+4x+4y+4-1=$	**2p**
	$=4x(y+1)+4(y+1)-1=4(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x*\frac{1}{4}=5x+4$, $(5x+4)*(-x)=20(1-x^2)-1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$20(1-x^2)=20$, de unde obținem $x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(2x+4)(x+1)-(x^2+4x+4)}{(x+1)^2}=$	**3p**
	$=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x+4}{x(x+1)}=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{x+1}=3$, deci dreapta de ecuație $y=x+3$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$, $x\in(-1,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci funcția f este convexă	**3p**
2.a)	$\int_0^1(x^2+1)(f(x)-x^2)dx=\int_0^1(x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^1 dx=$	**2p**
	$=x\Big\vert_0^1=1-0=1$	**3p**
b)	$\int_{-1}^1 x\,f(x)dx=\int_{-1}^1\left(x^3+\frac{x}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right)\Big\vert_{-1}^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln 2=0$	**2p**
c)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{x^2+1}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\text{arctg}x\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}$	**3p**
	$\frac{n^2}{3}+\frac{\pi}{4}-1=\frac{1}{3}+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow n^2=4$ și, cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{14}=\left(3-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{5}{14}=$	**3p**
	$=\frac{14}{5}\cdot\frac{5}{14}=1$	**2p**
2.	$f(m)=6\Leftrightarrow m^2+2=6\Leftrightarrow m^2-4=0$	**3p**
	$m=-2$ sau $m=2$	**2p**
3.	$14-x=3x+6\Rightarrow 4x=8$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 2 numere care verifică inegalitatea dată, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{90}=\frac{1}{45}$	**1p**
5.	$AB=5$, $AC=6$, $BC=5$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=5+6+5=16$	**2p**
6.	$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\sin 30^\circ\cos 30^\circ+2\sin 45^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}+2\cdot\frac{2}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=(-2)\cdot 2-1\cdot 1=$	**3p**
	$=-4-1=-5$	**2p**
b)	$A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & 3-x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x-3 & 1\\ 1 & 3+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}(x-3)^2+1 & 0\\ 0 & 1+(3-x)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{pmatrix}\Leftrightarrow (x-3)^2-9=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=6$	**2p**
2.a)	$1*2=2\cdot 1+2-3\cdot 1\cdot 2=$	**3p**
	$=2+2-6=-2$	**2p**

b)	$x*(x-1)=2x+(x-1)-3x(x-1)=-3x^2+6x-1$, unde x este număr real	**3p**
	$-3x^2+6x-1=-1\Leftrightarrow -3x(x-2)=0$, deci $x=0$ sau $x=2$	**2p**
c)	De exemplu, $a=\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $b=-2\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$	**2p**
	$a*b=2\cdot\sqrt{2}+\left(-2\sqrt{2}\right)-3\cdot\sqrt{2}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}+12=12\in\mathbb{N}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=$	**2p**
	$=5x^2\left(x^2-4x+3\right)=5x^2(x-3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[0,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,1]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,3]$	**2p**
	$f(0)=0$, $f(1)=1$ și $f(3)=-27$, deci $-27\leq f(x)\leq 1$, pentru orice $x\in[0,3]$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(e^x+1\right)dx=\left(e^x+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=(e+1)-(1+0)=e$	**2p**
b)	Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x^2+x+2\right)=2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(e^x+1\right)=2$ și $f(0)=2$, obținem că $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$, deci funcția f este continuă în $x=0$	**3p**
	Cum funcția f este continuă pe $(-\infty,0)$ și pe $(0,+\infty)$, obținem că f este continuă pe $\mathbb{R}$, deci funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$	**2p**
c)	$\int_{-1}^1 x\,f(x)dx=\int_{-1}^0 x\left(x^2+x+2\right)dx+\int_0^1 x\left(e^x+1\right)dx=\int_{-1}^0\left(x^3+x^2+2x\right)dx+\int_0^1\left(xe^x+x\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big\vert_{-1}^0+\left(xe^x-e^x+\frac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1\right)+\left(e-e+\frac{1}{2}\right)-(-1)=\frac{7}{12}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_3 = b_1 q^2 \Rightarrow b_1 = \frac{b_3}{q^2} =$	**3p**
	$= \frac{12}{2^2} = 3$	**2p**
2.	$2x+1 \geq 3 \Leftrightarrow x \geq 1$	**3p**
	$x \in [1, +\infty)$	**2p**
3.	$x+1 = 11-x \Rightarrow 2x = 10$	**3p**
	$x = 5$, care convine	**2p**
4.	$C_{11}^9 = C_{11}^{11-9} = C_{11}^2$	**3p**
	$C_{11}^9 - C_{11}^2 = C_{11}^2 - C_{11}^2 = 0$	**2p**
5.	$AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $AC = 8$	**3p**
	$AC^2 = AB^2 + BC^2$ și, cum $AB = BC$, obținem că ΔABC este dreptunghic isoscel	**2p**
6.	$\sin 135° = \sin(180° - 135°) = \sin 45°$	**2p**
	$\frac{\sin 135°}{\cos 45°} = \frac{\sin 45°}{\cos 45°} = 1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (-4) =$	**3p**
	$= -9 + 8 = -1$	**2p**
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	**3p**
	$A \cdot A \cdot A = A \cdot (A \cdot A) = A \cdot I_2 = A$	**2p**
c)	Matricea A este inversabilă și, cum $A \cdot A = I_2$, obținem că inversa matricei A este matricea A	**2p**
	$X = A^{-1} \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A \cdot (I_2 + 3A) \Leftrightarrow X = A + 3A \cdot A \Leftrightarrow X = A + 3I_2$, deci $X = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$2 * 2020 = 2 \cdot 2020 - 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2020 + 6 =$	**3p**
	$= -4 + 6 = 2$	**2p**
b)	$x * y = xy - 2x - 2y + 4 + 2 =$	**3p**
	$= x(y-2) - 2(y-2) + 2 = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$(m-2)(n-2) + 2 = 13 \Leftrightarrow (m-2)(n-2) = 11$	**2p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $m = 3$, $n = 13$ sau $m = 13$, $n = 3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2e^x+2(x-1)e^x=$	**3p**
	$=e^x(2+2x-2)=2xe^x,\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xe^x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2e^x\right)=$	**3p**
	$=2e^0=2$	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
	Pentru orice număr real x, $f(x)\ge f(0)$, deci $f(x)\ge -2$, de unde obținem $xe^x-e^x\ge -1$, deci $xe^x\ge e^x-1$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^2(x+4)f(x)\,dx=\int_0^2(x+2)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}+4=6$	**2p**
b)	$\int_{-2}^0 f(x)\,dx=\int_{-2}^0\dfrac{x+2}{x+4}\,dx=\int_{-2}^0\dfrac{x+4-2}{x+4}\,dx=\int_{-2}^0\left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)dx=\left(x-2\ln(x+4)\right)\Big\vert_{-2}^0=$	**3p**
	$=0-2\ln 4-(-2)+2\ln 2=2-2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_{-3}^a f'(x)\cdot f''(x)\,dx=\dfrac{1}{2}\left(f'(x)\right)^2\Big\vert_{-3}^a=\dfrac{1}{2}\left(f'(a)\right)^2-\dfrac{1}{2}\left(f'(-3)\right)^2$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$	**3p**
	$f'(x)=\dfrac{2}{(x+4)^2}$, deci $\int_{-3}^a f'(x)f''(x)\,dx=2\left(\dfrac{1}{(a+4)^4}-1\right)$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{3}=$	**3p**
	$=2\cdot 3=6$	**2p**
2.	$a^2-4a+2=2\Leftrightarrow a^2-4a=0$	**3p**
	$a=0$ sau $a=4$	**2p**
3.	$x-1=9$	**3p**
	$x=10$, care convine	**2p**
4.	$x-\frac{10}{100}\cdot x=180$, unde x este preţul iniţial al obiectului	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$AB=BC\Rightarrow CD$ este înălţime în ΔABC, unde $D(0,1)$ este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$CD=3$	**2p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ-\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-3\cdot 0=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**2p**
	$3A-A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 9\\ 0 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2I_2$	**3p**
c)	$xA-I_2=\begin{pmatrix}x-1 & 3x\\ 0 & 2x-1\end{pmatrix}$, $(xA-I_2)(xA-I_2)=\begin{pmatrix}(x-1)^2 & 9x^2-6x\\ 0 & (2x-1)^2\end{pmatrix}$, $5A-I_2=\begin{pmatrix}4 & 15\\ 0 & 9\end{pmatrix}$	**3p**
	Cum $(x-1)^2=4$, $9x^2-6x=15$ şi $(2x-1)^2=9$, obţinem $x=-1$	**2p**
2.a)	$3\circ(-1)=3^2+(3+1)(-1+1)+(-1)^2=$	**3p**
	$=9+4\cdot 0+1=10$	**2p**
b)	$x\circ y=x^2+(x+1)(y+1)+y^2=$	**2p**
	$=y^2+(y+1)(x+1)+x^2=y\circ x$, pentru orice numere reale x şi y, deci legea de compoziţie „$\circ$” este comutativă	**3p**

c)	$x\circ 1=x^2+2(x+1)+1^2=x^2+2x+1+2=$	**3p**
	$=(x+1)^2+2\geq 2$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x-1)'\ln x+(x-1)(\ln x)'=$	**3p**
	$=\ln x+(x-1)\cdot\frac{1}{x}=1-\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=0$	**3p**
c)	$x\in(0,1]\Rightarrow \ln x\leq 0$ și $1-\frac{1}{x}\leq 0$	**3p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice număr real $x\in(0,1]$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+1+x-2\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{6}$	**2p**
b)	$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x\left(1+\frac{t}{t^2+1}-\frac{2}{t^2+1}\right)dt=\left(t+\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)-2\operatorname{arctg}t\right)\Big\vert_0^x=$	**3p**
	$=x+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)-2\operatorname{arctg}x$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x}{x^2+1}$, pentru orice număr real x, $x\neq 0$	**2p**
	$\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\int_1^2\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_1^2=\ln\frac{5}{2}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left(2-\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2+3}{3}-\frac{6-4}{3}=$	**2p**
	$=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=0$	**3p**
2.	$f(2)=5\Leftrightarrow 2^2-2m+3=5$	**3p**
	$2m=2$, deci $m=1$	**2p**
3.	$x+4=(x+2)^2\Rightarrow x^2+3x=0$	**2p**
	$x=-3$, care nu convine sau $x=0$, care convine	**3p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 9 numere care au cifrele egale, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$m_{AB}=-1$	**2p**
	$m_{AC}=\frac{a-1}{5}$, deci punctele A, B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow m_{AB}=m_{AC}\Leftrightarrow a=-4$	**3p**
6.	$MN=6$	**2p**
	$P_{MNPQ}=4MN=24$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A-B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A-B)=\begin{vmatrix}0&1\\-1&0\end{vmatrix}=0\cdot 0-(-1)\cdot 1=$	**3p**
	$=0-(-1)=1$	**2p**
b)	$C=A\cdot A+B\cdot B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}$	**3p**
	$\det C=\begin{vmatrix}2&2\\2&2\end{vmatrix}=0$, deci matricea C nu este inversabilă	**2p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}1+x&2+y\\x&y\end{pmatrix}$, $X\cdot B=\begin{pmatrix}3&2\\x+y&y\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\begin{pmatrix}1+x&2+y\\x&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\x+y&y\end{pmatrix}$, deci $x=2$ și $y=0$, care convin	**3p**

2.a)	$1*1=\frac{1\cdot 1+1}{1+1}=$	**3p**
	$=\frac{2}{2}=1$	**2p**
b)	$\frac{2x+1}{x+2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow 4x+2=3x+6$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
c)	$x*1=1$, unde $x\in M$	**2p**
	$\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8*\lg 10=\left(\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8\right)*\lg 10=\left(\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8\right)*1=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\left(x^{2020}+1\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x+1}{x}=2$ și, cum $f(1)=2$, obținem $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$, deci funcția f este continuă în $x_0=1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	Pentru $x\in(1,+\infty)$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$, deci $f''(x)=\frac{2}{x^3}$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$, deci funcția f' este crescătoare pe $(1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^2 x f(x)\,dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$\int_e^{e^2}\frac{g(x)}{xe^x}\,dx=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}\ln x\,dx=\frac{1}{2}\ln^2 x\Big\vert_e^{e^2}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\left(2^2-1^2\right)=\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_1^e\frac{e^x}{x}\,dx+\int_1^e e^x\ln x\,dx=\int_1^e\frac{e^x}{x}\,dx+e^x\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}e^x\,dx=$	**3p**
	$=e^e\ln e-e^1\ln 1=e^e$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1,75:0,25-2\left(\frac{17}{4}-2,25\right)=175:25-2\left(4,25-2,25\right)=$	**3p**
	$=7-2\cdot 2=3$	**2p**
2.	Pentru orice $x\in[1,5]$, $f(x)=y\Leftrightarrow 2x+1=y\Leftrightarrow x=\frac{y-1}{2}$	**2p**
	$y\in \text{Im}\, f\Leftrightarrow$ există $x\in[1,5]$ astfel încât $f(x)=y\Leftrightarrow 1\le\frac{y-1}{2}\le 5\Leftrightarrow 3\le y\le 11$, deci $\text{Im}\, f=[3,11]$	**3p**
3.	$2x+4=2^4$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	$x-\frac{20}{100}\cdot x=144$, unde x este prețul produsului înainte de ieftinire	**3p**
	$x=180$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{(5-2)^2+(0-a)^2}$, deci $\sqrt{a^2+9}=5$	**3p**
	$a=-4$ sau $a=4$	**2p**
6.	$\sin 130^\circ=\sin(180^\circ-130^\circ)=\sin 50^\circ$	**2p**
	$\sin^2 130^\circ+\cos^2 50^\circ=\sin^2 50^\circ+\cos^2 50^\circ=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{vmatrix}=3\cdot(-4)-6\cdot(-2)=$	**3p**
	$=-12+12=0$	**2p**
b)	$A\cdot A+A=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$, unde x, y, z și t sunt numere reale și $X+I_2=\begin{pmatrix}x+1 & y\\ z & t+1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{vmatrix}x & y\\ z & t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+1 & y\\ z & t+1\end{vmatrix}\Leftrightarrow xt-yz=xt+x+t+1-yz\Leftrightarrow x+t=-1$ și, cum există o infinitate de numere reale x și t pentru care $x+t=-1$, există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X=\det(X+I_2)$	**3p**
2.a)	$1\circ\sqrt{2}=-1\cdot\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=$	**3p**
	$=-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=1$	**2p**

b)	$x\circ y=-xy+x+y-1+1=$	**2p**
	$=-x(y-1)+(y-1)+1=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
c)	$-(3^x-1)(5^x-1)+1=1\Leftrightarrow 3^x-1=0$ sau $5^x-1=0$	**3p**
	$x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x^3-4x=$	**2p**
	$=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f(2)=-55$, $f'(2)=24$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, deci $y=24x-103$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f'(x)}{2x}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x(x-1)(x+1)}{2x}=\lim\limits_{x\to 3}2(x-1)(x+1)=16$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\dfrac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2}=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}=f(x)$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**3p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=F(x)\Big\vert_0^1=F(1)-F(0)=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}-0=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$F(x)>0$, pentru orice $x\in[1,a]$ şi $\int_1^a\dfrac{f(x)}{F(x)}dx=\int_1^a\dfrac{F'(x)}{F(x)}dx=\ln(F(x))\Big\vert_1^a=\ln(F(a))-\ln(F(1))$	**3p**
	$\ln(F(a))-\ln\dfrac{1}{2}=\ln\dfrac{8}{3}\Leftrightarrow\ln(F(a))=\ln\dfrac{8}{3}+\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\ln(F(a))=\ln\dfrac{4}{3}$, deci $\dfrac{a^2}{a+1}=\dfrac{4}{3}$ şi, cum $a>1$, obţinem $a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3+a_4=\dfrac{(a_1+a_4)\cdot 4}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(2+11)\cdot 4}{2}=26$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x^2-2x=2x-4\Leftrightarrow (x-2)^2=0$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=2$, $y=0$	**2p**
3.	$\sqrt[3]{x+2}=2\Leftrightarrow x+2=8$	**3p**
	$x=6$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt $4\cdot 5=20$ de numere care au cifrele pare, deci sunt 20 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{20}{90}=\dfrac{2}{9}$	**1p**
5.	B este mijlocul segmentului AC, unde $C(a,b)$ este simetricul punctului A față de punctul B, deci $3=\dfrac{-1+a}{2}\Rightarrow a=7$	**3p**
	$1=\dfrac{5+b}{2}\Rightarrow b=-3$	**2p**
6.	$BC^2=AB^2+AC^2$, deci ΔABC este dreptunghic	**2p**
	$\cos B=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{4}{5}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A+I_3=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_3)=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&2&0\\1&1&2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=4+0+0-0-0-0=4$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}$, $A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&5&1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A\cdot A+A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&5&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&2&0\\2&6&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&3&1\end{pmatrix}=2A\cdot A$	**3p**

c)	$B(x)=A+xI_3=\begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1+x & 0 \\ 1 & 1 & 1+x \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(B(x)\right)=x(1+x)^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$B(x)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det\left(B(x)\right)\neq 0 \Leftrightarrow x(1+x)^2\neq 0$, de unde obținem $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$	**3p**
2.a)	$2020*0=2020+a\cdot 0+1=$	**3p**
	$=2020+1=2021$, pentru orice număr real a	**2p**
b)	$(x*y)*z=(x+ay+1)*z=x+ay+1+az+1=x+ay+az+2$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**
	$x*(y*z)=x*(y+az+1)=x+a(y+az+1)+1=x+ay+a^2z+a+1$, pentru orice numere reale x, y și z și, cum, legea de compoziție „$*$” este asociativă, obținem $a=1$	**3p**
c)	$x*y=x-y+1$, deci $4^x-2^x+1=1$	**3p**
	$2^x\left(2^x-1\right)=0$, de unde obținem $x=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2(x-1)(x-2)-(x-1)^2}{(x-2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{(x-1)(2x-4-x+1)}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(3)=0$, $f(3)=4$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(3)=f'(3)(x-3)$, deci $y=4$	**3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci funcția f' este crescătoare pe $(2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)}dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\ln e-\ln 1=1$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^2 f^2(x)dx=\int_1^2 x^2\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\dfrac{32}{5}+\dfrac{8}{3}-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{128}{15}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_0^a f(x)dx-\int_0^{2020} f(x)dx=\int_0^{2020} f(x)dx+\int_{2020}^a f(x)dx-\int_0^{2020} f(x)dx=\int_{2020}^a f(x)dx$, pentru orice $a\in[2020,+\infty)$	**3p**
	Pentru orice $x\in[0,+\infty)$, $f(x)\geq 0$, deci , pentru orice $a\in[2020,+\infty)$, $\displaystyle\int_{2020}^a f(x)dx\geq 0$, de unde obținem $\displaystyle\int_0^{2020} f(x)dx\leq\int_0^a f(x)dx$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2,5:0,5-5\left(6,5-\frac{11}{2}\right)=25:5-5(6,5-5,5)=$	**3p**
	$=5-5\cdot 1=0$	**2p**
2.	$x_1+x_2=-m$, $x_1x_2=1$	**2p**
	$-m+2\cdot 1=1$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{x-2}=3-1\Rightarrow x-2=4$	**3p**
	$x=6$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele divizibile cu 10 sunt: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 și 90, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AB=8$, $AC=6$, $BC=10$	**2p**
	$P_{ABC}=6+8+10=24$	**3p**
6.	Unghiul A este ascuțit $\Rightarrow \cos A>0$ și, cum $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, obținem $\cos A=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A+I_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+I_2)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=2\cdot 4-3\cdot 1=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 4\\ 12 & 12\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=4A$	**2p**
c)	$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, deci $AX=\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ 3x+3z & 3y+3t\end{pmatrix}$ și $XA=\begin{pmatrix}x+3y & x+3y\\ z+3t & z+3t\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}x+z & y+t\\ 3x+3z & 3y+3t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3y & x+3y\\ z+3t & z+3t\end{pmatrix}\Leftrightarrow z=3y$ și $x+2y=t\Rightarrow X=\begin{pmatrix}x & y\\ 3y & x+2y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale, deci există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=X\cdot A$	**2p**

2.a)	$1*2=\dfrac{1\cdot 2+1+2-1}{2}=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{2}=2$	**2p**
b)	$\dfrac{x^2+2x-1}{2}\le 1\Leftrightarrow x^2+2x-3\le 0\Leftrightarrow (x+3)(x-1)\le 0$	**3p**
	$x\in[-3,1]$	**2p**
c)	$(-1)*x=-1$, unde x este număr real	**2p**
	$(-1)*0*1*\ldots*2020=(-1)*(0*1*\ldots*2020)=-1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-\dfrac{2}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{2(x^2-1)}{x}=\dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**1p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$	**2p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
c)	Pentru orice $x\in(0,+\infty)$, $f(x)\ge f(1)$ și, cum $f(1)=1$, obținem $x^2-2\ln x\ge 1$	**2p**
	$\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-2\ln\dfrac{2}{3}\ge 1$, deci $2\ln\dfrac{2}{3}\le\dfrac{4}{9}-1$, de unde obținem $\ln\dfrac{2}{3}\le-\dfrac{5}{18}$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)+2020x-1\right)dx=\int_0^1 x^{2020}dx=\dfrac{x^{2021}}{2021}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1^{2021}-0^{2021}}{2021}=\dfrac{1}{2021}$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă oarecare a funcției f, deci $F'(x)=f(x)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=2020x^{2019}-2020=2020\left(x^{2019}-1\right)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci orice primitivă F a funcției f este convexă pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$\int_0^1\left(f(-x)-f(x)\right)e^x dx=\int_0^1 4040xe^x dx=4040\int_0^1 xe^x dx=4040xe^x\Big\vert_0^1-4040\int_0^1 e^x dx=$	**3p**
	$=4040e-4040e^x\Big\vert_0^1=4040e-4040e+4040=4040$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}:0,5-\frac{1}{4}:0,25=\frac{1}{2}:\frac{1}{2}-\frac{1}{4}:\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**3p**
	$f(-1)\cdot f(1)=0$	**2p**
3.	$3x-2=25$	**3p**
	$x=9$, care convine	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 1000=200$	**3p**
	Prețul după scumpire este $1000+200=1200$ de lei	**2p**
5.	$M(4,3)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$OM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A și $B=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \Delta ABC$ este isoscel	**3p**
	$AB=AC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{vmatrix}=1\cdot(-2)-1\cdot 2=$	**3p**
	$=-2-2=-4$	**2p**
b)	$A-2B(x,y)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x & 2\\ 2y & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\det(A-2B(x,y))=\begin{vmatrix}1-2x & 0\\ 1-2y & 0\end{vmatrix}=0$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$A\cdot B(x,y)=\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}$, $B(x,y)\cdot A=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\begin{pmatrix}x+2y & -1\\ x-2y & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+1 & 2x-2\\ y-1 & 2y+2\end{pmatrix}$, de unde obţinem $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	$2020\circ(-2)=2020\cdot(-2)+2(2020+(-2))+2=$	**3p**
	$=2020\cdot(-2)+2\cdot 2020+2\cdot(-2)+2=-4+2=-2$	**2p**
b)	$x\circ y=xy+2x+2y+4-2=$	**3p**
	$=x(y+2)+2(y+2)-2=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$\left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)-2=x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}+2\right)(x+2)=x+2 \Leftrightarrow (x+2)\left(\frac{1}{x}+1\right)=0$	**3p**
	$x=-2$ sau $x=-1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+2(x-1)(x-1)'=$	**2p**
	$=3x^2+2(x-1)=3x^2+2x-2$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\,f'(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\left(3x^2+2x-2\right)}{x^3+(x-1)^2}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x^2-2x}{x^3+x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=3$	**3p**
c)	Tangenta la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=a$, situat pe graficul funcției f are panta egală cu $f'(a)$, deci este paralelă cu dreapta $y=3x+1\Leftrightarrow f'(a)=3$	**2p**
	$3a^2+2a-5=0\Leftrightarrow a=-\frac{5}{3}$ sau $a=1$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x-2\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^5+x^3+2x+2-x^3-2x-2\right)dx=\int_{-1}^{1}x^5\,dx=\frac{x^6}{6}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$	**2p**
b)	$\int_0^2 e^x\left(f(x)-x^5-x^3-3x-1\right)dx=\int_0^2 e^x(-x+1)dx=e^x(-x+1)\Big\vert_0^2-\int_0^2(-1)e^x dx=$	**3p**
	$=-e^2-1+e^2-1=-2$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=5x^4+3x^2+2\geq 0$, pentru orice număr real x, deci F este convexă	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}:0,5\right)\cdot\frac{12}{13}=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-1\right)\cdot\frac{12}{13}=\left(\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12}\right)\cdot\frac{12}{13}=$	**3p**
	$=\frac{13}{12}\cdot\frac{12}{13}=1$	**2p**
2.	$x_1+x_2=7$, $x_1x_2=10$	**2p**
	$2\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2=2\cdot 7-10=4$	**3p**
3.	$5x+1=36$	**3p**
	$x=7$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele de două cifre care sunt multipli de 11 sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AO=6$, $BO=8$, $AB=10$	**3p**
	$h=\frac{AO\cdot BO}{AB}=\frac{6\cdot 8}{10}=\frac{24}{5}=4,8$	**2p**
6.	$\cos B=\frac{AB}{BC}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{AB}{5\sqrt{2}}$	**3p**
	$AB=5$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot(-2)=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$2A-A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-2 & y\\ z+1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-3 & y\\ -2x+z+5 & -2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	**2p**
	$x=3$, $y=0$, $z=1$	**3p**
2.a)	$0\circ 2=0\cdot 2+0^2+2^2-1=3$	**3p**
	$1\circ\left(0\circ 2\right)=1\circ 3=1\cdot 3+1^2+3^2-1=12$	**2p**

b)	$x\circ(-x)=x\cdot(-x)+x^2+(-x)^2-1=-x^2+x^2+x^2-1=x^2-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-1=3\Leftrightarrow x^2-4=0$, de unde obținem $x=-2$ sau $x=2$	**3p**
c)	$mn+m^2+n^2-1=-mn\Leftrightarrow m^2+n^2+2mn=1\Leftrightarrow (m+n)^2=1$	**3p**
	Cum m și n sunt numere naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x\cdot\left(x^2+1-x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{(x-1)\left(x^2+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x^2+1}=$	**3p**
	$=\dfrac{2}{2}=1$	**2p**
c)	$f''(x)=\dfrac{4\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$, deci funcția f este convexă pe $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-3x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^2+3x-x^2-3x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_{-1}^{1}=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=0$	**3p**
b)	$\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3-x^2\right)e^x dx=\int_{0}^{1}\left(x^3+x^2+3x-x^3-x^2\right)e^x dx=3\int_{0}^{1}xe^x dx=3(x-1)e^x\Big\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=3$	**2p**
c)	$F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+c$, $c\in\mathbb{R}$ și, cum $F(0)=1\Rightarrow c=1$, deci $F(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+1$	**3p**
	$\int_{0}^{1}\dfrac{f(x)}{F^2(x)}dx=\int_{0}^{1}\dfrac{F'(x)}{F^2(x)}dx=-\dfrac{1}{F(x)}\Big\vert_{0}^{1}=-\dfrac{1}{F(1)}+\dfrac{1}{F(0)}=-\dfrac{12}{37}+1=\dfrac{25}{37}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 13

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{18}+\sqrt{2}-2^2=4-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}+\sqrt{2}-4=$	**3p**
	$=(4-4)+(-4+3+1)\sqrt{2}=0$	**2p**
2.	$f(1)=1+a^2$, deci $1+a^2=2$	**2p**
	$a^2=1$, deci $a=-1$ sau $a=1$	**3p**
3.	$3x+1=4$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de o cifră are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de o cifră sunt 5 numere impare, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	A este mijlocul segmentului BC, unde C este simetricul lui B față de A, deci $3=\frac{3+x_C}{2}$ și $1=\frac{7+y_C}{2}$	**3p**
	$x_C=3$, $y_C=-5$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=(\sin x-\cos x)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=0$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-3\cdot 3=$	**2p**
	$=4-9=-5$	**3p**
b)	$A\cdot M(x)=A\cdot(B+xI_2)=A\cdot B+xA$, $M(x)\cdot A=(B+xI_2)\cdot A=B\cdot A+xA$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $A\cdot B=B\cdot A$, obținem $A\cdot M(x)=M(x)\cdot A$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}13 & 12\\ 12 & 13\end{pmatrix}$, $A+M(x)=\begin{pmatrix}2+x & 4\\ 4 & 2+x\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A-3(A+M(x))=\begin{pmatrix}7-3x & 0\\ 0 & 7-3x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**

	$\begin{pmatrix} 7-3x & 0 \\ 0 & 7-3x \end{pmatrix} = I_2 \Leftrightarrow 7-3x=1$, de unde obținem $x=2$	**2p**
2.a)	$2020*(-3)=\frac{1}{3}\cdot 2020\cdot(-3)+2020+(-3)=$	**3p**
	$=-2020+2020-3=-3$	**2p**
b)	$6*x=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot x+6+x=3x+6$, $(6*x)*6=(3x+6)*6=\frac{1}{3}(3x+6)\cdot 6+3x+6+6=9x+24$	**3p**
	$9x+24=6\Leftrightarrow x=-2$	**2p**
c)	$x*\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\cdot x\cdot\frac{1}{x}+x+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}+x+\frac{1}{x}=\frac{3x^2+x+3}{3x}$, pentru orice număr real nenul x	**3p**
	$\frac{3x^2+x+3}{3x}=-3\Leftrightarrow 3x^2+10x+3=0$, de unde obținem $x=-3$ sau $x=-\frac{1}{3}$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3-3x+3\right)'=3x^2-3=$	**3p**
	$=3\left(x^2-1\right)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3x+3}{x+1}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-3+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}}=-3$	**3p**
c)	$f(0)=3$, $f'(0)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-3x+3$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^4+x+e^x-x-e^x\right)dx=\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{x^5}{5}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$	**2p**
b)	$\int_{1}^{e}\left(f(x)-x^4-e^x\right)\ln x\,dx=\int_{1}^{e}x\ln x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\Big\vert_{1}^{e}-\int_{1}^{e}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_{1}^{e}=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$\int_{0}^{a}\left(x^4+x+e^x\right)dx=\left(\frac{x^5}{5}+\frac{x^2}{2}+e^x\right)\Big\vert_{0}^{a}=\frac{a^5}{5}+\frac{a^2}{2}+e^a-1=\frac{2a^5+5a^2-10}{10}+e^a$	**3p**
	$\frac{2a^5+5a^2-10}{10}+e^a=\frac{5a^2+54}{10}+e^a\Leftrightarrow 2a^5=64$, deci $a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 14

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{15}{16}+\sqrt[3]{-8}=\frac{30+5-3}{15}\cdot\frac{15}{16}+(-2)=$	**3p**
	$=\frac{32}{15}\cdot\frac{15}{16}-2=2-2=0$	**2p**
2.	$f(4)=0\Rightarrow -4+a=0$	**3p**
	$a=4$	**2p**
3.	$2x+1=25\Rightarrow 2x=24$	**3p**
	$x=12$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A care sunt multipli de 6 sunt 30, 60 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**1p**
5.	$M(5,5)$	**3p**
	$OM=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{12}{13}\cdot\frac{13}{5}=\frac{12}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$B\cdot B+A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B+B\cdot A-(A+B)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\log_2 x & 0\\ 0 & \log_3 y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x=1\\ \log_3 y=1\end{cases}$, de unde obținem $x=2$ și $y=3$, care convin	**3p**
2.a)	$2020*5=2020+\frac{5}{5}+1=$	**3p**

	$=2020+1+1=2022$	**2p**
b)	$x*x=x+\frac{x}{5}+1=\frac{6x}{5}+1,\ (x*x)*x=\left(\frac{6x}{5}+1\right)*x=\frac{6x}{5}+1+\frac{x}{5}+1=\frac{7x}{5}+2$	**2p**
	$\frac{7x}{5}+2=\frac{24}{5}\Leftrightarrow 7x+10=24$, de unde obținem $x=2$	**3p**
c)	$5^x+\frac{5^{x+1}}{5}+1=11\Leftrightarrow 5^x+5^x=10\Leftrightarrow 2\cdot 5^x=10$	**3p**
	$5^x=5$, de unde obținem $x=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-3x^2+3=$	**3p**
	$=3\left(1-x^2\right)=3(1-x)(1+x),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-7}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$	**3p**
	$=f'(2)=-9$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
	$x\in[-1,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,1]$, $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$ și, cum $f(1)=11$, obținem $f(x)\leq 11$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}f(x)\cdot\left(x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+1}\cdot\left(x^2+1\right)dx=\int_{-1}^{1}xdx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)e^x f(x)\,dx=\int_{0}^{1}\left(x^2+1\right)e^x\cdot\frac{x}{x^2+1}\,dx=\int_{0}^{1}xe^x dx=(x-1)e^x\Big\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=0-(-1)e^0=1$	**2p**
c)	$\int_{0}^{a}\left(f(x)-f(-x)\right)dx=\int_{0}^{a}\left(\frac{x}{x^2+1}-\frac{-x}{x^2+1}\right)dx=\int_{0}^{a}\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_{0}^{a}=\ln\left(a^2+1\right)$	**2p**
	$\ln\left(a^2+1\right)=\ln(2a)\Rightarrow a^2+1=2a$, de unde obținem $a^2-2a+1=0$, deci $a=1$, care convine	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 15

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right):\frac{17}{60}=\left(\frac{60}{60}-\frac{40}{60}+\frac{45}{60}-\frac{48}{60}\right):\frac{17}{60}=$	**3p**
	$=\frac{17}{60}:\frac{17}{60}=1$	**2p**
2.	$f(1)=0$	**3p**
	$f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)=0$	**2p**
3.	$4x-3=25\Rightarrow 4x=28$	**3p**
	$x=7$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele x din mulțimea A care verifică inegalitatea $x^2-2x\le 0\Leftrightarrow x(x-2)\le 0$ sunt 1 și 2, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$AO=6$	**2p**
	$BO=6\Rightarrow \Delta AOB$ este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{6\cdot 8}{2}=$	**3p**
	$=24$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(1))=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-0\cdot 1=$	**3p**
	$=1-0=1$	**2p**
b)	$A\cdot A-2A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 4\\ 2 & 2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x-3 & x-2\\ x-2 & x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$, care convine	**2p**
2.a)	$(-1)*2020=(-1)\cdot 2020+(-1)+2020-2=$	**3p**
	$=-2020-1+2020-2=-3$	**2p**

b)	$x\cdot(2x)+x+2x-2=3\Leftrightarrow 2x^2+3x-5=0$	**3p**
	$x=-\frac{5}{2}$ sau $x=1$	**2p**
c)	$m*n=mn+m+n-2=m(n+1)+(n+1)-3=(m+1)(n+1)-3$, pentru orice numere naturale m și n	**2p**
	$(m+1)(n+1)-3=-1\Leftrightarrow (m+1)(n+1)=2$ și, cum m și n sunt numerele naturale, obținem $(0,1)$ și $(1,0)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=4x-5+\frac{1}{x}=$	**2p**
	$=\frac{4x^2-5x+1}{x}=\frac{(x-1)(4x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{2x^2-5x+\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(2x^2-5x+\ln x)'}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{4x^2-5x+1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{4x^2-5x+1}=0$	**2p**
c)	$f(1)=-3$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-3$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-x-1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3+x^2+x+1-x^2-x-1\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)'=\frac{4x^3}{4}+\frac{3x^2}{3}+\frac{2x}{2}+1=$	**3p**
	$=x^3+x^2+x+1=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_{1}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}\cdot e^x dx=\int_{1}^{2}\frac{(x^2+1)(x+1)}{x^2+1}\cdot e^x dx=\int_{1}^{2}(x+1)e^x dx=xe^x\Big\vert_{1}^{2}=2e^2-e$	**3p**
	$2e^2-e=(ae)^2-e$, de unde obținem $a^2=2$, deci $a=-\sqrt{2}$ sau $a=\sqrt{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 16

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_5 5-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{12}=1-\frac{6-4+3}{12}:\frac{5}{12}=1-\frac{5}{12}:\frac{5}{12}=$	**3p**
	$=1-1=0$	**2p**
2.	$f(n)=7\Rightarrow n^2+n+1=7\Rightarrow n^2+n-6=0$	**3p**
	Cum n este număr natural, obținem $n=2$	**2p**
3.	$x^2-9=x^2-6x+9\Rightarrow 6x=18$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele de două cifre de forma $\overline{aa}$ sunt 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88 și 99, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$	**1p**
5.	$AB=4$, $d(C,AB)=4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot d(C,AB)}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A și $AC=\frac{BC}{2}$	**2p**
	$m(\sphericalangle B)=30^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-1)-2\cdot(-1)=$	**3p**
	$=2-(-2)=4$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}$, $3A=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$, $4I_2=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+3A+4I_2=\begin{pmatrix}2-6+4 & -6+6+0\\ 3-3+0 & -1-3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$, $xA+yI_2=\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ -x & -x+y\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x+y & 2x\\ -x & -x+y\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=5$, $y=12$	**2p**

2.a)	$2020*1=2\cdot2020\cdot1-2\cdot2020-2\cdot1+3=$ $=-2+3=1$	**3p** **2p**
b)	$x*y=2xy-2x-2y+2+1=2\left(xy-x-y+1\right)+1=$ $=2\left(x\left(y-1\right)-\left(y-1\right)\right)+1=2\left(x-1\right)\left(y-1\right)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
c)	$x*x=2\left(x-1\right)^2+1$, $\left(x*x\right)*x=4\left(x-1\right)^3+1$, pentru orice număr real x $4\left(x-1\right)^3+1=x\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(4\left(x-1\right)^2-1\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$ sau $x=\frac{3}{2}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=9x^2-9=$ $=9\left(x^2-1\right)=9\left(x-1\right)\left(x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f\left(1\right)=-1$, $f'\left(1\right)=0$ Ecuaţia tangentei este $y-f\left(1\right)=f'\left(1\right)\left(x-1\right)\Rightarrow y=-1$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)\geq0$, pentru orice $x\in\left[1,+\infty\right)$, deci f este crescătoare pe intervalul $\left[1,+\infty\right)$ $f\left(2019\right)\leq f\left(2020\right)$ și $f\left(2021\right)\leq f\left(2022\right)$, deci $f\left(2019\right)+f\left(2021\right)\leq f\left(2020\right)+f\left(2022\right)$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^3\left(f\left(x\right)+4\right)dx=\int_0^3x^2dx=$ $=\frac{x^3}{3}\Big\vert_0^3=\frac{27}{3}=9$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1\frac{1}{f\left(x\right)+5}dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$ $=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\frac{\pi}{4}$	**3p** **2p**
c)	$\int_{\frac{1}{a}}^a f\left(\frac{1}{x}\right)dx=\int_{\frac{1}{a}}^a\left(\frac{1}{x^2}-4\right)dx=\left(-\frac{1}{x}-4x\right)\Big\vert_{\frac{1}{a}}^a=\frac{3}{a}-3a$ $\frac{3}{a}-3a=-8\Leftrightarrow3a^2-8a-3=0$ și, cum $a>0$, obținem $a=3$	**3p** **2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 17

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$m_g=\sqrt{xy}=\sqrt{25\cdot 144}=$	**3p**
	$=5\cdot 12=60$	**2p**
2.	$f(1)=1+m$	**2p**
	$1+m=0\Leftrightarrow m=-1$	**3p**
3.	$x+4=25$	**3p**
	$x=21$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 6 numere care **nu** sunt multipli de 3, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$	**1p**
5.	$M(3,4)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$OM=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 3=$	**3p**
	$=1-6=-5$	**2p**
b)	$M(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A+M(-1)=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A+M(-1)\right)=-16$	**3p**
	$\det B=\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=-16$, deci $\det\left(A+M(-1)\right)=\det B$	**2p**
c)	$M(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x+2 & 3x+1\\ 8 & 9\end{pmatrix}$, $A\cdot M(x)=\begin{pmatrix}x+6 & 10\\ 2x+2 & 5\end{pmatrix}$, $M(x)\cdot A-A\cdot M(x)=\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-4 & 3x-9\\ 6-2x & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=3$	**2p**
2.a)	$90*1=90+1-90=$	**3p**
	$=0+1=1$	**2p**

b)	$(x*y)*z=(x+y-90)*z=x+y-90+z-90=x+y+z-180$, pentru orice numere reale x, y și z	**2p**
	$x*(y*z)=x*(y+z-90)=x+y+z-90-90=x+y+z-180=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y și z	**3p**
c)	$(x^2)*(2x+1)=x^2+2x+1-90=x^2+2x-89$	**2p**
	$x^2+2x-15=0\Leftrightarrow x=-5$ sau $x=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=12x^2-12=$	**3p**
	$=12(x^2-1)=12(x-1)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-4x^3}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-12x+11}{x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-12+\dfrac{11}{x}\right)=-12$	**3p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-1,1]$, deci f este descrescătoare pe $[-1,1]$	**2p**
	Cum $f(-1)=19$, $f(1)=3$ și $f(1)\le f(x)\le f(-1)$, obținem $3\le f(x)\le 19$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
2.a)	$\int_2^4\left(f(x)-\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_2^4 5x\,dx=\dfrac{5x^2}{2}\Big\vert_2^4=$	**3p**
	$=\dfrac{5}{2}\cdot(16-4)=30$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\dfrac{5x^2+2020}{2}+\ln x\right)'=$	**2p**
	$=\dfrac{10x}{2}+\dfrac{1}{x}=5x+\dfrac{1}{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**3p**
c)	$\int_1^e(f(x)-5x)\ln x\,dx=\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx=\dfrac{\ln^2 x}{2}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{\ln^2 e}{2}-\dfrac{\ln^2 1}{2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 18

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=\frac{2\left(\sqrt{3}+1\right)}{3-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=$	**3p**
	$=\sqrt{3}+1-\sqrt{3}-1=0$	**2p**
2.	$f\left(0\right)=3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=3$	**2p**
3.	$2x+1=4-x\Leftrightarrow 3x=3$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 45 de numere impare, deci sunt 45 de cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$AB=2$	**2p**
	A este mijlocul segmentului BC, deci $BC=2AB=4$	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{4}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=2\cdot 1-2\cdot 1=0$	**3p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$, $xA=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}6 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & x\\ 2x & x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=3$	**2p**
c)	$\det\left(A+I_2\right)=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=4$, $\det\left(A-I_2\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$, $\det\left(aI_2\right)=a^2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a^2=2\Leftrightarrow a=-\sqrt{2}$ sau $a=\sqrt{2}$	**2p**
2.a)	$\left(-1\right)\circ 2020=\left(-1\right)\cdot 2020+\left(-1\right)+2020-5=$	**3p**
	$=-1-5=-6$	**2p**

b)	$x \circ x = x^2 + 2x - 5$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$ sau $x = 1$	**3p**
c)	$m \cdot (-2) + m + (-2) - 5 = 1 \cdot (-m) + 1 + (-m) - 5 \Leftrightarrow m = 3$	**3p**
	$m \circ (-m) = 3 \circ (-3) = 3 \cdot (-3) + 3 + (-3) - 5 = -14$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - \left(x^2 - 1\right)}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} =$	**3p**
	$= \dfrac{x^2 + 1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1$	**2p**
	$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{x}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x) = -\dfrac{2}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$	**2p**
	$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$, deci funcția f este concavă	**3p**
2.a)	$\int_0^1 \left(f(x) - 2\right) dx = \int_0^1 x^3 dx = \dfrac{x^4}{4}\Big|_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{4} - 0 = \dfrac{1}{4}$	**2p**
b)	$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$	**2p**
	$F(2) = 7 \Rightarrow c = -1$, deci $F(x) = \dfrac{x^4}{4} + 2x - 1$	**3p**
c)	$\int_0^1 e^x \left(f(x) - x^3 + x^2\right) dx = \int_0^1 e^x \left(x^2 + 2\right) dx = e^x \left(x^2 + 2\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 2xe^x dx =$	**3p**
	$= 3e - 2 - 2\left(xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = 3e - 4$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 19

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\frac{14}{12}=\frac{6-8+9}{12}:\frac{14}{12}=$	**3p**
	$=\frac{7}{12}\cdot\frac{12}{14}=\frac{1}{2}$	**2p**
2.	$f(1)=0\Rightarrow 1+a+1=0$	**3p**
	$a=-2$	**2p**
3.	$3x-4=x+20\Rightarrow 2x=24$	**3p**
	$x=12$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea M are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea M sunt 5 numere pare, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	Înălțimea din C a triunghiului ABC este distanța de la punctul C la dreapta AB	**3p**
	$d(C,AB)=4$	**2p**
6.	$\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{12}{13}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=$	**3p**
	$=4-6=-2$	**2p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}$	**3p**
	$x\begin{pmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}5x & 5x\\ 5x & 5x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=\frac{1}{5}$	**2p**
c)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}8 & 5\\ 20 & 13\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}13 & 20\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, deci $A\cdot B-B\cdot A-C=\begin{pmatrix}-6 & -16\\ 14 & 4\end{pmatrix}$	**3p**
	$2X=\begin{pmatrix}-6 & -16\\ 14 & 4\end{pmatrix}$, deci $X=\begin{pmatrix}-3 & -8\\ 7 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$2020\circ(-4)=2020\cdot(-4)+4\cdot 2020+4\cdot(-4)+12=$	**3p**
	$=-16+12=-4$	**2p**

b)	$x\circ y=xy+4x+4y+16-4=$	**2p**
	$=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
c)	$x\circ x=(x+4)^2-4$, pentru orice număr real x	**2p**
	$(x+4)^2-4=x\Leftrightarrow(x+4)(x+3)=0\Leftrightarrow x=-4$ sau $x=-3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(4x^3\right)'+\left(6x^2\right)'+5'=$	**2p**
	$=12x^2+12x=12x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-4x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12x^2+12x}{6x^2+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(6+\frac{5}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\dfrac{12}{6}=2$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=0$	**2p**
	$x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-1]$, $x\in[-1,0]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-1,0]$, $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-4x^2\right)dx=\int_0^2 3x^3dx=\dfrac{3x^4}{4}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{3}{4}\cdot 2^4=12$	**2p**
b)	$F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{3x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F(0)=2020\Rightarrow c=2020$, deci $F(x)=\dfrac{3x^4}{4}+\dfrac{4x^3}{3}+2020$	**3p**
c)	$\int_1^m\dfrac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^m(3x+4)dx=\left(\dfrac{3x^2}{2}+4x\right)\Big\vert_1^m=\dfrac{3m^2}{2}+4m-\dfrac{11}{2}$	**3p**
	$\dfrac{3m^2}{2}+4m-\dfrac{11}{2}=\dfrac{17}{2}\Rightarrow 3m^2+8m-28=0$ și, cum $m>1$, obținem $m=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Test 20

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right):15=\frac{4-1}{2}\cdot\frac{9-1}{3}\cdot\frac{16-1}{4}:15=$	**3p**
	$=15:15=1$	**2p**
2.	$f(x)-f(-x)=x^2+5-\left((-x)^2+5\right)=$	**3p**
	$=x^2+5-x^2-5=0$, pentru orice număr real x	**2p**
3.	$4x-3=2x+1\Rightarrow 2x=4$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Soluțiile ecuației $x^2-3x+2=0$ sunt 1 și 2, care aparțin mulțimii A, deci sunt 2 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**1p**
5.	$m_{AB}=\frac{0-3}{3-0}=-1$	**2p**
	Ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta AB este $y=-x$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{ABCD}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{6\cdot 4}{2}=$	**3p**
	$=12$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$B(0)=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(0))=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-2)\cdot 5=$	**3p**
	$=-9+10=1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A+I_2=\begin{pmatrix}-1+1 & 0\\ 0 & -1+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$	**2p**
c)	$B(x)=A-xI_2=\begin{pmatrix}3-x & -2\\ 5 & -3-x\end{pmatrix}\Rightarrow \det(B(x))=\begin{vmatrix}3-x & -2\\ 5 & -3-x\end{vmatrix}=-9+x^2+10=$	**3p**
	$=x^2+1\geq 1$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$2020*(-1)=2020\cdot(-1)+2020+(-1)+4=$	**3p**
	$=-1+4=3$	**2p**
b)	$x*y=xy+x+y+1+3=$	**3p**
	$=x(y+1)+(y+1)+3=(x+1)(y+1)+3$, pentru orice numere reale x și y	**2p**

c)	$(m+1)(n+1)+3=2$	**2p**
	$(m+1)(n+1)=-1$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem $(-2,0)$ și $(0,-2)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=8x^3-8x=$	**3p**
	$=8x\left(x^2-1\right)=8x(x-1)(x+1),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(1)=-5,\ f'(1)=0$	**2p**
	Ecuaţia tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-5$	**3p**
c)	$f'(-1)=f'(0)=f'(1)=0,\ x\in[-1,0]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-1,0]$ și $x\in[0,1]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0,1]$	**3p**
	Cum $f(-1)=f(1)=-5$ și $f(0)=-3\Rightarrow -5\leq f(x)\leq -3$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^4\left(f(x)+\sqrt{x}\right)dx=\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big\vert_1^4=$	**3p**
	$=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21$	**2p**
b)	$F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}+2020\right)'=\frac{3x^2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=x^2-\sqrt{x}=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_1^2\left(f(x)+\sqrt{x}\right)e^xdx=\int_1^2 x^2e^xdx=x^2e^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 2xe^xdx=4e^2-e-2\left(xe^x\Big\vert_1^2-\int_1^2 e^xdx\right)=$	**3p**
	$=4e^2-e-2\left(2e^2-e\right)+2e^x\Big\vert_1^2=2e^2-e=e(2e-1)$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$10-2\cdot 3=4$	**2p**
	$10+2\cdot 3=16\Rightarrow (10-2\cdot 3)(10+2\cdot 3)=4\cdot 16=64$	**3p**
2.	$x_1+x_2=7$	**2p**
	$x_1x_2=10\Rightarrow 2(x_1+x_2)-x_1x_2=14-10=4$	**3p**
3.	$\log_2(x-2020)=\log_2 3^2\Rightarrow x-2020=9$	**3p**
	$x=2029$, care convine	**2p**
4.	10% din 200 reprezintă $\frac{10}{100}\cdot 200=20$	**3p**
	Prețul după scumpire este $200+20=220$ de lei	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(3,4)$	**2p**
	$OM=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=5$	**3p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$\cos 150^\circ=\cos(180^\circ-30^\circ)=-\cos 30^\circ=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \sin 60^\circ+\cos 150^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-2 & 9\\ 0 & -2\end{vmatrix}=(-2)\cdot(-2)-0\cdot 9=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$B(x)\cdot B(-x)=\begin{pmatrix}-x^2 & 6x^2\\ 0 & -x^2\end{pmatrix}$, $B(x)\cdot B(-x)+B(x)=\begin{pmatrix}-x^2+x & 6x^2-3x\\ 0 & -x^2+x\end{pmatrix}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}-x^2+x & 6x^2-3x\\ 0 & -x^2+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\det(B(1))=1$, $(B(1))^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=(B(1))^{-1}\cdot A\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 0 & -2\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$3\circ\frac{1}{3}=\frac{9+\frac{1}{9}}{3\cdot\frac{1}{3}}=$	**3p**
	$=9+\frac{1}{9}=\frac{82}{9}$	**2p**
b)	$x\circ y-2=\frac{x^2+y^2}{xy}-2=\frac{x^2+y^2-2xy}{xy}=\frac{(x-y)^2}{xy}$	**3p**
	Cum $x>0$, $y>0$ și $(x-y)^2\geq 0$, obținem $x\circ y\geq 2$, pentru orice $x, y\in M$	**2p**
c)	$a^4+\frac{1}{a^4}-2=0\Leftrightarrow\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2=0$, deci $a^4=1$	**3p**
	$a=-1$, care nu convine, $a=1$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^3-12x+3\right)'=3x^2-12=$	**3p**
	$=3\left(x^2-4\right)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-(-6)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=$	**3p**
	$=3(3-2)(3+2)=15$	**2p**
c)	$x\in[-2,2]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[-2,2]$	**2p**
	Cum $f(-2)=19$ și $f(2)=-13$, obținem $-13\leq f(x)\leq 19$, pentru orice $x\in[-2,2]$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^5-1\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^5+x+1-x^5-1\right)dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\vert_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$	**3p**
b)	$\int_{0}^{1}x^{2020}\left(f(x)-x-1\right)dx=\int_{0}^{1}x^{2025}dx=\frac{x^{2026}}{2026}\Big\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{2026}$	**2p**
c)	$g(x)=1+\frac{1}{x}\Rightarrow V=\pi\int_{1}^{2}g^2(x)\,dx=\pi\int_{1}^{2}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(x+2\ln x-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_{1}^{2}=\pi\left(2\ln 2+\frac{3}{2}\right)$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3\left(2-\sqrt{20}\right)+\sqrt{180}=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg(5x-1)=\lg 2+\lg 7$.

5p **4.** După o scumpire cu 30% un obiect costă 5200 de lei. Determinaţi preţul iniţial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(4,8)$ şi $C(4,0)$. Calculați distanța de la punctul B la dreapta AC.

5p **6.** Arătați că $\dfrac{2\cos 30^\circ}{2\operatorname{tg}45^\circ+1}=\operatorname{tg}30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 2a+1 \\ a & 2a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(10))=10$.

5p **b)** Demonstrați că $\big(A(a)-A(b)\big)\big(A(a)-A(b)\big)=3(a-b)\big(A(a)-A(b)\big)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(2))+\det(A(3))+\ldots+\det(A(n))=35$.

2. Pe mulțimea $M=\left[\sqrt{2},+\infty\right)$ se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x*y=\sqrt{\left(x^2-2\right)\left(y^2-2\right)+2}$.

5p **a)** Arătați că $4*\sqrt{3}=4$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului $x=\sqrt{6}$, în raport cu legea de compoziție „$*$”.

5p **c)** Calculați $\sqrt{2}*\sqrt{3}*\sqrt{4}*\ldots*\sqrt{2020}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\sqrt{x}(\ln x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x}(\ln x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=\dfrac{1}{e}$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt{e}f(x)+4\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 2x-1, x\in(-\infty,0] \\ \dfrac{3x-1}{x+1}, x\in(0,+\infty) \end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{-1}^{0} e^{x} f(x)\,dx = \frac{5-3e}{e}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{11}\left(\sqrt{11}+1\right)-\left(\sqrt{11}+3\right)=8$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-5x+6$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+2}=3\sqrt{3}$.

5p **4.** Se consideră patru puncte distincte, oricare trei dintre ele necoliniare. Calculați numărul dreptelor determinate de câte două dintre aceste puncte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,2)$ și $N(2,1)$. Determinați coordonatele simetricului punctului M față de punctul N.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=3\sqrt{2}$, $BC=9$ și $AC=3\sqrt{5}$. Calculați măsura unghiului B.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1-10a & 8a\\ -5a & 1+4a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-5$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-6ab)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $A(m)\cdot A(n)=A(6-5mn)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-3x-3y+12$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele numere reale x pentru care $x*x*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x+2020$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=5(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(-\infty,0]$.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=2025$ **nu** admite nicio soluție în intervalul $[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este crescătoare pe $[0,\pi]$.

5p **b)** Calculați $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 2f(x)f'(x)\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\,f(x)\,dx=1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(5+\frac{1}{2}\right)\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{99}{4}$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+4$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=8-x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x+1)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, preţul unei tablete este 630 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ şi $B(3,5)$. Calculați lungimea segmentului AM, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\cos^2 45^\circ-\sin^2 30^\circ=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}8 & 6\\ 6 & 5\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}2+a & 2\\ 2 & 1+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det M=4$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(-a)+a^2\cdot I_2=M$, pentru orice număr real a, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $M\cdot X=A(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-10$.

5p **a)** Arătaţi că $5*5=0$.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care $n^2*n<-4$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x^2-18$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^3+2x^2+x-2}{x-1}=2$.

5p **c)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=12x+2020$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2+1\right)-2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x+2\right)dx=0$.

5p **b)** Calculaţi $\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3+2\right)e^x\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real pozitiv m, știind că $\int_{1}^{2}f(x)\,dx=m^2+1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)^2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-4x+m=0$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+1}=3x+1$.

5p **4.** După o ieftinire cu 25%, preţul unui obiect este 750 de lei. Determinați preţul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$ şi $B(8,6)$. Determinați coordonatele punctului C, știind că $OABC$ este paralelogram.

5p **6**. Arătaţi că $\sqrt{3}\cos 30^\circ+\sin 30^\circ+\frac{1}{2}\cos 90^\circ=2$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(a)=I_2+aA$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(1))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $M(a)\cdot M(b)-M(a+b)=2abM(0)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $X\cdot M(1)=M(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+4x+4y+3$.

5p **a)** Arătaţi că $1*(-1)=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=4(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x*\frac{1}{4}*(-x)=19$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+4x+4}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+1\right)\left(f(x)-x^2\right)dx=1$.

5p **b)** Calculaţi $\int_{-1}^1 x f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural n, ştiind că $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{n^2}{3}+\frac{\pi}{4}-1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(3-3\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{5}{14}=1$.

5p **2.** Determinați numerele reale m, știind că punctul $A(m,6)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{14-x}=\sqrt{3x+6}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să verifice inegalitatea $n(n-10)(n-11)\le 0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(-1,4)$ și $C(3,7)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin 30^\circ\cos 30^\circ+2\sin 45^\circ\cos 45^\circ-\sin 60^\circ\cos 60^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x-3 & 1\\ 1 & 3-x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-5$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=10\cdot I_2$.

2) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=2x+y-3xy$.

5p **a)** Arătați că $1*2=-2$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*(x-1)=-1$.

5p **c)** Dați exemplu de două numere iraționale a și b pentru care $a*b\in\mathbb{N}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5-5x^4+5x^3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=5x^2(x-3)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $-27\le f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[0,3]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+x+2, & x\in(-\infty,0)\\ e^x+1, & x\in[0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)\,dx=e$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Calculați $\int_{-1}^{1} x f(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi primul termen al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ în care $b_3=12$ şi raţia $q=2$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x)\geq f(1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(x+1)=\log_5(11-x)$.

5p **4.** Calculaţi $C_{11}^9-C_{11}^2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(1,0)$ şi $C(5,4)$. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

5p **6**. Arătaţi că $\dfrac{\sin 135^\circ}{\cos 45^\circ}=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -4 & -3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstraţi că $A\cdot A\cdot A=A$.

5p **c)** Determinaţi matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X=I_2+3A$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy-2x-2y+6$.

5p **a)** Arătaţi că $2*2020=2$.

5p **b)** Demonstraţi că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale m şi n pentru care $m*n=13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=2xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că $xe^x\geq e^x-1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x+4}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2(x+4)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Calculaţi $\int_{-2}^0 f(x)\,dx$.

5p **c)** Demonstraţi că $\int_{-3}^a f'(x)f''(x)\,dx=2\left(\dfrac{1}{(a+4)^4}-1\right)$, pentru orice $a\in(-3,+\infty)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}+1\right)-\left(2-\frac{4}{3}\right)=0$.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+3$ conține punctul $A(2,5)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+4}-2=x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$ și $B(2,-2)$. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și $C(4,a)$ sunt coliniare.

5p **6.** Diagonala pătratului $MNPQ$ are lungimea de $6\sqrt{2}$. Calculați perimetrul acestui pătrat.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det(A-B)=1$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $C=A\cdot A+B\cdot B$ **nu** este inversabilă.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot X=X\cdot B$, unde $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ x & y\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{xy+1}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Determinați numărul $x\in M$ pentru care $x*2=\frac{3}{2}$.

5p **c)** Calculați $\lg 2*\lg 4*\lg 6*\lg 8*\lg 10$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^{2020}+1, & x\in(0,1]\\ \frac{x+1}{x}, & x\in(1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că funcția f este continuă în $x_0=1$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f' este crescătoare pe $(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$ și $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x\,f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Calculați $\int_{e}^{e^2} \frac{g(x)}{xe^x}\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{1}^{e} \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = e^e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1,75:0,25-2\left(\frac{17}{4}-2,25\right)=3$.

5p **2.** Determinaţi imaginea funcţiei $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(2x+4)=4$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20%, preţul unui produs este de 144 lei. Determinaţi preţul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,a)$ şi $B(5,0)$, unde a este număr real. Determinaţi numerele reale a, știind că segmentul AB are lungimea egală cu 5.

5p **6.** Arătați că $\sin^2 130^\circ+\cos^2 50^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -2 & -4\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+A=O_2$.

5p **c)** Demonstraţi că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $\det X=\det(X+I_2)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=-xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că $1\circ\sqrt{2}=1$.

5p **b)** Demonstraţi că $x\circ y=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numărul real x pentru care $3^x\circ 5^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2-63$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x^2-9}$.

2. Se consideră funcţiile $F:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^2}{x+1}$ şi $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\frac{1}{(x+1)^2}$.

5p **a)** Demonstraţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{F(x)}\,dx=\ln\frac{8}{3}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi suma primilor patru termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1=2$ şi $a_4=11$.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x+2}-2=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,5)$ şi $B(3,1)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul B.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=8$, $AC=6$ şi $BC=10$. Calculaţi $\cos B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ şi $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A+I_3)=4$.

5p **b)** Demonstraţi că $A\cdot A\cdot A+A=2A\cdot A$.

5p **c)** Determinaţi mulţimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $B(x)=A+xI_3$ este inversabilă.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+ay+1$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $2020*0=2021$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că legea de compoziţie „$*$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a=-1$, determinaţi numărul real x pentru care $4^x*2^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x-2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul $x=3$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f' este crescătoare pe $(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\displaystyle\int_1^e\frac{\sqrt{x^2+1}}{f(x)}dx=1$.

5p **b)** Calculaţi $\displaystyle\int_1^2 f^2(x)dx$.

5p **c)** Demonstraţi că $\displaystyle\int_0^{2020} f(x)dx\leq\int_0^a f(x)dx$, pentru orice $a\in[2020,+\infty)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2,5:0,5-5\left(6,5-\frac{11}{2}\right)=0$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2+mx+1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1+x_2+2x_1x_2=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1+\sqrt{x-2}=3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,6)$, $B(4,6)$ și $C(-4,0)$. Determinați perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați $\cos A$, știind că A este unghi ascuțit astfel încât $\sin A=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A+I_2\right)=5$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A=4A$.

5p **c)** Demonstrați că există o infinitate de matrice $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, pentru care $A\cdot X=X\cdot A$.

2) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=\frac{xy+x+y-1}{2}$.

5p **a)** Arătați că $1*2=2$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x*x\le 1$.

5p **c)** Calculați $(-1)*0*1*\ldots*2020$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-1)(x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\frac{2}{3}\le-\frac{5}{18}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2020}-2020x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)+2020x-1\right)dx=\frac{1}{2021}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe $[1,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\int_0^1\left(f(-x)-f(x)\right)e^x dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{2}:0,5-\frac{1}{4}:0,25=0$.

5p **2.** Calculați $f(-1)\cdot f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x-2}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 1000 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ şi $B(6,3)$. Calculați distanța de la punctul O la mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=4$ și $B=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x,y)=\begin{pmatrix}x & 1\\ y & -1\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det A=-4$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A-2B(x,y)\right)=0$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot B(x,y)=B(x,y)\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+2(x+y)+2$.

5p **a)** Arătaţi că $2020\circ(-2)=-2$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+(x-1)^2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3x^2+2x-2$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=3$.

5p **c)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta $y=3x+1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x^3+2x+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^3-2x-2\right)dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_{0}^{2}e^x\left(f(x)-x^5-x^3-3x-1\right)dx=-2$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}:0,5\right)\cdot\frac{12}{13}=1$.

5p **2.** Arătați că $2\left(x_1+x_2\right)-x_1x_2=4$, unde x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației $x^2-7x+10=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{5x+1}=6$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6,0)$ și $B(0,8)$. Determinați lungimea înălțimii din vârful O al triunghiului AOB.

5p **6**. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $BC=5\sqrt{2}$ și $m(\sphericalangle B)=45°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $2A-A\cdot A=I_2$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x, y și z, pentru care $A\cdot\begin{pmatrix}x-2 & y\\ z+1 & 1\end{pmatrix}-I_2=O_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+x^2+y^2-1$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ(0\circ 2)=12$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x pentru care $x\circ(-x)=3$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m\circ n=-mn$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+3x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-3x\right)dx=0$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - x^3 - x^2 \right) e^x dx = 3$.

5p **c)** Se consideră funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva funcției f pentru care $F(0)=1$. Demonstrați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{F^2(x)} dx = \frac{25}{37}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 13

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{16}-\sqrt{32}+\sqrt{18}+\sqrt{2}-2^2=0$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+a^2$, unde a este număr real. Determinaţi numerele reale a, pentru care $f(1)=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{3x+1}=3^4$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ şi $B(3,7)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului B față de punctul A.

5p **6**. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=B+xI_2$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot M(x)=M(x)\cdot A$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A-3\left(A+M(x)\right)=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\frac{1}{3}xy+x+y$.

5p **a)** Arătaţi că $2020*(-3)=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $(6*x)*6=6$.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x*\frac{1}{x}=-3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2-3\right)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)-x^3}{x+1}=-3$.

5p **c)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4+x+e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x-e^x\right)dx=\frac{2}{5}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{1}^{e}\left(f(x)-x^4-e^x\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a pentru care $\int_{0}^{a}f(x)dx=\frac{5a^2+54}{10}+e^a$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 14

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{15}{16}+\sqrt[3]{-8}=0$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(4,0)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x+1}=5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 6.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,5)$ şi $B(7,5)$. Determinaţi lungimea segmentului OM, unde punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Pentru $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=\frac{5}{13}$, arătați că $\operatorname{tg}x=\frac{12}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $B\cdot B+A=O_2$.

5p **c)** Determinați $x,y\in(0,+\infty)$, pentru care $A\cdot B+B\cdot A-(A+B)=\begin{pmatrix}\log_2 x&0\\0&\log_3 y\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x+\frac{y}{5}+1$.

5p **a)** Arătaţi că $2020*5=2022$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $(x*x)*x=\frac{24}{5}$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $5^x*5^{x+1}=11$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3+3x+9$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-7}{x-2}=-9$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\le 11$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot(x^2+1)\,dx=0$.

5p **b)** Calculaţi $\int_{0}^{1}(x^2+1)e^x f(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_{0}^{a}(f(x)-f(-x))\,dx=\ln(2a)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 15

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right):\frac{17}{60}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)\cdot f(5)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x-3}=5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să verifice inegalitatea $x^2-2x\le 0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,6)$ şi $B(6,0)$. Arătați că triunghiul AOB este isoscel.

5p **6**. Calculați aria triunghiului ABC dreptunghic în A cu $AB=6$ și $AC=8$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}-1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(1))=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A-2A=I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=I_2$.

2) Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=xy+x+y-2$.

5p **a)** Arătați că $(-1)*2020=-3$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(2x)=3$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $m*n=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-5x+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(4x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{f(x)}=0$.

5p **c)** Determinaţi ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2-x-1\right)dx=0$.

5p **b)** Arătaţi că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\int_{1}^{2}\frac{f(x)}{x^2+1}\cdot e^x dx=(ae)^2-e$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 16

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\log_5 5-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right):\frac{5}{12}=0$.

5p **2.** Determinați numărul natural n pentru care punctul $A(n,7)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2-9}=x-3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie de forma $\overline{aa}$, unde a este cifră nenulă.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(5,4)$ şi $C(3,0)$. Calculați aria triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați măsura unghiului B al triunghiului ABC dreptunghic în A, știind că $AC=3$ și $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=4$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+3A+4I_2=O_2$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x și y astfel încât $A\cdot A\cdot A=xA+yI_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Arătați că $2020*1=1$.

5p **b)** Demonstraţi că $x*y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $(x*x)*x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3-9x+5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=9(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(2019)+f(2021)\le f(2020)+f(2022)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\left(f(x)+4\right)dx=9$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\frac{1}{f(x)+5}dx$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>0$, pentru care $\int_{\frac{1}{a}}^{a}f\left(\frac{1}{x}\right)dx=-8$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Test 17

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media geometrică a numerelor $x=25$ și $y=144$ este egală cu 60.

5p **2.** Determinaţi numărul real m pentru care $f(1)=0$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+m$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+4}=5$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să **nu** fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$ și $B(8,4)$. Determinați lungimea medianei din vârful O al triunghiului AOB.

5p **6.** Calculați $\sin x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}x & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Arătați că $\det\left(A+M(-1)\right)=\det B$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot A-A\cdot M(x)=B$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y-90$.

5p **a)** Arătați că $90*1=1$.

5p **b)** Demonstrați că $(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(x^2\right)*(2x+1)=-74$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3-12x+11$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=12(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-4x^3}{x}$.

5p **c)** Demonstrați că $3\le f(x)\le 19$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_2^4\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=30$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\dfrac{5x^2+2020}{2}+\ln x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Calculați $\int_1^e\left(f(x)-5x\right)\ln x\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 18

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{\sqrt{3}-1}-\left(\sqrt{3}+1\right)=0$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{2x+1}=7^{4-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$ și $B(2,5)$. Determinați lungimea segmentului BC, unde punctul C este simetricul punctului B față de punctul A.

5p **6.** Calculați $\sin x$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A+I_2)+\det(A-I_2)=\det(aI_2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+x+y-5$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 2020=-6$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=-2$.

5p **c)** Știind că m este număr real astfel încât $m\circ(-2)=1\circ(-m)$, calculați $m\circ(-m)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1+\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-2\right)dx=\frac{1}{4}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(2)=7$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 e^x\left(f(x)-x^3+x^2\right)dx=3e-4$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 19

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\right):\frac{14}{12}=\frac{1}{2}$.

5p **2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(1,0)$ aparține graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x-4}=\sqrt{x+20}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19\}$, acesta să fie număr par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,4)$, $B(4,4)$ şi $C(4,8)$. Determinaţi lungimea înălțimii din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin x=\frac{12}{13}$, știind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{5}{13}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x(A+B)=C$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot B-B\cdot A=2X+C$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Arătați că $2020\circ(-4)=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+6x^2+5$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=12x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-4x^3}$.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^3+4x^2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^2\left(f(x)-4x^2\right)dx=12$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(0)=2020$.

5p **c)** Determinaţi numărul real m, $m>1$, ştiind că $\int_1^m\frac{f(x)}{x^2}dx=\frac{17}{2}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Test 20

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2-\frac{1}{2}\right)\left(3-\frac{1}{3}\right)\left(4-\frac{1}{4}\right):15=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+5$. Arătați că $f(x)-f(-x)=0$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{4x-3}=\sqrt{2x+1}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, acesta să fie soluție a ecuației $x^2-3x+2=0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(3,0)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin $O(0,0)$ și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6**. Calculați aria rombului $ABCD$, știind că $AC=6$ și $BD=4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=A-xI_2$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A+I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Demonstrați că $\det(B(x))\geq 1$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+x+y+4$.

5p **a)** Arătați că $2020*(-1)=3$.

5p **b)** Demonstrați că $x*y=(x+1)(y+1)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi pentru care $m*n=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^4-4x^2-3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=8x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $-5\leq f(x)\leq -3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)+\sqrt{x}\right)dx=21$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{2x\sqrt{x}}{3}+2020$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+\sqrt{x}\right)e^x dx=e(2e-1)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{5}\left(1+2\sqrt{5}\right)-\sqrt{5}=10$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+1$. Arătați că $f(1)=f(2)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2-21\right)=\log_5 4$.

5p **4.** După o scumpire cu 10%, un obiect costă 220 de lei. Determinaţi preţul iniţial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,8)$ şi $B(0,4)$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, determinați coordonatele punctului M.

5p **6**. În triunghiul ABC, $m(\sphericalangle B)=m(\sphericalangle C)=60°$. Calculați cosinusul unghiului A.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ și $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $B\cdot A+B=O_2$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $\det(B+nA)=\det B+n\det A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+2y+1$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ(-1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ\left(-\frac{1}{2}\right)=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” **nu** admite element neutru.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)+\ln\left(x^2+1\right)<\frac{5}{2}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2(x+1)f(x)\,dx=e^2-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=1-\ln 2$.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^1 e^x\ln(x+1)\,dx=e\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(10+\frac{1}{2}\right)\left(10-\frac{1}{2}\right)=\frac{399}{4}$.

5p **2.** Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=10-x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7\left(x^2+13\right)=2$.

5p **4.** După o ieftinire cu 20%, prețul unei tablete este 800 de lei. Determinați prețul tabletei înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,7)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB. Calculați lungimea segmentului AM.

5p **6.** Arătați că $2\sin^2 30^\circ-\sin^2 45^\circ=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a+1 & 1 \\ 1 & a-1 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Arătați că $A(a)\cdot A(-a)=\left(2-a^2\right)I_2$, pentru orice număr real a, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, știind că $A(1)\cdot X=A(2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+xy-x-y+1$.

5p **a)** Arătați că $3*2=11$.

5p **b)** Demonstrați că $x*(-x)=1$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*4=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați imaginea funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4}\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f^2(x)-1\right)dx=2\ln\frac{5}{4}$.

5p **c)** Determinați $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, primitiva lui f pentru care $F(0)=0$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{3}\left(2\sqrt{3}+1\right)-\sqrt{3}=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+2$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x-1}=3$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, un obiect costă 180 de lei. Determinați prețul inițial al obiectului.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,1)$, $B(-4,1)$ şi $C(0,4)$. Determinaţi lungimea înălțimii din vârful C în triunghiul ABC.

5p **6.** Arătați că $\sqrt{3}\cdot\sin 60^\circ-\sqrt{2}\cdot\cos 45^\circ=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $3A-A\cdot A=2I_2$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $(xA-I_2)(xA-I_2)=5A-I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x^2+(x+1)(y+1)+y^2$.

5p **a)** Arătaţi că $3\circ(-1)=10$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ 1\geq 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=-\frac{1}{6}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcției f pentru care $F(0)=0$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)\right)dx=\ln\frac{5}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(10-2\cdot 3)(10+2\cdot 3)=64$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-7x+10=0$. Arătați că $2(x_1+x_2)-x_1x_2=4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-2020)=2\log_2 3$.

5p **4.** Un obiect costă 200 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 10%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ și $B(4,4)$. Calculați distanța de la punctul $O(0,0)$ la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sin 60^\circ+\cos 150^\circ=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-2 & 9\\ 0 & -2\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & -3x\\ 0 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=4$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(x)\cdot B(-x)+B(x)=A$.

5p **c)** Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $B(1)\cdot X=A$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$.

5p **a)** Arătați că $3\circ\dfrac{1}{3}=\dfrac{82}{9}$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y\geq 2$, pentru orice $x,\ y\in M$.

5p **c)** Determinați $a\in M$, pentru care $a^2\circ\dfrac{1}{a^2}=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\left(x^2-12\right)+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+6}{x-3}=15$.

5p **c)** Demonstrați că $-13\leq f(x)\leq 19$, pentru orice $x\in[-2,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^5-1\right)dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{1}x^{2020}\left(f(x)-x-1\right)dx$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}\left(f(x)-x^5\right)$ este egal cu $\pi\left(2\ln 2+\dfrac{3}{2}\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_7 = a_3 + 4r$ $15 = 7 + 4r \Rightarrow r = 2$	**2p** **3p**
2.	$3x - 5 \geq 2 \cdot (-2) + 4$ $3x \geq 5 \Rightarrow x \in \left[\frac{5}{3}, +\infty\right)$	**2p** **3p**
3.	$3^{4x} = 3$ $4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$	**2p** **3p**
4.	$A_6^2 = \frac{6!}{(6-2)!} = 30$ $P_3 = 3!,\ P_3 = 6,\ \frac{A_6^2}{P_3} = 5$	**2p** **3p**
5.	$AB = \sqrt{(0-0)^2 + (-5-3)^2} = 8$, $AC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1-3)^2} = 4\sqrt{2}$ și $BC = \sqrt{(4-0)^2 + (-1+5)^2} = 4\sqrt{2}$ Cum $AB^2 = AC^2 + BC^2$, triunghiul ACB dreptunghic și cum $AC = BC$, ΔACB este dreptunghic isoscel	**3p** **2p**
6.	$\frac{\text{tg}60^o}{\text{ctg}30^o \cdot \cos 45^o} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} =$ $= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - (-3) \cdot 1 =$ $= -4 + 3 = -1$	**3p** **2p**
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-3 & 2-2 \\ -6+6 & -3+4 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	**3p** **2p**
c)	$AX - I_2 = 2021A \Leftrightarrow AX = I_2 + 2021A$. Matricea A este inversabilă și $A^{-1} = A$ de unde rezultă că $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot I_2 + 2021 \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow X = A + 2021 \cdot I_2$	**3p**

	Deci $X=\begin{pmatrix} 2023 & 1 \\ -3 & 2019 \end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$5\circ 2021=5\cdot 2021-5\cdot 5-5\cdot 2021+30=$	**3p**
	$=-25+30=5$ 5	**2p**
b)	$x\circ y=xy-5x-5y+25+5=x(y-5)-5(y-5)+5=$	**3p**
	$=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$m^2\circ n=16\Rightarrow\left(m^2-5\right)(n-5)=11$ și, deoarece, $n-5\in\mathbb{Z}$, $m^2-5\in\mathbb{Z}$ obținem $\begin{cases} m^2-5=11 \\ n-5=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2-5=1 \\ n-5=11 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2-5=-11 \\ n-5=-1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m^2-5=-1 \\ n-5=-11 \end{cases}$	**3p**
	Cum m și n sunt numere întregi, obținem soluțiile $\begin{cases} m=4 \\ n=6 \end{cases}$, $\begin{cases} m=-4 \\ n=6 \end{cases}$, $\begin{cases} m=2 \\ n=-6 \end{cases}$, $\begin{cases} m=-2 \\ n=-6 \end{cases}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2xe^x+\left(x^2-8\right)e^x=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2+2x-8\right)=e^x(x-2)(x+4)$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f'(x)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x(x-2)(x+4)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}e^x(x+4)=$	**3p**
	$=6e^2$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-8}{e^{-x}}=0$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-4]\Rightarrow$ f este crescătoare și $f(x)\geq 0$ pe $(-\infty,-4]$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-4,2]\Rightarrow$ f este descrescătoare și $f(x)\geq f(2)$ pe $[-4,2]$; $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow$ f este crescătoare și $f(x)\geq f(2)$ pe $[2,+\infty)$, $f(2)=-4e^2<0$	**3p**
	Obținem că $f(x)\geq -4e^2$ pentru orice număr real $x\Leftrightarrow(x^2-8)e^x\geq -4e^2$, de unde rezultă $x^2\geq 8-4e^{2-x}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^2 f(x)(x+1)\,dx=\int_1^2\dfrac{x-1}{x+1}(x+1)\,dx=\int_1^2(x-1)\,dx=$	**3p**
	$=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_1^2=0+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
b)	$\int_2^3 f(x)\,dx=\int_2^3\dfrac{x-1}{x+1}dx=\int_2^3\dfrac{x+1-2}{x+1}dx=\int_2^3\left(1-\dfrac{2}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(x-2\ln\vert x+1\vert\right)\Big\vert_2^3=1+\ln\dfrac{9}{16}$	**3p**
c)	$\int_1^a f(x)f'(x)\,dx=\dfrac{1}{2}(f(x))^2\Big\vert_1^a=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2$, unde $a>1$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2=\dfrac{1}{8}\Rightarrow\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2=\dfrac{1}{4}\Rightarrow\dfrac{a-1}{a+1}=\pm\dfrac{1}{2}$, obținem $a=3$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(7-7\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{6}{41}=\left(7-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{6}{41}=$	**3p**
	$=\frac{41}{6}\cdot\frac{6}{41}=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x-6=6-x$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=4$, $y=2$	**2p**
3.	$3x-2=7$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	$p-\frac{12}{100}\cdot p=264$, unde p este prețul inițial al tabletei	**3p**
	$p=300$ de lei	**2p**
5.	$x_A=\frac{x_M+x_T}{2}=\frac{2+6}{2}=4$	**3p**
	$y_A=\frac{y_M+y_T}{2}=\frac{3+5}{2}=4$	**2p**
6.	$\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90^\circ=1$	**3p**
	$\cos 60^\circ\sin 60^\circ+\sin 90^\circ-\sin 30^\circ\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}+1-\frac{\sqrt{3}}{4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=3\cdot 3-1\cdot 5=9-5=4$	**3p**
b)	$B\cdot B+2C=\begin{pmatrix}4 & 12\\ 4 & 12\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 14\\ 4 & 12\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}4+2 & 3\cdot 4+2\\ 4 & 3\cdot 4\end{pmatrix}=A(4)$	**2p**
c)	$A(n)+B=\begin{pmatrix}n+3 & 3n+5\\ n+1 & 3n+3\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(n)+B)=4n+4$, unde n este număr natural	**3p**
	$4n+4=4\Leftrightarrow n=0$, care convine	**2p**
2.a)	$1*1=\frac{3\cdot 1\cdot 1+1}{1+1}=$	**3p**
	$=\frac{4}{2}=2$	**2p**

b)	$1*2=\frac{7}{3}\Rightarrow(1*2)*3=\frac{7}{3}*3=\frac{33}{8}$	**2p**
	$2*3=\frac{19}{5}\Rightarrow 1*(2*3)=1*\frac{19}{5}=\frac{31}{12}$, de unde obținem $((1*2)*3)-(1*(2*3))=\frac{33}{8}-\frac{31}{12}=\frac{37}{24}$	**3p**
c)	$\frac{3x^2+1}{2x}=2\Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=\frac{1}{3}$, care convin	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^4+3x^3-6x^2=$	**3p**
	$=3x^2\left(x^2+x-2\right)=3x^2(x-1)(x+2),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=-1,\ f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-1$	**3p**
c)	$x\in[-2,1]\Rightarrow x-1\le 0$ și $x+2\ge 0$	**2p**
	Cum $x^2\ge 0$, pentru orice număr real $x\Rightarrow f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-2,1]$, deci f este descrescătoare pe $[-2,1]$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}(f(x)+x-3)dx=\int_{-1}^{1}\left(x^3-x+3+x-3\right)dx=\int_{-1}^{1}x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$	**2p**
b)	$\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^3-3\right)e^x\ dx=-\int_{0}^{1}xe^xdx=-(x-1)e^x\Big\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=(-1)\cdot e^0=-1$	**2p**
c)	$\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\left(x^3-x+3\right)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big\vert_{0}^{1}=\frac{11}{4}$	**3p**
	$-a^2+5=\frac{11}{4}\Leftrightarrow a^2=\frac{9}{4}$ și, cum $a>0$, obținem $a=\frac{3}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot\left(2-\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(2-\frac{3}{2}\right)=$	**3p**
	$=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**2p**
2.	$f(1)=3$	**2p**
	$g(1)=-3\Rightarrow f(1)+g(1)=3+(-3)=0$	**3p**
3.	$2^{4-x}=2^2\Leftrightarrow 4-x=2$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot 70=21$ de lei	**3p**
	Prețul după scumpire este $70+21=91$ de lei	**2p**
5.	$AB=4$, $AC=3$	**2p**
	$BC=5$, de unde obținem $P_{\Delta ABC}=AB+BC+AC=12$	**3p**
6.	$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{2}{\sin B}=\frac{4}{\frac{1}{2}}$	**3p**
	$\sin B=\frac{1}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-(-2)\cdot 2=$	**3p**
	$=3+4=7$	**2p**
b)	$2B+I_2=2\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -6\\ 6 & 3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=3A$	**2p**
c)	$A\cdot X-B\cdot X=I_2-X\Leftrightarrow(A-B+I_2)\cdot X=I_2$	**2p**
	Cum $\det(A-B+I_2)=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1$, obținem $X=(A-B+I_2)^{-1}$, deci $X=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$1*3=3-(1-3)(3-3)=$	**3p**
	$=3-0=3$	**2p**

b)	$x*2=3-(x-3)(2-3)=3+x-3=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2*x=3-(2-3)(x-3)=3+x-3=x$, pentru orice număr real x, deci $e=2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$x*(x+6)=3-(x-3)(x+3)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3-(x-3)(x+3)\geq 3\Leftrightarrow (x-3)(x+3)\leq 0$, de unde obținem $x\in[-3,3]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x}-0=$	**3p**
	$=\frac{-4+x}{x^2}=\frac{x-4}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=4$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0,4]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,4]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[4,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x^2}+\frac{\ln x}{x}-\frac{5}{x}\right)=0$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x}+\ln x-5\right)=+\infty$, deci nu există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-e^x-3\right)dx=\int_1^2 3x^2\,dx=x^3\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-1=7$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_0^1\left(xe^x+3x\right)dx=\left(xe^x-e^x\right)\Big\vert_0^1+\frac{3x^2}{2}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=e^x+6x\Rightarrow f(x)-f'(x)=3(x-1)^2$, deci $\int_0^a\frac{1}{f(x)-f'(x)}dx=\frac{1}{3}\int_0^a\frac{1}{(x-1)^2}dx=$	**3p**
	$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}\Big\vert_0^a=-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a-1}+1\right)$, pentru orice $a\in(0,1)$	
	$-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{a-1}+1\right)=\frac{1}{6}$, de unde obținem $a=\frac{1}{3}$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{12}\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)+\sqrt{8}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{36}-3\sqrt{24}+3\sqrt{24}-\sqrt{16}=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
2.	$f\left(a\right)=a^2-2a+a$, deci $a^2-a-2=0$	**3p**
	$a=-1$ sau $a=2$	**2p**
3.	$9-x=x^2-6x+9$	**3p**
	$x=0$, care nu convine; $x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale pare de două cifre are 45 de elemente, deci sunt 45 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale pare de două cifre, care sunt multipli de 5, sunt 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, deci sunt 9 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{9}{45}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	$M\left(-4,2\right)$	**3p**
	$OM=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	**2p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic, deci $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=16$	**2p**
	$A_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot AC}{2}=\dfrac{12\cdot 16}{2}=96$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{vmatrix}=1\cdot\left(-4\right)-1\cdot\left(-3\right)=$	**3p**
	$=-4+3=-1$	**2p**
b)	$A\cdot B\left(x\right)=\begin{pmatrix}-2x & -9\\ -3x & -13\end{pmatrix}$, $B\left(x\right)\cdot A=\begin{pmatrix}x+3 & -3x-12\\ x+4 & -3x-16\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}-2x & -9\\ -3x & -13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+3 & -3x-12\\ x+4 & -3x-16\end{pmatrix}\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
c)	$aA+B\left(a\right)=\begin{pmatrix}2a & -3a+3\\ 2a & -4a+4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(aA+B\left(a\right)\right)=-2a^2+2a$, unde a este număr real	**3p**
	$-2a^2+2a=0$, de unde obținem $a=0$ sau $a=1$	**2p**
2.a)	$2*\left(-1\right)=2^2+2\cdot\left(-1\right)+\left(-1\right)^2=$	**3p**
	$=4-2+1=3$	**2p**
b)	$x*y=x^2+xy+y^2=y^2+yx+x^2=$	**3p**
	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**2p**

c)	$n^2+n^2+n^2=48\Leftrightarrow n^2=16$	**3p**
	$n=-4$, care nu convine; $n=4$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x-1-\frac{5}{x}=$	**3p**
	$=\frac{6x^2-x-5}{x}=\frac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)+5\ln x}{xf'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2-x+1}{(x-1)(6x+5)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(6+\frac{5}{x}\right)}=$	**3p**
	$=\frac{3}{1\cdot 6}=\frac{1}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(1)\Leftrightarrow f(x)\ge 3$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, de unde obținem $3x^2-x-2\ge 5\ln x$, deci $3x^2-x-2\ge\ln(x^5)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_{-1}^{2}(x+2)f(x)dx=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_{-1}^{2}=$	**3p**
	$=\frac{14}{3}+\frac{4}{3}=6$	**2p**
b)	$\int_{0}^{4}\left(f(x)-\frac{x^2}{x+2}\right)dx=\int_{0}^{4}\frac{1}{x+2}dx=\ln(x+2)\Big\vert_{0}^{4}=$	**3p**
	$=\ln 6-\ln 2=\ln 3$	**2p**
c)	$\int_{0}^{6}(x-3)(x+3)\frac{x^2+2x+2}{x+3}dx=\int_{0}^{6}(x^3-x^2-4x-6)dx=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-2x^2-6x\right)\Big\vert_{0}^{6}=144$	**3p**
	$n^2=144$ și, cum n este număr natural, obținem $n=12$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2\cdot 8,5+10,5:3,5=17+105:35=$ $=17+3=20$	**2p** **3p**
2.	$f(2)=-2\Rightarrow -6+a+1=-2$ $a=3$	**3p** **2p**
3.	$10^{6-2x}=10^4\Leftrightarrow 6-2x=4$ $x=1$	**3p** **2p**
4.	Mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$ are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile Numerele $n\in M$ pentru care numărul $\sqrt{10n}$ este rațional sunt 10, 40 și 90, deci sunt 3 cazuri favorabile $p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**2p** **2p** **1p**
5.	$m_{OA}=-2$, $m_{AB}=\frac{a-2}{4}$ $m_{OA}\cdot m_{AB}=-1\Leftrightarrow -2\cdot\frac{a-2}{4}=-1$, de unde obținem $a=4$	**2p** **3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{12}{\frac{1}{2}}=\frac{8}{\sin A}$ $\sin A=\frac{8\cdot\frac{1}{2}}{12}=\frac{1}{3}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det B=\begin{vmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 6=$ $=2-6=-4$	**3p** **2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}16 & 15\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B\cdot B=\begin{pmatrix}7 & 18\\ 3 & 10\end{pmatrix}$, $A\cdot A-B\cdot B=\begin{pmatrix}9 & -3\\ -3 & -9\end{pmatrix}=$ $=-3\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=-3(A+B)$, deci $a=-3$	**3p** **2p**
c)	$C(x)=\begin{pmatrix}-4x+2 & -5x+12\\ 2 & x+4\end{pmatrix}\Rightarrow\det(C(x))=-4x^2-4x-16$, pentru orice număr real x $\det(C(x))=-(2x+1)^2-15<0$, deci $\det(C(x))\neq 0$ adică matricea $C(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	**2p** **3p**

2.a)	$2*\frac{1}{2}=(2\cdot 2-1)\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$	**2p**
b)	$(4x)*\frac{1}{4}=\frac{2-8x}{2}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{2-8x}{2}=25$, de unde obținem $x=-6$	**2p**
c)	$x*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}*y=\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$\left(1*\frac{1}{2}\right)*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}=\frac{1}{2}*\left(\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1+\frac{-4}{(x+3)^2}=$	**3p**
	$=\frac{(x+3)^2-4}{(x+3)^2}=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x(x+3)}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x+3}=0$, deci dreapta de ecuație $y=x$ este asimptotă oblică la graficul funcției f	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-3,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-3,-1]$, $f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[-1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\ge f(-1)\Leftrightarrow f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$ și, cum $x^2\ge 0$, obținem $x^2+f(x)\ge 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^5\frac{(2x-1)(x+1)}{x+1}dx=\int_1^5(2x-1)dx=\left(x^2-x\right)\Big\vert_1^5=$	**3p**
	$=20-0=20$	**2p**
b)	$\int_1^2\frac{2x^2+x-1}{x^2}dx=\int_1^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(2x+\ln x+\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\frac{3}{2}+\ln 2$	**2p**
c)	$\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}\,dx=\frac{2f(x)\sqrt{f(x)}}{3}\Big\vert_a^2=18-\frac{2f(a)\sqrt{f(a)}}{3}$	**3p**
	$f(a)=0$ și, cum a este număr real cu $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, obținem $a=\frac{1}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 4 + 2 \cdot 5 =$	**3p**
	$= 4 + 10 = 14$	**2p**
2.	$f(0) = -1$	**2p**
	$f(1) = -1$, deci $f(0) = f(1)$	**3p**
3.	$3x + 4 = 16$	**3p**
	$x = 4$, care convine	**2p**
4.	$x + \frac{25}{100} \cdot x = 350$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire	**3p**
	Prețul produsului înainte de scumpire este 280 de lei	**2p**
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AB, deci $\frac{-4+a}{2} = 0$ și $\frac{1+b}{2} = 0$	**3p**
	$a = 4$, $b = -1$	**2p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$	**2p**
	$\frac{AB^2}{2} = 8 \Leftrightarrow AB^2 = 16$, de unde obținem $AB = 4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-2) \cdot (-1) =$	**3p**
	$= 5 - 2 = 3$	**2p**
b)	$B(2) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ și $B(6) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow 3B(2) + B(6) = \begin{pmatrix} 12 & -24 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 4\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 4B(3)$	**2p**
c)	$(B(-x) - B(x)) \cdot (B(-x) + B(x)) = \begin{pmatrix} -2x & 4x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8x & -8x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	Cum $A + B(3) = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, obținem $x = 1$	**2p**
2.a)	$3 \circ 4 = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 - 25 =$	**3p**
	$= 25 - 25 = 0$	**2p**

b)	$(2x)\circ x = 10x - 25$, pentru orice număr real x	**3p**
	$10x - 25 = 5$, de unde obținem $x = 3$	**2p**
c)	$m^2 \circ 1 = 3m^2 - 21$ și $1 \circ m^2 = 4m^2 - 22$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$3m^2 - 21 \geq 4m^2 - 22 \Leftrightarrow -m^2 + 1 \geq 0$, deci $m \in [-1,1]$ și, cum m este număr întreg, obținem $m = -1$ sau $m = 0$ sau $m = 1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{2(3x+1) - 2x \cdot 3}{(3x+1)^2} =$	**3p**
	$= \dfrac{6x + 2 - 6x}{(3x+1)^2} = \dfrac{2}{(3x+1)^2}$, $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{3x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x}{x\left(3 + \dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{3 + \dfrac{1}{x}} = \dfrac{2}{3}$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y = \dfrac{2}{3}$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f''(x) = -\dfrac{12}{(3x+1)^3}$, $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$	**3p**
	$f''(x) \leq 0$, pentru orice $x \in \left(-\dfrac{1}{3}, +\infty\right)$, deci funcția f este concavă	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^4 \left(f(x) - \ln x + 1\right) dx = \int_1^4 x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^4 =$	**3p**
	$= \dfrac{64}{3} - \dfrac{1}{3} = 21$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_2^4 \frac{x}{f(x) - \ln x} dx = \int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \frac{\left(x^2 - 1\right)'}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 - 1\right)\Big|_2^4 =$	**3p**
	$= \dfrac{1}{2}\ln 15 - \dfrac{1}{2}\ln 3 = \dfrac{1}{2}\ln 5$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^a \frac{f(x)}{x^2} dx = \int_1^a \left(1 + \frac{\ln x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \int_1^a 1 dx + \int_1^a \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x \, dx - \int_1^a \frac{1}{x^2} dx =$	**3p**
	$= x\Big|_1^a - \dfrac{1}{x}\ln x\Big|_1^a + \displaystyle\int_1^a \frac{1}{x^2} dx - \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = a - 1 - \frac{\ln a}{a}$, pentru orice $a \in (1, +\infty)$	
	$a - 1 - \dfrac{\ln a}{a} = \dfrac{a - \ln a}{a}$, de unde obținem $a = 2$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei geometrice este $q=-2$	**2p**
	$b_5=b_1q^4=3\cdot(-2)^4=48$	**3p**
2.	$x_1+x_2=3,\ x_1x_2=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$x_1+x_2-6x_1x_2=3-6\cdot\dfrac{1}{2}=3-3=0$	**3p**
3.	$\sqrt[3]{27x+8}=-1\Leftrightarrow 27x+8=-1$	**3p**
	$x=-\dfrac{1}{3}$	**2p**
4.	$x+\dfrac{15}{100}\cdot x=92$, unde x este prețul produsului înainte de scumpire	**3p**
	$x=80$ de lei	**2p**
5.	$AB=\sqrt{144+a^2}$	**2p**
	$\sqrt{144+a^2}=13$, de unde obținem $a=-5$ sau $a=5$, care convin	**3p**
6.	Unghiul A are măsura egală cu $30°$, deci $\sin A=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\mathcal{A}=\dfrac{AB\cdot AC\cdot\sin A}{2}=\dfrac{14\cdot14\cdot\frac{1}{2}}{2}=49$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot2-(-1)\cdot1=$	**3p**
	$=2+1=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}2x-2 & x-4\\ 3 & 3\end{pmatrix}$ și $3(A(x)-I_2)=\begin{pmatrix}3x-3 & 3x-6\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}2x-2 & x-4\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x-3 & 3x-6\\ 3 & 3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=1$	**2p**
c)	$xA(x)-A(x^2)=\begin{pmatrix}x^2 & x^2-2x\\ x & 2x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x^2 & x^2-2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2x+2\\ x-1 & 2x-2\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\det(xA(x)-A(x^2))=0-(-2x+2)(x-1)=2(x-1)^2\geq0$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$1*5=3\cdot1\cdot5-\dfrac{1+5}{3}+1=$	**3p**
	$=15-2+1=14$	**2p**

b)	$3*x=9x-\frac{3+x}{3}+1=\frac{26x}{3}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{26x}{3}=-52$, de unde obținem $x=-6$	**2p**
c)	$0*(3n)=-n+1\Rightarrow n*(0*(3n))=n*(-n+1)=\frac{-9n^2+9n+2}{3}$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$\frac{-9n^2+9n+2}{3}\geq\frac{2n}{3}\Leftrightarrow -9n^2+7n+2\geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-6x^2-12x+18=$	**3p**
	$=-6\left(x^2+2x-3\right)=-6(x-1)(x+3),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ sau $x=1$	**2p**
	$x\in(-\infty,-3]\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,-3]$, $x\in[-3,1]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $[-3,1]$, $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-2,f(-2))$ este $f'(-2)=-6\cdot(-3)\cdot 1=18$	**2p**
	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul $B(0,f(0))$ este $f'(0)=-6\cdot(-1)\cdot 3=18$, deci tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_1^3(x-2)dx=\left(\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-6-\left(\frac{1}{2}-2\right)=0$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)-x+2\right)dx=\int_1^e\ln x dx=\left(x\ln x-x\right)\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=0-(-1)=1$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=1+\frac{1}{x}\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este convexă	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{5}=\frac{\sqrt{5}+2}{\left(\sqrt{5}\right)^2-4}-\sqrt{5}=$	**3p**
	$=\sqrt{5}+2-\sqrt{5}=2$	**2p**
2.	$f\left(a\right)=2a^2+5a+2\Rightarrow 2a^2+5a+2=a$	**2p**
	$2a^2+4a+2=0$, de unde obținem $a=-1$	**3p**
3.	$\log_4\left(3x+1\right)=2\Rightarrow 3x+1=4^2\Rightarrow 3x+1=16$	**3p**
	$x=5$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 6 elemente, deci sunt 6 cazuri posibile	**2p**
	Numerele $x\in A$ pentru care x^2 este număr impar sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	Mijlocul segmentului BC are coordonatele $\frac{4+a}{2}$, respectiv $\frac{3+b}{2}\Rightarrow 2=\frac{4+a}{2}$, deci $a=0$	**3p**
	$-1=\frac{3+b}{2}\Rightarrow b=-5$	**2p**
6.	$BC=15$	**2p**
	$h=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{9\cdot 12}{15}=7,2$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4\cdot 2-2\cdot 3=$	**3p**
	$=8-6=2$	**2p**
b)	$\left(A-2I_2\right)\cdot\left(A-4I_2\right)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & -2\end{pmatrix}=$	**2p**
	$=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}=6I_2$	**3p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}4a+2c & 4b+2d\\ 3a+2c & 3b+2d\end{pmatrix}$ și $3A+4X=\begin{pmatrix}12+4a & 6+4b\\ 9+4c & 6+4d\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, cu a, b, c și d numere reale	**3p**
	$\begin{pmatrix}4a+2c & 4b+2d\\ 3a+2c & 3b+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12+4a & 6+4b\\ 9+4c & 6+4d\end{pmatrix}$, deci $a=7$, $b=4$, $c=6$ și $d=3$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 6 & 3\end{pmatrix}$	**2p**

2.a)	$1*3=1\cdot 3-\frac{12}{1+3}+\frac{3}{1}+\frac{3}{3}=$	**3p**
	$=3-3+3+1=4$	**2p**
b)	$x*x=x\cdot x-\frac{12}{x+x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=$	**2p**
	$=x^2-\frac{6}{x}+\frac{3}{x}+\frac{3}{x}=x^2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x}=x^2$, pentru orice $x\in M$	**3p**
c)	$n*n=n^2$, $(n*n)*(n*n)=n^2*n^2=n^4$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$n^4=1$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{0-2(2x-2)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=\frac{4-4x}{\left(x^2-2x+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{4(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(2)=1$, $f'(2)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=-x+3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$f'(a)=0\Leftrightarrow\frac{4(1-a)}{\left(a^2-2a+2\right)^2}=0$, de unde obținem $a=1$	**3p**
2.a)	$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^4 e^x dx=e^x\Big\vert_1^4=$	**3p**
	$=e^4-e=e\left(e^3-1\right)$	**2p**
b)	$\int_1^2 xf(x)dx=\int_1^2 xe^x dx=\int_1^2 x\left(e^x\right)'dx=\left(xe^x-e^x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-0=e^2$	**2p**
c)	Cum a este număr real, $a>0$, obținem $\int_{-a}^0 f(x)dx=\int_{-a}^0\left(\frac{2x}{x^2+1}+1\right)dx=$	**3p**
	$=\int_{-a}^0\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx+\int_{-a}^0 1dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_{-a}^0+x\Big\vert_{-a}^0=-\ln\left(a^2+1\right)+a$	
	$a-\ln\left(a^2+1\right)=a-\ln(a+1)\Rightarrow a^2=a$ și, cum $a>0$, obținem $a=1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b=3,6$	**2p**
	$m_a=\dfrac{2,4+3,6}{2}=\dfrac{6}{2}=3$	**3p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+3x=0$	**2p**
	Abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox sunt $x=-3$ și $x=0$	**3p**
3.	$2^{1-2x}=2^5\Leftrightarrow 1-2x=5$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	$\dfrac{20}{100}\cdot x=27$, unde x este prețul înainte de ieftinire	**3p**
	$x=135$ de lei	**2p**
5.	$O(0,0)$ este mijlocul segmentului AC	**2p**
	OD este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $OD=\dfrac{BC}{2}$, de unde obținem $BC=2OD$	**3p**
6.	$\sin^2 x+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=1\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{24}{25}$ și, cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$	**3p**
	$\text{tg}x=\dfrac{2\sqrt{6}}{5}:\dfrac{1}{5}=2\sqrt{6}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(4))=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-4\cdot 1=$	**3p**
	$=-3-4=-7$	**2p**
b)	$A(1)\cdot A(1)+2A(x)=\begin{pmatrix}2x-1 & -1+2x\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1)\cdot A(1)+2A(x))=1-2x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$1-2x=11$, de unde obținem $x=-5$	**2p**
c)	$A(0)\cdot A(x)\cdot A(1)=\begin{pmatrix}-x & 1\\ x+1 & -3\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix}-x & 1\\ x+1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y-3 & 3y\\ 3 & -3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$ și $y=\dfrac{1}{3}$	**3p**
2.a)	$1*2=20\cdot 1-21\cdot 2+1=$	**3p**
	$=20-42+1=-21$	**2p**
b)	$(x-1)*x=-x-19$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-x-19=1$, de unde obținem $x=-20$	**3p**

c)	$x^2 * x = 20x^2 - 21x + 1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$20x^2 - 21x + 1 \le 0$, de unde obținem $x \in \left[\frac{1}{20}, 1\right]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x + (x-2)e^x =$	**3p**
	$= (1 + x - 2)e^x = (x-1)e^x$, $x \in \mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f'(x)}{e^x - e} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)e^x}{e^x - e} =$	**2p**
	$= \lim\limits_{x \to 1} \frac{xe^x}{e^x} = 1$	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ și $f'(x) \le 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 1] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 1]$, $f'(x) \ge 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $x \in [1, +\infty)$	**2p**
	$f(x) \ge f(1) \Leftrightarrow (x-2)e^x \ge -e$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $(x-2)e^{x-1} \ge -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(2-x)e^{x-1} \le 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
2.a)	$\int_{-1}^{1} \left(f(x) - x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(2x^5 - 1\right) dx = \left(\frac{x^6}{3} - x\right)\Big\vert_{-1}^{1} =$	**3p**
	$= -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -2$	**2p**
b)	$\int_{2}^{4} \frac{f(x) - 2x^5}{2x} dx = \int_{2}^{4} \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x\right)\Big\vert_{2}^{4} =$	**3p**
	$= 4 - \frac{1}{2}\ln 4 - 1 + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{6 - \ln 2}{2}$	**2p**
c)	$\int_{0}^{1} x^4 \left(2x^5 - 1\right)^2 dx = \frac{1}{10} \int_{0}^{1} \left(2x^5 - 1\right)' \left(2x^5 - 1\right)^2 dx = \frac{1}{10} \cdot \frac{\left(2x^5 - 1\right)^3}{3}\Big\vert_{0}^{1} =$	**3p**
	$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{15}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{2}{3}\cdot 0,3+3,2:4=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{10}+\frac{32}{10}\cdot\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}+\frac{4}{5}=1$	**2p**
2.	$f(a)=2a\Leftrightarrow 6-4a=2a$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$x^2-2x+16=16\Rightarrow x^2-2x=0$	**2p**
	$x=0$ sau $x=2$, care convin	**3p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $(n-2)(n-6)\geq 0$ sunt 1, 2, 6, 7, 8 și 9, deci sunt 6 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	**1p**
5.	$M(-3,4)$	**2p**
	$OA=5$, $OM=5$, deci triunghiul OAM este isoscel	**3p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic în B, deci $\frac{AB\cdot BC}{2}=2$, și, cum $AB=BC$, obținem $AB=2$	**3p**
	$P_{ABCD}=4AB=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{vmatrix}=-3\cdot 4-2\cdot(-6)=$	**3p**
	$=-12+12=0$	**2p**
b)	$\det(B(x))=x^2-4x+14$, pentru orice număr real x	**2p**
	Cum $\det(B(7)-A)=\begin{vmatrix}10 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-10$, obținem $x^2-4x+4=0$, deci $x=2$	**3p**
c)	$xA=\begin{pmatrix}-3x & 2x\\ -6x & 4x\end{pmatrix}$, $A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}-3x-14 & 2x-14\\ -6x-28 & 4x-28\end{pmatrix}\Rightarrow xA-A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}14 & 14\\ 28 & 28\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}14 & 14\\ 28 & 28\end{pmatrix}=14C$, de unde obținem $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$1*3=6\cdot 1\cdot 3-6\cdot 1-6\cdot 3+7=$	**3p**
	$=18-6-18+7=1$	**2p**

b)	$x*\frac{7}{6}=6x\cdot\frac{7}{6}-6x-6\cdot\frac{7}{6}+7=7x-6x-7+7=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\frac{7}{6}*x=6\cdot\frac{7}{6}\cdot x-6\cdot\frac{7}{6}-6x+7=7x-7-6x+7=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	**3p**
c)	$\frac{m}{2}*\left(-\frac{m}{3}\right)=-m^2-m+7$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$-m^2-m+7\geq 1\Leftrightarrow m^2+m-6\leq 0$, de unde obținem $m\in[-3,2]$, deci suma numerelor întregi care verifică inegalitatea este egală cu $-3+(-2)+(-1)+0+1+2=-3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-\frac{3}{x^2}+0=$	**3p**
	$=\frac{3\left(x^4-1\right)}{x^2}=\frac{3\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**2p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,1]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $x\in[1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=6x+\frac{6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este convexă	**3p**
2.a)	$\int_0^2(x+1)f(x)dx=\int_0^2 2xdx=x^2\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int_1^3\frac{2}{x+1}dx=2\int_1^3\frac{(x+1)'}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=2\ln 4-2\ln 2=2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)\cdot f(-x)dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{4x^2}{x^2-1}dx=4\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{x^2-1+1}{x^2-1}dx=4\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{x^2-1}\right)dx=4\left(x+\frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)\Big\vert_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=$	**3p**
	$=4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln 3\right)=4(1-\ln 3)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=3\Rightarrow a_1=2,\ a_4=11$	**3p**
	$a_1+a_2+a_3+a_4=2+5+8+11=26$	**2p**
2.	$f(a)=3a-8,\ f(1)=-5$	**2p**
	$a(3a-8)=-5\Leftrightarrow 3a^2-8a+5=0$, de unde obținem $a=1$ sau $a=\frac{5}{3}$	**3p**
3.	$25-x=x+5$	**2p**
	$x=10$, care convine	**3p**
4.	Cifra unităților poate fi aleasă în 4 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor poate fi aleasă în câte 3 moduri, deci se pot forma $4\cdot 3=12$ numere	**3p**
5.	$3=2\cdot 2+a$	**3p**
	$a=-1$	**2p**
6.	$\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \text{tg}60^\circ=\sqrt{3},\ \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$4\sin 60^\circ\left(\text{tg}60^\circ-\cos 30^\circ\right)=4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -3\end{vmatrix}=2\cdot(-3)-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=-6+1=-5$	**2p**
b)	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 6\end{pmatrix},\ B(-1)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow B(1)B(-1)+3A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 15 & 33\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 3\\ -3 & -9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 12 & 24\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}8 & 8\\ 12 & 24\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}a & a\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, de unde obținem $a=2$	**2p**
c)	$A-2I_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -5\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A-2I_2)=1$, deci matricea $A-2I_2$ este inversabilă și $(A-2I_2)^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=B(0)\cdot(A-2I_2)^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -9 & -3\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$3*4=(2\cdot 3-4+1)(2\cdot 4-3+1)=$	**3p**
	$=3\cdot 6=18$	**2p**
b)	$x*y=(2x-y+1)(2y-x+1)=(2y-x+1)(2x-y+1)=$	**2p**

	$=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$(2m)*n=(4m-n+1)(2n-2m+1)$, pentru orice numere naturale m și n	**2p**
	$(4m-n+1)(2n-2m+1)=13$ și, cum m și n sunt numere naturale, obținem perechile $(2,8)$ sau $(4,4)$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{2(x+5)-(2x+7)}{(x+5)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2x+10-2x-7}{(x+5)^2}=\dfrac{3}{(x+5)^2}$, $x\in(-5,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+7}{x+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2+\frac{7}{x}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{7}{x}}{1+\frac{5}{x}}=2$, deci dreapta de ecuație $y=2$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+5\Leftrightarrow f'(a)=3$, $a\in(-5,+\infty)$	**2p**
	$\dfrac{3}{(a+5)^2}=3$ și, cum $a\in(-5,+\infty)$, obținem $a=-4$	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)+2\sqrt{x}\right)dx=\int_1^3(x+2)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=\dfrac{21}{2}-\dfrac{5}{2}=8$	**2p**
b)	$f'(x)=\left(x-2\sqrt{x}+2\right)'=1-2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+0=$	**3p**
	$=1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=g(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci funcția f este o primitivă a funcției g	**2p**
c)	$\int_1^2\dfrac{1}{f\left(x^2\right)}dx=\int_1^2\dfrac{1}{x^2-2x+2}dx=\int_1^2\dfrac{(x-1)'}{(x-1)^2+1}dx=\operatorname{arctg}(x-1)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0=\dfrac{\pi}{4}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(3+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\left(6+2\sqrt{5}\right)=9+6\sqrt{5}+5-6\sqrt{5}-10=$	**3p**
	$=14-10=4$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 5x+1=3x-1\Leftrightarrow 2x=-2$	**3p**
	Abscisa punctului de intersecție este $x=-1$	**2p**
3.	$2^{x+4}=2^{2(x+3)}\Leftrightarrow x+4=2x+6$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	$360+\frac{15}{100}\cdot 360=$	**2p**
	$=360+54=414$ lei	**3p**
5.	$M(2,0)$	**2p**
	$m_{AM}=-\frac{3}{4}$, $m_{MC}=\frac{4}{3}$, de unde obținem $m_{AM}\cdot m_{MC}=-1$, deci triunghiul AMC este dreptunghic	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}\Leftrightarrow\frac{4}{\frac{1}{2}}=\frac{AC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Leftrightarrow AC=4\sqrt{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-(-4)\cdot(-2)=$	**3p**
	$=9-8=1$	**2p**
b)	$B\cdot B=\begin{pmatrix}1+x & -2x\\ -2 & x+1\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+x & -2x\\ -2 & x+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**2p**
c)	$\det B=1-x\Rightarrow\det\left(B+(\det B)A\right)=\begin{vmatrix}-3x+2 & 5x-4\\ 2x-1 & -3x+2\end{vmatrix}=-x^2+x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-x^2+x=0$, de unde obținem $x=0$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$(-8)\circ 2=-8+2+16=$	**3p**
	$=-6+16=10$	**2p**
b)	$x\circ e=x$, pentru orice număr real x, de unde obținem $e=-16$	**2p**
	$-16\circ x=-16+x+16=x$, pentru orice număr real x, deci $e=-16$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

c)	$x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)=\frac{3x}{2}+19\Rightarrow x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)\circ x=\frac{5x}{2}+35$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\frac{5x}{2}+35=2x$, de unde obținem $x=-70$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=-\frac{4}{x^3}+\frac{1}{x}-0=$	**3p**
	$=\frac{x^2-4}{x^3}=\frac{(x-2)(x+2)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=0$, $f'(1)=-3$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-3x+3$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f(x)}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2+x^2\ln x-2x^2}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(2+x^2\ln x-2x^2\right)'}{\left(x^3-1\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}\frac{0+2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}-4x}{3x^2-0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x\ln x-3x}{3x^2}=-1$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-1=-\frac{2}{3}$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(f(x)+1\right)\ln x dx=\int_1^e x^2\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^3}{3}\right)'\ln x dx=\left(\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}\right)\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\frac{e^3}{3}-\frac{e^3}{9}+\frac{1}{9}=\frac{2e^3+1}{9}$	**2p**
c)	$f(\sin x)+f(\cos x)=\sin^2 x-1+\cos^2 x-1=\sin^2 x+\cos^2 x-2=-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$,	**3p**
	$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(f(\sin x)+f(\cos x)\right)\operatorname{tg}x dx=-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\operatorname{tg}x dx=\ln(\cos x)\Big\vert_0^{\frac{\pi}{3}}=\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)-\ln(\cos 0)=\ln\frac{1}{2}$	
	$\ln\frac{1}{2}=\ln a$, de unde obținem $a=\frac{1}{2}$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,6+0,8):0,7-0,25\cdot 4=1,4:0,7-1=$	**3p**
	$=2-1=1$	**2p**
2.	$f(2)=-1$, $f(4)=3$ și $f(a)=2a-5$, unde a este număr real	**3p**
	$2a-5-(-1)=2\cdot 3\Leftrightarrow 2a-4=6$, de unde obținem $a=5$	**2p**
3.	$x^2-7=3^2\Rightarrow x^2-16=0$	**3p**
	$x=-4$ sau $x=4$, care convin	**2p**
4.	Mulțimea A are 20 de elemente, deci sunt 20 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $2n$ este multiplu de 10 sunt 5, 10, 15 și 20, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$	**1p**
5.	$OA=10\Rightarrow MA=5$, $OB=\sqrt{a^2+16}$, unde a este număr real	**3p**
	$\sqrt{a^2+16}=5\Leftrightarrow a^2-9=0$, de unde obținem $a=-3$ sau $a=3$	**2p**
6.	$AC=5$	**2p**
	$\sin B=\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{5}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{vmatrix}=4\cdot 3-3\cdot 1=$	**3p**
	$=12-3=9$	**2p**
b)	$B(1)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B(-1)=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow B(1)\cdot B(-1)=\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
	$A+B(1)\cdot B(-1)=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=2B(0)$	**2p**
c)	$B(1)+B(2)+B(3)+\ldots+B(9)=\begin{pmatrix}3+5+7+\ldots+19 & 1+2+3+\ldots+9\\ 9 & 2+3+4+\ldots+10\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}11 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}$	**3p**
	$9\begin{pmatrix}11 & 5\\ 1 & 6\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}2x+1 & x\\ 11 & x+1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=5$	**2p**
2.a)	$2\circ 6=\dfrac{2+6}{2}-\dfrac{2\cdot 6}{3}=$	**3p**
	$=4-4=0$	**2p**

b)	$x\circ 6=\dfrac{6-3x}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\dfrac{6-3x}{2}=6$, de unde obținem $x=-2$	**3p**
c)	$m\circ(3m)=-m^2+2m$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$-m^2+2m\geq 2m-3\Leftrightarrow -m^2+3\geq 0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=-1$ sau $m=0$ sau $m=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{4x^3}{2}-6x^2+0=$	**3p**
	$=2x^3-6x^2==2x^2(x-3),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x^2e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(x-3)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(2(x-3)\right)'}{\left(e^x\right)'}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x}=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ sau $x=3$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,3]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\geq f(3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ și, cum $f(3)=-\dfrac{21}{2}$, rezultă că $f(x)\geq-\dfrac{21}{2}$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=(4+2)-(0-0)=6$	**2p**
b)	$\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}dx=\int_0^1\dfrac{1}{2x+1}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{(2x+1)'}{2x+1}dx=\dfrac{1}{2}\ln(2x+1)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}\ln 3-\dfrac{1}{2}\ln 1=\dfrac{1}{2}\ln 3$	**2p**
c)	$\int_{-a}^{a}\dfrac{1}{x^2+2f(x)+2}dx=\int_{-a}^{a}\dfrac{1}{(x+2)^2}dx=-\dfrac{1}{x+2}\Big\vert_{-a}^{a}=\dfrac{2a}{4-a^2}$, pentru orice $a\in(0,2)$	**3p**
	$\dfrac{2a}{4-a^2}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow a^2+3a-4=0$ și, cum $a\in(0,2)$, obținem $a=1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{2}{3}\right)^2:\frac{1}{3}-3:9=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{1}-3\cdot\frac{1}{9}=$	**3p**
	$=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=1$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow 3x-9=0$	**3p**
	$x=3$	**2p**
3.	$\sqrt{x^2-4x+8}=x\Rightarrow x^2-4x+8=x^2$	**2p**
	$-4x+8=0$, de unde obținem $x=2$, care convine	**3p**
4.	$x-\frac{8}{100}\cdot x=184$	**3p**
	$x=200$ de lei	**2p**
5.	$C(1,2)$	**2p**
	$4=\frac{1+x_D}{2}$, $1=\frac{2+y_D}{2}$, unde (x_D,y_D) sunt coordonatele punctului D, deci $x_D=7$ și $y_D=0$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}\Rightarrow\cos x=\sqrt{3}\sin x$	**2p**
	$\sin^2 x+\left(\sqrt{3}\sin x\right)^2=1\Leftrightarrow\sin^2 x=\frac{1}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-6\cdot 1=$	**3p**
	$=6-6=0$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9+6 & 18+12\\ 3+2 & 6+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & 30\\ 5 & 10\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=5\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}=5A$	**2p**
c)	$xA+(1-x)I_2=\begin{pmatrix}2x+1 & 6x\\ x & x+1\end{pmatrix}\Rightarrow\det\left(xA+(1-x)I_2\right)=-4x^2+3x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$-4x^2+3x+1\geq 0$, de unde obținem $x\in\left[-\frac{1}{4},1\right]$	**2p**
2.a)	$1*2=3\cdot 1\cdot 2-1^2-2^2=$	**3p**
	$=6-1-4=1$	**2p**

b)	$2*x=6x-4-x^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$6x-4-x^2=1\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=5$	**3p**
c)	$\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow\left(\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}\right)*\sqrt[3]{x^2}=\sqrt[3]{x^4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sqrt[3]{x^4}=1\Leftrightarrow x^4=1$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-\dfrac{x+2-x}{(x+2)^2}=\dfrac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{2\left(x^2+4x+3\right)}{(x+2)^2}=\dfrac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-2,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-2,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x+2}\right)=2$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x+2}\right)=-1$, deci dreapta de ecuație $y=2x-1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
2.a)	$\int_0^3\left(x^2+1\right)f(x)dx=\int_0^3\left(x^2+5\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+5x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=9+15=24$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx=\int_0^1\dfrac{4}{x^2+1}dx=4\operatorname{arctg}x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=4\operatorname{arctg}1-4\operatorname{arctg}0=\pi$	**2p**
c)	F este primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=\dfrac{-8x}{\left(x^2+1\right)^2}\le 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, deci F este concavă pe $[0,+\infty)$	**3p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(0,25\cdot 10-\frac{1}{2}\right)\left(0,25\cdot 10+\frac{1}{2}\right)=(2,5-0,5)(2,5+0,5)=$	**2p**
	$=2\cdot 3=6$	**3p**
2.	$f(2)=1\Rightarrow 4-2a+1=1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
3.	$3^x\left(3^2+1\right)=30\Leftrightarrow 3^x=3$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 500=100$ de lei	**3p**
	Preţul după scumpire este $500+100=600$ de lei	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(4,3)$	**2p**
	$OM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=$	**2p**
	$=\frac{5\cdot 10}{2}=25$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 3=$	**3p**
	$=2-3=-1$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{pmatrix}$	**3p**
	$A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
c)	$A\cdot X=\begin{pmatrix}1+3y & x+3\\ 1+2y & x+2\end{pmatrix}$, $X\cdot A=\begin{pmatrix}1+x & 3+2x\\ y+1 & 3y+2\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale	**2p**
	$\begin{pmatrix}1+3y & x+3\\ 1+2y & x+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1+x & 3+2x\\ y+1 & 3y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3y-x & -x\\ y & x-3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, de unde obţinem $x=-1$ şi $y=-1$	**3p**
2.a)	$3\circ 2=4\cdot 3\cdot 2+3+2=$	**3p**
	$=24+5=29$	**2p**

b)	$x\circ y=\dfrac{16xy+4x+4y}{4}=\dfrac{16xy+4x+4y+1-1}{4}=$	**3p**
	$=\dfrac{4x(4y+1)+(4y+1)-1}{4}=\dfrac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$x\circ x=\dfrac{(4x+1)^2-1}{4}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\dfrac{(4x+1)^2-1}{4}\le 2\Leftrightarrow(4x+1)^2\le 9\Leftrightarrow -3\le 4x+1\le 3$, de unde obținem $x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+\dfrac{1\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=e^x+\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=e^x+\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\dfrac{x}{x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\dfrac{1}{x+\frac{1}{x}}\right)=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$x\in[-1,1]\Rightarrow 1-x^2\ge 0\Rightarrow f'(x)\ge 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]\Rightarrow f(-1)\le f(x)\le f(1)$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**3p**
	Cum $f(-1)=\dfrac{2-e}{2e}$ și $f(1)=\dfrac{2e+1}{2}$, obținem $\dfrac{2-e}{2e}\le f(x)\le\dfrac{2e+1}{2}$, pentru orice $x\in[-1,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx=\int_1^2(x+1)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=(2+2)-\left(\dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{5}{2}$	**2p**
b)	$V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1 x(x+1)^2\,dx=\pi\int_0^1\left(x^3+2x^2+x\right)dx=\pi\left(\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\pi\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17\pi}{12}$	**2p**
c)	$\int_1^e\dfrac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_1^e=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{e^2+1}{4}$, deci $a=1$	**2p**

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1+3i)^2-6i=1+6i+9i^2-6i=$	**3p**
	$=1-9=-8$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow x+1=3x-7$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție sunt $x=4$ și $y=5$	**2p**
3.	$3-x=4x^2\Rightarrow 4x^2+x-3=0$	**3p**
	$x=-1$, care nu convine; $x=\frac{3}{4}$, care convine	**2p**
4.	Numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^2=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$	**2p**
	Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^3=\frac{5!}{2!\cdot 3!}=10$, deci numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A	**3p**
5.	$m_{AB}=1$, $m_{AC}=-a+2$, unde a este număr real	**2p**
	$m_{AB}=m_{AC}$, de unde obținem $a=1$	**3p**
6.	$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, deci $\cos x+\frac{1}{2}=1\Rightarrow\cos x=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\sin^2 x+\frac{1}{4}=1\Leftrightarrow\sin^2 x=\frac{3}{4}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem că $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{vmatrix}=2\cdot(-2)-4\cdot(-1)=$	**3p**
	$=-4+4=0$	**2p**
b)	$M(1)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $M(x)=\begin{pmatrix}2-2x & 4-6x\\ -1+x & -2+3x\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$M(x)\cdot M(1)=\begin{pmatrix}0 & -2x\\ 0 & x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=xM(1)$, pentru orice număr real x	**3p**
c)	$M(4)\cdot M(3)\cdot(M(2)\cdot M(1))=M(4)\cdot M(3)\cdot(2M(1))=2M(4)\cdot(M(3)\cdot M(1))=2\cdot 3\cdot 4M(1)$	**3p**
	Cum $2\cdot 3\cdot 4M(1)=nM(1)$, obținem $n=24$	**2p**
2.a)	$1*2=1+2+1^2\cdot 2^2=$	**3p**
	$=1+2+4=7$	**2p**

b)	$x*0=x+0+0=x$, pentru orice număr real x $0*x=0+x+0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „*”	**2p** **3p**
c)	$-2+x+4x^2\le 3$, deci $4x^2+x-5\le 0$ $x\in\left[-\frac{5}{4},1\right]$ şi, cum x este număr întreg, obţinem $x=-1$ sau $x=0$ sau $x=1$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'+\left(x^4\right)'-(2x)'+(2)'=$ $=e^x+4x^3-2+0=e^x+4x^3-2,\ x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
b)	$f(0)=3,\ f'(0)=-1$ Ecuaţia tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=-x+3$	**2p** **3p**
c)	$f''(x)=e^x+12x^2,\ x\in\mathbb{R}$ $f''(x)\ge 0$, pentru orice număr real x, deci funcţia f este convexă	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^3 f(x)dx=\int_1^3\left(x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^3 xdx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_1^3=$ $=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$	**3p** **2p**
b)	$\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)\ln x dx=\int_1^2 x\ln x dx=\int_1^2\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^2-\int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$ $=\frac{4}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 1-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^2=2\ln 2-\frac{3}{4}$	**3p** **2p**
c)	$\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1}f^n(x)dx=\int_1^{\sqrt{2}} x\left(x^2-1\right)^n dx=\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}}\left(x^2-1\right)'\left(x^2-1\right)^n dx=\frac{\left(x^2-1\right)^{n+1}}{2(n+1)}\Big\vert_1^{\sqrt{2}}=\frac{1}{2(n+1)}$ Cum $2(n+1)\le 2021\Leftrightarrow n\le\frac{2019}{2}$, obţinem că 1009 este cel mai mare număr natural nenul pentru care $\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1}f^n(x)dx\ge\frac{1}{2021}$	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică

Testul 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_3=7$ și $a_7=15$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-5$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $f(x)\geq 2f(1)+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $81^x=3$.

5p **4.** Calculați $\frac{A_6^2}{P_3}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$, $B(0,-5)$ și $C(4,-1)$. Arătați că triunghiul ACB este dreptunghic isoscel.

5p **6.** Arătați că $\frac{\text{tg}60^o}{\text{ctg}30^o\cdot\cos 45^o}=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A\cdot A=I_2$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $AX-I_2=2021A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-5x-5y+30$.

5p **a)** Arătaţi că $5\circ 2021=5$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele întregi m și n pentru care $m^2\circ n=16$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-8)e^x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=(x-2)(x+4)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f'(x)}{x-2}$.

5p **c)** Demonstrați că $x^2\geq 8-4e^{2-x}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 f(x)(x+1)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\,dx=1+\ln\frac{9}{16}$.

5p **c)** Determinați numărul real $a>1$ astfel încât $\int_1^a f(x)f'(x)\,dx=\frac{1}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)
Matematică

Testul 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(7-7\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{7}\right)\cdot\frac{6}{41}=1$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$ cu graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=6-x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(3x-2)=1$.

5p **4.** După o ieftinire cu 12%, o tabletă grafică costă 264 de lei. Determinați prețul inițial al tabletei.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ și $T(6,5)$. Determinați coordonatele punctului A, știind că A este mijlocul segmentului MT.

5p **6.** Arătați că $\cos 60^\circ\cdot\sin 60^\circ+\sin 90^\circ-\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A(a)=\begin{pmatrix}a+2 & 3a+2\\ a & 3a\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(4)=B\cdot B+2\cdot C$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\det(A(n)+B)=4$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{3xy+1}{x+y}$.

5p **a)** Arătați că $1*1=2$.

5p **b)** Calculați $((1*2)*3)-(1*(2*3))$.

5p **c)** Determinați numerele reale $x\in M$ pentru care $x*x=2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-2x^3-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3x^2(x-1)(x+2)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x^2-1)+3$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}(f(x)+x-3)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x) - x^3 - 3 \right) e^x dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a > 0$, știind că $\int_0^1 f(x) dx = -a^2 + 5$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{12}\left(\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)+\sqrt{8}\left(3\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+a$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{9-x}=x-3$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale pare de două cifre, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,1)$ și $B(-2,3)$. Determinați distanța de la punctul O la punctul M, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $AB=12$ și ipotenuza $BC=20$. Calculați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -4\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 3\\ x & 4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(aA+B(a)\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2+xy+y^2$.

5p **a)** Arătați că $2*(-1)=3$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $n*n=48$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-x-5\ln x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(6x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{xf'(x)}=\dfrac{1}{2}$.

5p **c)** Demonstrați că $3x^2-x-2\geq\ln\left(x^5\right)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{2}(x+2)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{4}\left(f(x)-\dfrac{x^2}{x+2}\right)dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_{0}^{6}\left(x^2-9\right)f(x+1)\,dx=n^2$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\cdot 8,5+10,5:3,5=20$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(2,-2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+a+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $10^{6-2x}=100^2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, numărul $\sqrt{10n}$ să fie rațional.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OA și AB sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=12$, $BC=8$ și unghiul C de măsură egală cu 30°. Calculați $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det B=-4$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $A\cdot A-B\cdot B=a(A+B)$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr real x, matricea $C(x)=xA+2B$ este inversabilă.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=(2x-1)(2y-1)+\frac{1}{2}$.

5p **a)** Arătați că $2*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $(4x)*\frac{1}{4}=25$.

5p **c)** Calculați $1*\frac{1}{2}*\frac{1}{3}*\frac{1}{4}*\frac{1}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{4}{x+3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(x+1)(x+5)}{(x+3)^2}$, $x\in(-3,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x^2+f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(2x-1)(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^5 \frac{f(x)}{x+1}dx=20$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a\in\left[\frac{1}{2},2\right)$, știind că $\int_a^2 f'(x)\sqrt{f(x)}dx=18$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul al cincilea al unei progresii geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, în care $b_1=3$ și $b_2=-6$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $2x^2-6x+1=0$. Arătați că $x_1+x_2-6x_1x_2=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2+\sqrt[3]{27x+8}=1$.

5p **4.** După o scumpire cu 15%, un produs costă 92 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,0)$ și $B(9,a)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care distanța dintre punctele A și B este egală cu 13.

5p **6**. Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=14$ și unghiul B de măsură egală cu $75°$. Determinați aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x & x-2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1)=3(A(x)-I_2)$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(xA(x)-A\left(x^2\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-\frac{x+y}{3}+1$.

5p **a)** Arătați că $1*5=14$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $3*x=-52$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n*(0*(3n))\geq\frac{2n}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^3-6x^2+18x-49$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-6(x-1)(x+3)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Se consideră punctele $A(-2,f(-2))$ și $B(0,f(0))$. Arătați că tangentele la graficul funcției f în punctele A și B au pantele egale.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x-2$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3(f(x)-\ln x)\,dx=0$.

5p **b)** Calculați $\int_1^e(f(x)-x+2)\,dx$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{5}-2}-\sqrt{5}=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+5x+2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=a$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $3\log_4(3x+1)=6$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr x din mulțimea $A=\{4,5,6,7,8,9\}$, numărul x^2 să fie număr impar.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-1)$, $B(4,3)$ și $C(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a, b, știind că punctul A este mijlocul segmentului BC.

5p **6**. Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=9$ și $AC=12$. Determinați lungimea înălțimii din A a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $(A-2I_2)\cdot(A-4I_2)=6I_2$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X=3A+4X$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{12}{x+y}+\frac{3}{x}+\frac{3}{y}$.

5p **a)** Arătați că $1*3=4$.

5p **b)** Arătați că $x*x=x^2$, pentru orice $x\in M$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $(n*n)*(n*n)=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x^2-2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4(1-x)}{\left(x^2-2x+2\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{x^2+1}+1, & x\in(-\infty,0]\\ e^x, & x\in(0,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4 f(x)\,dx=e\left(e^3-1\right)$.

5p **b)** Calculați $\int_1^2 xf(x)dx$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>0$, știind că $\int_{-a}^{0} f(x)dx = a-\ln(a+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că media aritmetică a numerelor $a=2,4$ și $b=4-\frac{2}{5}$ este egală cu 3.

5p **2.** Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+3x$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{1-2x}=32$.

5p **4.** In urma unei ieftiniri cu 20%, prețul unui produs a scăzut cu 27 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,4)$, $B(6,4)$ și $C(0,-4)$. Știind că punctul D este mijlocul segmentului AB, arătați că $BC=2OD$.

5p **6**. Se consideră numărul real $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x=\frac{1}{5}$. Arătați că $\operatorname{tg}x=2\sqrt{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x-1 & x\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(4))=-7$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det(A(1)\cdot A(1)+2A(x))=11$.

5p **c)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A(0)\cdot A(x)\cdot A(1)=3A(y)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=20x-21y+1$.

5p **a)** Arătați că $1*2=-21$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $(x-1)*x=1$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x^2*x\le 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{e^x-e}$.

5p **c)** Arătați că $(2-x)e^{x-1}\le 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^5+x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}\left(f(x)-x^2\right)dx=-2$.

5p **b)** Arătați că $\int_{2}^{4}\frac{f(x)-2x^5}{2x}dx=\frac{6-\ln 2}{2}$.

5p **c)** Calculați $\int_{0}^{1}x^4\left(f(x)-x^2\right)^2dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{2}{3}\cdot 0,3+3,2:4=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6-4x$. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2a)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-2x+16}=4$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $(n-2)(n-6)\geq 0$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-5,0)$, $B(-1,8)$. Arătați că triunghiul OAM este isoscel, știind că M este mijlocul segmentului AB.

5p **6**. Se consideră pătratul $ABCD$ astfel încât aria triunghiului ABC este egală cu 2. Calculați perimetrul pătratului $ABCD$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ -7 & x-4\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $\det(B(x))+\det(B(7)-A)=0$.

5p **c)** Determinați matricea $C\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $xA-A\cdot B(x)=14C$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=6xy-6x-6y+7$.

5p **a)** Arătați că $1*3=1$.

5p **b)** Demonstrați că $e=\frac{7}{6}$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați suma numerelor întregi m care verifică inegalitatea $\frac{m}{2}*\left(-\frac{m}{3}\right)\geq 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+\frac{3}{x}+4$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3(x^2-1)(x^2+1)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Calculați $\int_1^3 \frac{f(x)}{x}\,dx$.

5p **c)** Arătați că $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)\cdot f(-x)\,dx=4(1-\ln 3)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați suma primilor patru termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ în care $a_2=5$ și $a_3=8$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-8$. Determinați numerele reale a pentru care $a\cdot f(a)=f(1)$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\log_5(25-x)=\log_5(x+5)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $A=\{2,3,5,9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a știind că punctul $A(2,3)$ aparține dreptei d.

5p **6.** Arătați că $4\sin 60^\circ\left(\text{tg}60^\circ-\cos 30^\circ\right)=3$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}a & a\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-5$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $B(1)\cdot B(-1)+3A=4B(a)$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea că $X\cdot(A-2I_2)=B(0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(2x-y+1)(2y-x+1)$.

5p **a)** Arătați că $3*4=18$.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere naturale pentru care $(2m)*n=13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-5,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+7}{x+5}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3}{(x+5)^2}$, $x\in(-5,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x+5$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\sqrt{x}+2$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)+2\sqrt{x}\right)dx=8$.

5p **b)** Arătați că funcția f este o primitivă a funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$.

5p **c)** Calculați $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{f(x^2)}dx$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(3+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{5}\left(6+2\sqrt{5}\right)=4$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=5x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g\left(x\right)=3x-1$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $2^{x+4}=4^{x+3}$.

5p **4.** Un produs costă 360 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 15%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A\left(-2,3\right)$, $B\left(-1,-4\right)$ și $C\left(5,4\right)$. Arătați că triunghiul AMC este dreptunghic, unde M este mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care unghiurile A și B au măsurile egale cu $30°$, respectiv $45°$ și $BC=4$. Determinați lungimea laturii AC a triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}-1 & x\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B\cdot B=A$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B+\left(\det B\right)A\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=x+y+16$.

5p **a)** Arătați că $\left(-8\right)\circ 2=10$.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care pentru care $x\circ\left(\frac{x}{2}+3\right)\circ x=2x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(0,+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=\frac{2}{x^2}+\ln x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'\left(x\right)=\frac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}{x^3}$, $x\in\left(0,+\infty\right)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2f\left(x\right)}{x^3-1}=-1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x^2-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f\left(x\right)dx=-\frac{2}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\left(f\left(x\right)+1\right)\ln x dx=\frac{2e^3+1}{9}$.

5p **c)** Determinați numărul real, a, $a\in\left(0,+\infty\right)$, pentru care $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(f\left(\sin x\right)+f\left(\cos x\right)\right)\operatorname{tg}x dx=\ln a$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 11

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,6+0,8):0,7-0,25\cdot 4=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-5$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)-f(2)=2f(4)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-7\right)=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un element n din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots 20\}$, numărul $2n$ să fie multiplu de 10.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-8,6)$ și $B(a,4)$, unde a este număr real. Determinați numerele reale a pentru care $MA=OB$, unde M este mijlocul segmentului OA.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=12$ și $BC=13$. Determinați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & x\\ 1 & x+1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=9$.

5p **b)** Arătați că $A+B(1)\cdot B(-1)=2B(0)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $B(1)+B(2)+B(3)+\ldots+B(9)=9B(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=\frac{x+y}{2}-\frac{xy}{3}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 6=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ 6=6$.

5p **c)** Determinați numerele întregi m pentru care $m\circ(3m)\geq 2m-3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^4}{2}-2x^3+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2x^2(x-3)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^2e^x}$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\geq-\frac{21}{2}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\frac{1}{f(x)}\,dx$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,2)$ pentru care $\int_{-a}^{a}\frac{1}{x^2+2f(x)+2}\,dx=\frac{2}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Testul 12

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{2}{3}\right)^2 : \frac{1}{3} - 3:9 = 1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-9$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-4x+8}=x$.

5p **4.** După o ieftinire cu 8%, un produs costă 184 de lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,3)$, $B(4,1)$, C și D. Știind că punctele C și B sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv CD, determinați coordonatele punctului D.

5p **6.** Se consideră $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\cdot\sin x$. Arătați că $\sin x = \frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A = 0$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A = 5A$.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $\det\left(xA+(1-x)I_2\right)\geq 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3xy-x^2-y^2$.

5p **a)** Arătați că $1*2=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $2*x=1$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\left(\sqrt[3]{x}*\sqrt[3]{x}\right)*\sqrt[3]{x^2}=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-\frac{x}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 \left(x^2+1\right)f(x)\,dx = 24$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x)-1\right)dx$.

5p **c)** Arătați că orice primitivă F a funcției f este concavă pe $[0,+\infty)$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2\cdot\left(2-\frac{3}{4}:\frac{1}{2}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-4$. Arătați că $f(1)+g(1)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4-x}=4$.

5p **4.** Un produs costă 70 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,4)$, $B(-3,0)$ și $C(0,4)$. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, în care $AC=2$, $BC=4$ și unghiul A are măsura egală cu $30°$. Arătați că $\sin B=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=7$.

5p **b)** Arătați că $2B+I_2=3A$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A\cdot X-B\cdot X=I_2-X$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=3-(x-3)(y-3)$.

5p **a)** Arătați că $1*3=3$.

5p **b)** Arătați că $e=2$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x*(x+6)\geq 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{x}+\ln x-5$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-4}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că **nu** există asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-e^x-3\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\left(f(x)-3x^2\right)dx=\frac{5}{2}$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,1)$, știind că $\int_0^a\frac{1}{f(x)-f'(x)}dx=\frac{1}{6}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 4

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=4$ și rația este $r=5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-1$. Arătați că $f(0)=f(1)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x+4)=\log_4 16$.

5p **4.** După o scumpire cu 25%, un produs costă 350 de lei. Determinați prețul produsului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$ și $B(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul O este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul isoscel ABC, dreptunghic în A. Știind că aria triunghiului ABC este egală cu 8, determinați lungimea laturii AB.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & -2x\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=3$.

5p **b)** Arătați că $3B(2)+B(6)=4B(3)$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $\big(B(-x)-B(x)\big)\cdot\big(B(-x)+B(x)\big)=A+B(3)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x+4y-25$.

5p **a)** Arătați că $3\circ 4=0$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $(2x)\circ x=5$.

5p **c)** Determinați numerele întregi m pentru care $m^2\circ 1\geq 1\circ m^2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x}{3x+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2}{(3x+1)^2}$, $x\in\left(-\frac{1}{3},+\infty\right)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este concavă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\ln x-1$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^4\big(f(x)-\ln x+1\big)\,dx=21$.

5p **b)** Arătați că $\int_2^4\frac{x}{f(x)-\ln x}\,dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Determinați $a\in(1,+\infty)$ pentru care $\int_1^a\frac{f(x)}{x^2}\,dx=\frac{a-\ln a}{a}$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(0,25\cdot 10-\frac{1}{2}\right)\left(0,25\cdot 10+\frac{1}{2}\right)=6$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-ax+1$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(2,1)$ aparţine graficului funcţiei f.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+2}+3^x=30$.

5p **4.** Un obiect costă 500 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ şi $B(8,3)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB. Calculați distanța de la punctul M la punctul $O(0,0)$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=5$ şi $AC=10$. Calculaţi aria triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătați că $A\cdot A-3A=I_2$.

5p **c)** Se consideră matricea $X=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale. Determinaţi numerele reale x şi y pentru care $A\cdot X-X\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4xy+x+y$.

5p **a)** Arătaţi că $3\circ 2=29$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=\frac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x\circ x\le 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2-e}{2e}\le f(x)\le\frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}\,dx=\frac{e^2+a}{4}$.

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $(1+3i)^2-6i=-8$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-7$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor celor două funcţii.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3-x}=2x$.

5p **4.** Arătaţi că numărul de submulţimi cu două elemente ale mulţimii $A=\{1,2,3,4,5\}$ este egal cu numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii A.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(-1,0)$ şi $C(0,a)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că dreapta AB conţine punctul C.

5p **6.** Se consideră numărul real $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x+\sin\frac{\pi}{6}=1$. Calculaţi $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ şi $M(x)=A+xB$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=0$.

5p **b)** Demonstraţi că $M(x)\cdot M(1)=xM(1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi numărul natural n, ştiind că $M(4)\cdot M(3)\cdot M(2)\cdot M(1)=nM(1)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=x+y+x^2y^2$.

5p **a)** Arătaţi că $1*2=7$.

5p **b)** Demonstraţi că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$*$”.

5p **c)** Determinaţi numerele întregi x pentru care $(-2)*x\le 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^4-2x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+4x^3-2$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f este convexă.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^3\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)+\frac{1}{x}\right)\ln x\,dx=2\ln 2-\frac{3}{4}$.

5p **c)** Determinaţi cel mai mare număr natural nenul n pentru care $\int_1^{\sqrt{2}}x^{n+1}f^n(x)dx\ge\frac{1}{2021}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$5-3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=5-3\cdot\frac{4}{3}=$	**3p**
	$=5-4=1$	**2p**
2.	$f(a)=a-4$	**2p**
	$a-4=2$, de unde obținem $a=6$	**3p**
3.	$4+2x=4$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	$\frac{10}{100}\cdot 90=9$ lei	**3p**
	Prețul după scumpire este $90+9=99$ de lei	**2p**
5.	$a=\frac{1+5}{2}$, $b=\frac{4+0}{2}$	**3p**
	$a=3$, $b=2$	**2p**
6.	$\sin C=\frac{AB}{BC}$	**2p**
	$\frac{1}{2}=\frac{3}{BC}$, de unde obținem $BC=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 4=$	**3p**
	$=6-4=2$	**2p**
b)	$2B=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow A+2B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 6 & 9\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=3C$	**2p**
c)	$B\cdot C+x(A-C)=\begin{pmatrix}0 & -8+2x\\ 8+2x & 8\end{pmatrix}$, deci $\det\left(B\cdot C+x(A-C)\right)=(8+2x)(8-2x)$, pentru orice număr real x	**3p**
	$(8+2x)(8-2x)=0$, de unde obținem $x=-4$ sau $x=4$	**2p**
2.a)	$1*1=(1+2\cdot 1)(1+2\cdot 1)+2=$	**3p**
	$=3\cdot 3+2=11$	**2p**
b)	$x*0=2x^2+2$, pentru orice număr real x, deci $2x^2+2=4$	**3p**
	$x^2-1=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**2p**

c)	$x*\frac{1}{x}=\left(x+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{1}{x}+2x\right)+2=1+2x^2+\frac{2}{x^2}+4+2=$	**3p**
	$=2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+7>7$, pentru orice număr real nenul x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\cdot 5x^4+5\cdot 4x^3-10\cdot 3x^2=$	**3p**
	$=10x^4+20x^3-30x^2=10x^2\left(x^2+2x-3\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1,\ f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ sau $x=0$ sau $x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[-3,1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[-3,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(1)$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**3p**
	$f(1)=-2$, de unde obținem $2x^5+5x^4-10x^3+1\ge -2$, deci $2x^5+5x^4-10x^3+3\ge 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)dx=\int_0^2 6x\,dx=6\cdot\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=12-0=12$	**2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-6x\right)dx=\int_0^1\frac{2}{x+1}dx=2\ln(x+1)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2\ln 2-2\ln 1=2\ln 2$	**2p**
c)	$\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\ln^2 x\,dx=\int_1^e 6x\ln^2 x\,dx=\int_1^e\left(3x^2\right)'\ln^2 x\,dx=3x^2\ln^2 x\Big\vert_1^e-\int_1^e 6x\ln x\,dx=$	**3p**
	$=3e^2-3x^2\ln x\Big\vert_1^e+\frac{3x^2}{2}\Big\vert_1^e=\frac{3\left(e^2-1\right)}{2}$	
	$\frac{3\left(e^2-1\right)}{2}=\frac{a\left(e^2-1\right)}{2}$, de unde obținem $a=3$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1,5-0,5)\cdot 3-2\cdot 0,5=1\cdot 3-1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
2.	$f(a)=2a-3$	**2p**
	$2a-3=9$, de unde obținem $a=6$	**3p**
3.	$3x-1=5$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $5n\leq 22$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$x_M=\frac{-2+6}{2}$, $y_M=\frac{1+3}{2}$, unde M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$x_M=2$, $y_M=2$	**2p**
6.	$AB=3$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{3\cdot 4}{2}=6$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=2\cdot 3-1\cdot 1=$	**3p**
	$=6-1=5$	**2p**
b)	$2A-B(2)=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2B(0)$	**2p**
c)	$B(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B(x)\cdot B(1)-(x+1)A=\begin{pmatrix}2 & x+2\\ x+2 & x+4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2x+2 & x+1\\ x+1 & 3x+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x & 1\\ 1 & 1-2x\end{pmatrix}$	**3p**
	și $\det\left(B(x)\cdot B(1)-(x+1)A\right)=4x^2-2x-1$, pentru orice număr real x $4x^2-2x-1=1\Leftrightarrow 2x^2-x-1=0$, de unde obținem $x=-\frac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p**
2.a)	$1\circ 1=1+1-6\cdot 1\cdot 1=$	**3p**
	$=2-6=-4$	**2p**
b)	$0\circ x=0+x-6\cdot 0\cdot x=0+x-0=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x\circ 0=x+0-6\cdot x\cdot 0=x+0-0=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

c)	$m\circ(3-m)=3-6m(3-m)$, pentru orice număr întreg m	**2p**
	$3-6m(3-m)<3\Leftrightarrow m(m-3)<0$ și, cum m este număr întreg, obținem $m=1$ și $m=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2\cdot 3x^2-3\cdot 4x^3=$	**3p**
	$=6x^2-12x^3=6x^2(1-2x)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x^4}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+2}{x^3+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(2+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2+\frac{2}{x^3}}{1+\frac{4}{x^3}}=2$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=\dfrac{1}{2}$; $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\dfrac{1}{2},2\right]$	**2p**
	$f(0)=2$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{33}{16}$ și $f(2)=-30$, deci $-30\leq f(x)\leq\dfrac{33}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$, de unde obținem $-32\leq 2x^3-3x^4\leq\dfrac{1}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$	**3p**
2.a)	$\int_2^3\left(f(x)-3e^x\right)dx=\int_2^3 2xdx=x^2\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=9-4=5$	**2p**
b)	$\int_0^1 x\left(f(x)-2x\right)dx=\int_0^1 3xe^x dx=3xe^x\Big\vert_0^1-3e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=3e-0-3e+3=3$	**2p**
c)	$\int_0^1\dfrac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{\left(2f(x)-x^2\right)'}{2f(x)-x^2}dx=\dfrac{1}{2}\ln\left\vert 2f(x)-x^2\right\vert\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)=a\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$, de unde obținem $a=\dfrac{1}{2}$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1+6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=1+6\cdot\frac{5}{6}=$	**3p**
	$=1+5=6$	**2p**
2.	$f(3)=1$	**2p**
	$f(2)=0$, de unde obținem $f(3)-f(2)=1-0=1$	**3p**
3.	$3x+1=4$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $10-n$ este par sunt 2, 4, 6 și 8, de unde obținem 4 cazuri favorabile, deci $p=\frac{4}{9}$	**3p**
5.	Pentru orice număr real a, $AB=\sqrt{(a-a)^2+(6-0)^2}=$	**3p**
	$=\sqrt{6^2}=6$	**2p**
6.	$AC=10$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=7\cdot 1-3\cdot 3=$	**3p**
	$=7-9=-2$	**2p**
b)	$A-4I_2=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & -3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=3B$	**2p**
c)	$X\cdot(I_2+B)=A$ și, cum $I_2+B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ și $\det(I_2+B)\neq 0$, obținem $X=A\cdot(I_2+B)^{-1}$	**2p**
	$(I_2+B)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$2*3=2\cdot 3(2+3-4)=$	**3p**
	$=6\cdot 1=6$	**2p**

b)	$1*x=x^2-3x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2-3x-4=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=4$	**3p**
c)	$2^x*2^x=2^{2x}\left(2^x+2^x-4\right)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$2^{2x}\left(2^x+2^x-4\right)=2^{3x}\Leftrightarrow 2^x+2^x-4=2^x\Leftrightarrow 2^x=4$, de unde obținem $x=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2-9\cdot 2x=$	**3p**
	$=3x^2-18x=3x(x-6),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Rightarrow x=0$ sau $x=6$	**2p**
	Pentru orice $x\in(-\infty,0]$, $f'(x)\geq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(-\infty,0]$, pentru orice $x\in[0,6]$, $f'(x)\leq 0\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[0,6]$ și pentru orice $x\in[6,+\infty)$, $f'(x)\geq 0\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[6,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{3f(x)-xf'(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\left(x^2-6x+5\right)}{9\left(1-x^2\right)}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)(x-5)}{-9(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{-3(x+1)}=\dfrac{2}{3}$	**3p**
2.a)	$\int\limits_0^2\dfrac{f(x)}{e^x}dx=\int\limits_0^2(x-1)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2-2=0$	**2p**
b)	$\int\limits_0^1 f(x)dx=\int\limits_0^1(x-1)e^x dx=(x-1)e^x\Big\vert_0^1-e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-(e-1)=2-e$	**2p**
c)	$\int\limits_2^n\dfrac{x}{f(x)\cdot f(-x)}dx=\int\limits_2^n\dfrac{x}{1-x^2}dx=-\dfrac{1}{2}\int\limits_2^n\dfrac{\left(x^2-1\right)'}{x^2-1}dx=-\dfrac{1}{2}\ln\left\vert x^2-1\right\vert\Big\vert_2^n=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{n^2-1}$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{n^2-1}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{8}$ și, cum n este număr natural, $n>2$, obținem $n=3$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\sqrt{8}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{36}=\left(2\sqrt{2}\right)^2-1-6=$	**3p**
	$=8-7=1$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 5x-1=5+2x$	**2p**
	Coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g sunt $x=2$ și $y=9$	**3p**
3.	$x^2+6x=x^2$	**3p**
	$x=0$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $4\cdot n$ este element al mulțimii A sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{3}{10}$	**1p**
5.	$2=\dfrac{3+x_C}{2}$ și $1=\dfrac{4+y_C}{2}$, deci punctul C are coordonatele $x_C=1$ și $y_C=-2$	**2p**
	$OA=\sqrt{5}$, $OC=\sqrt{5}$ și $AC=\sqrt{10}$, deci $OA^2+OC^2=AC^2$, de unde obținem că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$, $\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$	**2p**
	$\dfrac{1}{2}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot\cos A$, deci $\sin A=\cos A$, de unde obținem $\operatorname{tg} A=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}=3\cdot(-3)-(-6)\cdot 2=$	**3p**
	$=-9+12=3$	**2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A+A=\begin{pmatrix}0 & -6\\ 2 & -6\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot A+A=2\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}=2B(-1)$, de unde obținem $x=-1$	**3p**
c)	$B(a)\cdot A=\begin{pmatrix}2a-4 & -3a+6\\ 3+6a & -6-9a\end{pmatrix}$, $B(3a)=\begin{pmatrix}0 & 3a-2\\ 1 & 9a\end{pmatrix}$, deci $B(a)\cdot A+B(3a)=\begin{pmatrix}2a-4 & 4\\ 4+6a & -6\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\det\left(B(a)\cdot A+B(3a)\right)=-36a+8$, pentru orice număr real a, deci $-36a+8=4\Rightarrow a=\dfrac{1}{9}$	**2p**

2.a)	$1*2=(1\cdot 2+1)(1+2)=$	**3p**
	$=3\cdot 3=9$	**2p**
b)	$x*0=(x\cdot 0+1)(x+0)=1\cdot x=x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$0*x=(0\cdot x+1)(0+x)=1\cdot x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”	**3p**
c)	$N=2\left(n+\frac{1}{n}\right)=2n+\frac{2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n	**2p**
	N este număr întreg, deci $\frac{2}{n}$ este număr întreg și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=1$ sau $n=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=e^x+(x-1)e^x-\frac{2x}{2}=$	**3p**
	$=xe^x-x=x\left(e^x-1\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(x^2\right)'}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(e^x-1\right)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2}=0$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**2p**
	Cum $x\leq 0\leq x^2$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, obținem $f(x)\leq f\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$	**3p**
2.a)	$\int_1^2(x+4)f(x)\,dx=\int_1^2 4x\,dx=2x^2\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=8-2=6$	**2p**
b)	$\int_1^4\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=2\int_1^4\frac{2x}{x^2+4}dx=2\int_1^4\left(x^2+4\right)'\cdot\frac{1}{x^2+4}dx=2\ln\left(x^2+4\right)\Big\vert_1^4=$	**3p**
	$=2\ln 20-2\ln 5=4\ln 2$	**2p**
c)	Dacă $F:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$	**2p**
	$F''(x)=f'(x)=\frac{16}{(x+4)^2}>0$, pentru orice $x\in(-4,+\infty)$, deci orice primitivă a funcției f este convexă	**3p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_4 - a_3 = 3$, unde r este rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 = 6 - 2\cdot 3 = 0$	**3p**
2.	$f(a) = g(a) \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = a - 3 \Leftrightarrow a^2 + a = 0$	**3p**
	$a = -1$ sau $a = 0$	**2p**
3.	$x + 3 = 3^2 \Leftrightarrow x + 3 = 9$	**3p**
	$x = 6$, care convine	**2p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot x = 60$, unde x este prețul înainte de scumpire, deci $x = 200$ de lei	**3p**
	După scumpire, prețul produsului este $200 + 60 = 260$ de lei	**2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$2 = 2\cdot(-1) + a$, de unde obținem $a = 4$	**3p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de unde obținem $AB = AC = 6\sqrt{2}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2} = 36$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**3p**
	$= 0\cdot 1 - 0\cdot 1 = 0$	**2p**
b)	$2A(4) + A(-2) = 2\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 3\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 3A(2)$, de unde obținem $a = 3$	**2p**
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = 2$ și $(A(1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	**2p**
	$A(m) = \begin{pmatrix} m & m \\ 1 & 2m+1 \end{pmatrix}$ și, cum $X = A(m)\cdot(A(1))^{-1}$, obținem $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ -m+1 & m \end{pmatrix}$, unde m este număr întreg, deci matricea X are toate elementele numere întregi	**3p**
2.a)	$2 * 1 = (2+1)(2-1)(1-1)+1 =$	**3p**
	$= 3\cdot 1\cdot 0 + 1 = 1$	**2p**

b)	$x*y=(x+y)(x-1)(y-1)+1=$	**2p**
	$=(y+x)(y-1)(x-1)+1=y*x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$n*(1-n)=-n^2+n+1$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$-n^2+n+1\geq n^2 \Leftrightarrow 2n^2-n-1\leq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x^2-(x+3)\cdot 2x}{x^4}+\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=\dfrac{-x-6}{x^3}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=4$, $f'(1)=-6$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-6x+10$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=3$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(0,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,3]$, $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(3)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$\dfrac{x+3}{x^2}+\ln x\geq\dfrac{2}{3}+\ln 3\Rightarrow \ln\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{2}{3}-\dfrac{x+3}{x^2}\Rightarrow \ln\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{e^x}{2}\right)dx=\int_0^2(x+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=\dfrac{2^2}{2}+2=4$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 2x\big(f(x)-1\big)dx=\int_0^1\left(2x^2+xe^x\right)dx=\frac{2x^3}{3}\Big\vert_0^1+(x-1)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{2}{3}+1=\dfrac{5}{3}$	**2p**
c)	Cum $f'(x)=1+\dfrac{e^x}{2}=f(x)-x$, $x\in\mathbb{R}$, obținem $\displaystyle\int_{-1}^0\big(f(x)-x\big)\cdot f(x)\,dx=\int_{-1}^0 f'(x)\cdot f(x)\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{f^2(x)}{2}\Big\vert_{-1}^0=\dfrac{9e^2-1}{8e^2}$	
	$\dfrac{9e^2-1}{8e^2}=\dfrac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$, de unde obținem $a=-1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $5-3\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4+2x}=2$.

5p **4.** Un produs costă 90 de lei. Determinați prețul produsului după o scumpire cu 10%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(5,0)$ și $M(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, în care măsura unghiului C este egală cu $30°$ și $AB=3$. Arătați că $BC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $A+2B=3C$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B\cdot C+x(A-C)\right)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+2y)(y+2x)+2$.

5p **a)** Arătați că $1*1=11$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*0=4$.

5p **c)** Demonstrați că $x*\frac{1}{x}>7$, pentru orice număr real nenul x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^5+5x^4-10x^3+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=10x^2\left(x^2+2x-3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $2x^5+5x^4-10x^3+3\geq 0$, pentru orice $x\in[-3,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x+\frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-6x\right)dx=2\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^e\left(f(x)-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\ln^2 x\,dx=\frac{a\left(e^2-1\right)}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(1,5-0,5)\cdot 3-2\cdot 0,5=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(3x-1)=\log_4 5$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $5n\le 22$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(6,3)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=4$ și $BC=5$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 6.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}2-x & x\\ x & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=5$.

5p **b)** Arătați că $2A-B(2)=2B(0)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det\left(B(x)\cdot B(1)-(x+1)A\right)=1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y-6xy$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=-4$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele întregi m pentru care $m\circ(3-m)<3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^4+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6x^2(1-2x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+3x^4}{x^3+4}=2$.

5p **c)** Demonstrați că $-32\le 2x^3-3x^4\le\dfrac{1}{16}$, pentru orice $x\in[0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3\left(f(x)-3e^x\right)dx=5$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x\left(f(x)-2x\right)dx=3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_0^1\dfrac{f'(x)-x}{2f(x)-x^2}dx=a\ln\left(e+\dfrac{1}{2}\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1+6\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$. Arătați că $f(3)-f(2)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x+1}=2$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, numărul $10-n$ să fie par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,0)$ și $B(a,6)$, unde a este număr real. Arătați că $AB=6$, pentru orice număr real a.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=5$ și $AC=2AB$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 25.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}7 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătați că $A-4I_2=3B$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X+X\cdot B=A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy(x+y-4)$.

5p **a)** Arătați că $2*3=6$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $1*x=4$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $2^x*2^x=2^{3x}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-9x^2+3$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3x(x-6)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{3f(x)-xf'(x)}=\dfrac{2}{3}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\dfrac{f(x)}{e^x}dx=0$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=2-e$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, $n>2$, pentru care $\int_2^n\dfrac{x}{f(x)\cdot f(-x)}dx=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{8}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{8}+1\right)\cdot\left(2\sqrt{2}-1\right)-\sqrt{36}=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=5+2x$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+6x}=x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, numărul $4\cdot n$ să fie element al mulțimii A.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$, $B(3,4)$ și C, astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC. Arătați că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 30^\circ\cdot\sin A=\cos 60^\circ\cdot\cos A$. Calculați $\operatorname{tg} A$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ 2 & -3\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(a)=\begin{pmatrix}0 & a-2\\ 1 & 3a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot A+A=2B(x)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det\left(B(a)\cdot A+B(3a)\right)=4$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(xy+1)(x+y)$.

5p **a)** Arătați că $1*2=9$.

5p **b)** Arătați că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $N=n*\frac{1}{n}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x-\frac{x^2}{2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x\left(e^x-1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x^2}=0$.

5p **c)** Arătați că $f(x)\le f\left(x^2\right)$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$.

2. Se consideră funcția $f:(-4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4x}{x+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2(x+4)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^4\frac{1}{x}\cdot f\left(x^2\right)dx=4\ln 2$.

5p **c)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=6$ și $a_4=9$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-3$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+3)=2$.

5p **4.** În urma unei scumpiri cu 30%, prețul unui produs a crescut cu 60 de lei. Determinați prețul produsului după scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$, $B(2,3)$ și dreapta d de ecuație $y=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei d.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=AC$, $BC=12$ și măsura unghiului B egală cu $45°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 36.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $2A(4)+A(-2)=aA(2)$.

5p **c)** Arătați că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A(1)=A(m)$, unde m este număr întreg, atunci matricea X are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $2*1=1$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n*(1-n)\geq n^2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\dfrac{x}{3}\geq\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{x}-\dfrac{3}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\dfrac{e^x}{2}+1$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2\left(f(x)-\frac{e^x}{2}\right)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 2x\left(f\left(x\right)-1\right)dx=\frac{5}{3}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_{-1}^0 \left(f\left(x\right)-x\right)\cdot f\left(x\right)dx=\frac{\left(3e+1\right)\left(3e+a\right)}{8e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=3\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=$	**3p**
	$=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=4$	**2p**
2.	$f(a)=a+2$	**2p**
	$a+2=6$, de unde obținem $a=4$	**3p**
3.	$2x+1=9$	**3p**
	$x=4$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 23 de elemente, deci sunt 23 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 14 numere n care verifică inegalitatea $n\geq 10$, deci sunt 14 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{14}{23}$	**3p**
5.	$x_M=\frac{-1+1}{2}=0$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**3p**
	$y_M=\frac{2+6}{2}=4$	**2p**
6.	$AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=\sqrt{2}$	**3p**
	$AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-2\cdot 2=$	**3p**
	$=3-4=-1$	**2p**
b)	$2B-A=\begin{pmatrix}0 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 6\\ 6 & 3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=3C$	**2p**
c)	$B+2C=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 8 & 4\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\frac{1}{2}(B+2C)\cdot A^{-1}$, de unde obținem $X=\begin{pmatrix}9 & -14\\ 0 & 2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$5*4=(5-4)(4-4)+4=$	**3p**
	$=1\cdot 0+4=4$	**2p**

b)	$x*6=2x-4$, pentru orice număr real x	**3p**
	$2x-4=6x$, de unde obținem $x=-1$	**2p**
c)	$\left(\frac{4}{n}-4\right)(n-4)+4>4\Leftrightarrow\left(\frac{1}{n}-1\right)(n-4)>0$, unde n este număr natural nenul	**2p**
	Cum n este număr natural nenul, obținem $n=2$ și $n=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=3x^2+6\cdot 2x-15=$	**3p**
	$=3x^2+12x-15=3\left(x^2+4x-5\right),\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-5$ sau $x=1$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-5]$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,-5]$, $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[-5,1]$, deci f este descrescătoare pe $[-5,1]$ și $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$f''(x)=3(2x+4),\ x\in\mathbb{R}$, deci $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x f''(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-5}{e^x(2x+4)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+4}{e^x(2x+6)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x(2x+8)}=0$	**2p**
2.a)	$\int_0^1(x+9)\cdot f(x)\,dx=\int_0^1 8x\,dx=4x^2\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$\int_1^6\frac{1}{8x}\cdot f(x)dx=\int_1^6\frac{1}{x+9}dx=\int_1^6\frac{(x+9)'}{x+9}dx=\ln(x+9)\Big\vert_1^6=$	**3p**
	$=\ln 15-\ln 10=\ln\frac{3}{2}$	**2p**
c)	$\int_0^3 f\left(x^2\right)dx=\int_0^3\frac{8x^2}{x^2+9}dx=8\int_0^3\left(1-\frac{9}{x^2+9}\right)dx=8x\Big\vert_0^3-8\cdot\frac{9}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\Big\vert_0^3=24-6\pi$	**3p**
	$24-6\pi=6(4+a\pi)$, de unde obținem $a=-1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$4\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}=4\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=$	**3p**
	$=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$	**2p**
2.	$f(0)=2$	**2p**
	$f(1)=5\Rightarrow f(0)\cdot f(1)=2\cdot 5=10$	**3p**
3.	$2x-3=x$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n din mulțimea A pentru care $n^2\leq 23$ sunt 0, 1, 2, 3 și 4, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$	**3p**
5.	$OA=3$, $OB=4$	**2p**
	$AB=5$, deci $P_{\Delta OAB}=3+4+5=12$	**3p**
6.	$\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$	**2p**
	$\left(1+2\cos 60^\circ\right)\cdot\sin 30^\circ=\left(1+2\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}=1\cdot 3-0\cdot 1=$	**3p**
	$=3-0=3$	**2p**
b)	$B(8)-3B(2)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ -1 & 6\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A$	**2p**
c)	$A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}x & 0\\ x-3 & 3x-6\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}x & 0\\ x-3 & 3x-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & 0\\ -1 & x-2\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=2$	**2p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-2X+3\Rightarrow f(1)=1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1+3=$	**3p**
	$=1-2-2+3=0$	**2p**

b)	$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$ și $x_1x_2x_3=-m\Rightarrow x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3=-2-m$	**3p**
	$-2-m=1$, de unde obținem $m=-3$	**2p**
c)	$f(-2)=m-12$, pentru orice număr real m	**2p**
	$m-12=0$, de unde obținem $m=12$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{3\left(x^2+1\right)-3x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{3-3x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{3\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=0$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{2\cdot 1^3}{3}-\dfrac{2\cdot 0^3}{3}=\dfrac{2}{3}$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^2\frac{4x}{f(x)}dx=\int_0^2\frac{4x}{2x^2+1}dx=\int_0^2\frac{\left(2x^2+1\right)'}{2x^2+1}dx=\ln\left(2x^2+1\right)\Big|_0^2=$	**3p**
	$=\ln 9-\ln 1=2\ln 3$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(\frac{2}{x^2}+1\right)\cdot\ln x\,dx=\int_1^e\left(-\frac{2}{x}+x\right)'\cdot\ln x\,dx=\left(-\frac{2}{x}+x\right)\cdot\ln x\Big|_1^e-\left(\frac{2}{x}+x\right)\Big|_1^e=3-\frac{4}{e}$	**3p**
	$3-\dfrac{4}{e}=2n^2+1-\dfrac{4}{e}$ și, cum n este număr natural, obținem $n=1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r=a_2-a_1=10$, unde r este rația progresiei aritmetice	**2p**
	$a_3=a_2+r=20+10=30$	**3p**
2.	$f(0)=4$	**2p**
	$f(1)=6\Rightarrow f(0)+f(1)=4+6=10$	**3p**
3.	$x-4=4$	**3p**
	$x=8$, care convine	**2p**
4.	$\frac{20}{100}\cdot 80=16$ lei	**2p**
	Prețul după ieftinire este $80-16=64$ de lei	**3p**
5.	$MN=\sqrt{9+16}=$	**3p**
	$=\sqrt{25}=5$	**2p**
6.	$AC=4$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{4\cdot 4}{2}=8$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}2 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot 2-5\cdot(-1)=$	**3p**
	$=4+5=9$	**2p**
b)	$A(a)+A(-a)=\begin{pmatrix}a & a+3\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-a & -a+3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -2 & 4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}0 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=2A(0)$, pentru orice număr real a	**2p**
c)	$A(a)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}-2a-3 & 4a+6\\ -1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A(a)\cdot A(-1)-aI_2=\begin{pmatrix}-3a-3 & 4a+6\\ -1 & 2-a\end{pmatrix}$, de unde obținem	**3p**
	$\det(A(a)\cdot A(-1)-aI_2)=3a^2+a$, pentru orice număr real a	
	$3a^2+a=0$, de unde obținem $a=-\frac{1}{3}$ sau $a=0$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+3\cdot 0^2+m\cdot 0-4=$	**3p**
	$=0+0+0-4=-4$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$f(-1)=-m-2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$f(-1)=0$, de unde obținem $m=-2$	**3p**

c)	$x_1+x_2+x_3=-3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9-2m$, pentru orice număr natural m	**3p**
	$9-2m>5$ și, cum m este număr natural, obținem $m=0$ sau $m=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-3+\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-3x+1}{x}=\frac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=2$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ sau $x=1$; $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ și $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $\left[\frac{1}{2},1\right]$	**3p**
	$f(x)\leq f\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice $x\in(0,1]$ și, cum $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}-\ln 2$, obținem $f(x)\leq\frac{11}{4}-\ln 2$, pentru orice $x\in(0,1]$	**2p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\frac{6}{2x+3}\right)dx=\int_1^3 e^x\,dx=e^x\Big\vert_1^3=$	**3p**
	$=e^3-e=e\left(e^2-1\right)$	**2p**
b)	$\int_{-1}^0\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_{-1}^0\frac{6}{2x+3}dx=3\int_{-1}^0\frac{(2x+3)'}{2x+3}dx=3\ln(2x+3)\Big\vert_{-1}^0=$	**3p**
	$=3(\ln 3-\ln 1)=3\ln 3$	**2p**
c)	$g(x)=\left(2x^2+3x\right)e^x+6x$, $x\in\left(-\frac{3}{2},+\infty\right)$, deci $\mathcal{A}=\int_0^1\vert g(x)\vert dx=\int_0^1\left(\left(2x^2+3x\right)e^x+6x\right)dx=$	**3p**
	$=\left(2x^2+3x\right)e^x\Big\vert_0^1-(4x+3)e^x\Big\vert_0^1+4e^x\Big\vert_0^1+3x^2\Big\vert_0^1=$	
	$=5e-7e+3+4e-4+3=2e+2=2(e+1)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$1,5+3\cdot(1-0,5)=1,5+3\cdot 0,5=$	**3p**
	$=1,5+1,5=3$	**2p**
2.	$f(0)=5$	**2p**
	$f(1)=4$, deci $f(0)-f(1)=5-4=1$	**3p**
3.	$3x-8=1$	**3p**
	$x=3$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 5 elemente, deci sunt 5 cazuri posibile	**2p**
	Numerele n, din mulțimea A, pentru care $2n\geq 9$ sunt 5, 7 și 9, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{3}{5}$	**3p**
5.	$AC=\sqrt{10}$	**2p**
	$BC=\sqrt{10}$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}\Rightarrow 50=\frac{AB\cdot 5}{2}$	**3p**
	$AB=\frac{2\cdot 50}{5}=20$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=$	**3p**
	$=1+1=2$	**2p**
b)	$3A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}6 & 3\\ -6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & 1\\ -6 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 4\\ -12 & -4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=4\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}=4A(3)$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x^2-x & 2\\ -2x & x^2-5x+4\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix}x^2-x & 2\\ -2x & x^2-5x+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 2\\ -2x & 4-2x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=0$ sau $x=3$	**3p**
2.a)	$1*1=1\cdot 1+2\cdot 1-1-1=$	**3p**
	$=1+2-1-1=1$	**2p**
b)	$x*2=4x-3$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x-3=x$, de unde obținem $x=1$	**2p**

c)	$(1-x)*x=-x^2-2x-1+2=$	**3p**
	$=-(x+1)^2+2\le 2$, pentru orice număr real x	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-2e^{-x}=2-\dfrac{2}{e^x}=$	**3p**
	$=\dfrac{2e^x-2}{e^x}=\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f(0)=1$, $f'(0)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+\dfrac{2}{e^x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2+\dfrac{2}{xe^x}-\dfrac{1}{x}\right)=2$, deci $m=2$	**3p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-2x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{e^x}-1\right)=-1$, deci $n=-1$	**2p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-3x\right)dx=\int_1^2 4x^3\,dx=x^4\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=16-1=15$	**2p**
b)	$\int_2^5\dfrac{1}{f(x)-4x^3+3}dx=\dfrac{1}{3}\int_2^5\dfrac{1}{x+1}dx=\dfrac{1}{3}\ln(x+1)\Big\vert_2^5=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}(\ln 6-\ln 3)=\dfrac{1}{3}\ln 2$	**2p**
c)	$g(x)=5x^2+3$, $x\in[1,2]$, deci $\mathcal{V}=\pi\int_1^2\left(25x^4+30x^2+9\right)dx=\pi\left(5x^5+10x^3+9x\right)\Big\vert_1^2=234\pi$	**3p**
	$f(3)=4\cdot 3^3+3\cdot 3=117$, deci $\mathcal{V}=2\pi f(3)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_6 = a_2 + 4r$, deci $4r = 16$, de unde obținem $r = 4$, unde r este rația progresiei aritmetice	**3p**
	$a_1 = a_2 - r = 7 - 4 = 3$	**2p**
2.	$f(a) = 3a \Leftrightarrow 8a - 5 = 3a$	**3p**
	$a = 1$	**2p**
3.	$\log_4(3x^2) = \log_4 12$, de unde obținem $3x^2 = 12$	**3p**
	$x = -2$, care nu convine; $x = 2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	Numerele naturale n, de două cifre, pentru care $\sqrt{n}$ este număr natural par sunt 16, 36 și 64, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}$	**3p**
5.	$M(-1,3)$ și $N(3,0)$, unde punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv OC	**2p**
	$MN = \sqrt{(3+1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$	**3p**
6.	$\sin B = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{16}$, deci $AC = 8$	**2p**
	$AB = \sqrt{BC^2 - AC^2} = 8\sqrt{3}$ și, cum $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2}$, obținem $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{8 \cdot 8\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) - 3 \cdot (-2) =$	**3p**
	$= 3 + 6 = 9$	**2p**
b)	$B(3) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B(4) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B(3) \cdot B(4) = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ 14 & 0 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 7\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 7B(1)$, de unde obținem $x = 7$	**2p**
c)	$C \cdot B(a) = \begin{pmatrix} \frac{-a+1}{3} & \frac{a+2}{3} \\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9} \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$C \cdot B(a) = B(a) \cdot C = I_2$, de unde obținem $a = -2$	**3p**

2.a)	$f=X^3+X^2+X-4\Rightarrow f(2)=2^3+2^2+2-4=$ $=8+4+2-4=10$	**3p** **2p**
b)	$f=X^3+X^2-4X-4\Rightarrow f=(X+1)(X-2)(X+2)$ Rădăcinile polinomului f sunt -2, -1 și 2	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-1$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=m\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2m$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f Cum m este număr natural nenul, obținem $x_1^2+x_2^2+x_3^2<0$, deci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x+2)-(x^2-2x+1)\cdot 1}{(x+2)^2}=$ $=\dfrac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2}=\dfrac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{e^x(x+2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{e^x(x+3)}=$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^x(x+4)}=0$	**3p** **2p**
c)	$f''(x)=\dfrac{18}{(x+2)^3}$, $x\in(-2,+\infty)$ $f''(x)>0$, pentru orice $x\in(-2,+\infty)$, de unde obținem că funcția f este convexă	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\int_1^3(x+1)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_1^3=$ $=\dfrac{9}{2}+3-\dfrac{1}{2}-1=6$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^8\left(f(x)-x-1\right)dx=\int_0^8\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}dx=2\int_0^8(x+1)'\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}dx=2\sqrt{x+1}\Big\vert_0^8=$ $=2\cdot 3-2\cdot 1=4$	**3p** **2p**
c)	$V=\pi\int_0^3 g^2(x)dx=\pi\int_0^3\left((x+1)^2+2\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=$ $=\pi\int_0^3(x+1)'\left((x+1)^2+2\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\pi\left(\dfrac{(x+1)^3}{3}+4\cdot\dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}}{3}+\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^3=$ $=\pi\left(\dfrac{64}{3}+\dfrac{32}{3}+\ln 4-\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{3}\right)=\pi\left(\dfrac{91}{3}+\ln 4\right)$	**2p** **3p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(1-0,2):2+0,3\cdot 2=0,8:2+0,6=$	**3p**
	$=0,4+0,6=1$	**2p**
2.	$f(2)=0$, $g(2)=2+m$	**3p**
	$0=2+m$, de unde obținem $m=-2$	**2p**
3.	$7^{x+3}=7^{2x}$, de unde obținem $x+3=2x$	**3p**
	$x=3$	**2p**
4.	$x-\frac{30}{100}\cdot x=210$, unde x este prețul înainte de ieftinire	**3p**
	$x=300$ de lei	**2p**
5.	$M(1,2)$, deci $OM=\sqrt{5}$ și $MB=\sqrt{10}$	**3p**
	$OB=\sqrt{5}$, deci $MB^2=OB^2+OM^2$, de unde obținem că triunghiul OMB este dreptunghic în O	**2p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\sqrt{3}\sin 45^\circ+2\sin 30^\circ-\sqrt{2}\cos 30^\circ=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1-\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=4\cdot 1-(-2)\cdot 2=$	**3p**
	$=4+4=8$	**2p**
b)	$A(0)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow A(0)\cdot A(0)=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2 & -2\\ 2 & x-1\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-2$	**2p**
c)	$\det(A(x))=x^2+x+2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$x^2+x+2=y^2+y+2\Rightarrow (x-y)(x+y+1)=0$ și, cum x și y sunt numere reale distincte, obținem $x+y+1=0$, deci $x+y=-1$	**3p**
2.a)	$1*2=4\cdot 1\cdot 2-3\cdot 1+2\cdot 2-1=$	**3p**
	$=8-3+4-1=8$	**2p**
b)	$x*(-1)=-7x-3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$-7x-3=4\Rightarrow -7x=7$, de unde obținem $x=-1$	**3p**

c)	$4ax-3x+2a-1=-x\Rightarrow 4ax-2x+2a-1=0\Rightarrow 2x(2a-1)+2a-1=0$, pentru orice număr real x	**3p**
	$a=\frac{1}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-\frac{8}{x^2}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-8}{x^2}=\frac{2(x^2-4)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(2)=7$, $f'(2)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(2)=f'(2)(x-2)$, adică $y=7$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=2$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$	**2p**
	$0<1-x<1+x<2$, pentru orice $x\in(0,1)$, de unde obținem $f(1-x)\ge f(1+x)$, pentru orice $x\in(0,1)$	**3p**
2.a)	$\int_0^2 (f(x)-4x)dx=\int_0^2 (3x^2+2)dx=(x^3+2x)\Big\vert_0^2=$	**3p**
	$=2^3+2\cdot 2=12$	**2p**
b)	$\int_0^1 (f(x)-3x^2-2)e^x dx=\int_0^1 4xe^x dx=4(x-1)e^x\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=0+4=4$	**2p**
c)	$\int_{-1}^0 a\cdot f'(x)\cdot(f(x))^{a-1}dx=(f(x))^a\Big\vert_{-1}^0=2^a-1$, pentru orice $a\in(0,+\infty)$	**3p**
	$2^a-1=63$, de unde obținem $a=6$, care convine	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $3\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=4$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=6$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_7(2x+1)=\log_7 9$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 2, 3, \ldots, 23\}$, acesta să verifice inegalitatea $n\geq 10$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ și $B(1,6)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC=\sqrt{2}$ și $BC=2$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 4 & 2\end{pmatrix}$ și $C=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=-1$.

5p **b)** Arătați că $2B-A=3C$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $2X\cdot A=B+2C$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x-4)(y-4)+4$.

5p **a)** Arătați că $5*4=4$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*6=6x$.

5p **c)** Determinați numerele naturale nenule n pentru care $\frac{4}{n}*n>4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x^2-15x+9$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=3\left(x^2+4x-5\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{e^x f''(x)}=0$.

2. Se consideră funcția $f:(-9,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{8x}{x+9}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x+9)\cdot f(x)\,dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^6 \frac{1}{8x}\cdot f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^3 f\left(x^2\right)dx=6(4+a\pi)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 5

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $4\cdot\left(1-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Arătați că $f(0)\cdot f(1)=10$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-3}=3^x$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $n^2\leq 23$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Arătați că perimetrul triunghiului OAB este egal cu 12.

5p **6.** Arătați că $(1+2\cos 60^\circ)\cdot\sin 30^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 0\\ -1 & x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=3$.

5p **b)** Arătați că $B(8)-3B(2)=2A$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1x_2x_3=1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X+2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-1\right)dx=\frac{2}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2\frac{4x}{f(x)}dx=2\ln 3$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_1^e f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x\,dx=f(n)-\frac{4}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 6

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul a_3 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=10$ și $a_2=20$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$. Arătați că $f(0)+f(1)=10$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-4)=\log_2 4$.

5p **4.** Un produs costă 80 de lei. Determinați prețul produsului după o ieftinire cu 20%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $N(3,6)$. Arătați că distanța dintre punctele M și N este egală cu 5.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=4$ și măsura unghiului C egală cu $45°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 8.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix}a & a+3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=9$.

5p **b)** Arătați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)\cdot A(-1)-aI_2)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+3X^2+mX-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-4$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că -1 este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Determinați numerele naturale m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2>5$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+4+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{(2x-1)(x-1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\leq\dfrac{11}{4}-\ln 2$, pentru orice $x\in(0,1]$.

2. Se consideră funcția $f:\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\dfrac{6}{2x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{6}{2x+3}\right)dx=e\left(e^2-1\right)$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_{-1}^0\left(f(x)-e^x\right)dx=3\ln 3$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\left(-\dfrac{3}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\left(2x^2+3x\right)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $2(e+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 7

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $1,5+3\cdot(1-0,5)=3$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Arătați că $f(0)-f(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-8}=1$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1, 3, 5, 7, 9\}$, acesta să verifice inegalitatea $2n\geq 9$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,0)$, $B(1,2)$ și $C(4,1)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu aria egală cu 50 și $AC=5$. Arătați că lungimea laturii AB este egală cu 20.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ -x & 2-x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $3A(2)+A(6)=4A(3)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x)=2A(x)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy+2x-y-1$.

5p **a)** Arătați că $1*1=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*2=x$.

5p **c)** Arătați că $(1-x)*x\leq 2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+\dfrac{2}{e^x}-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2\left(e^x-1\right)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați numerele reale m și n, știind că dreapta d de ecuație $y=mx+n$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 (f(x)-3x)\,dx=15$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{f(x)-4x^3+3}\,dx=\frac{1}{3}\ln 2$.

5p **c)** Demonstrați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{x^3+f(x)}{x}$ este egal cu $2\pi f(3)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_2=7$ și $a_6=23$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x-5$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,3a)$ aparține graficului funcției f.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4 x+\log_4(3x)=\log_4 12$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,2)$, $B(1,4)$ și $C(6,0)$. Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor AB și OC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=16$ și măsura unghiului B egală cu $30°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -3\\ 2 & x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=9$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(4)=xB(1)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $B(a)$ este inversa matricei $C=\frac{1}{9}A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(2)=10$.

5p **b)** Pentru $m=-4$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul m, polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^8\left(f(x)-x-1\right)dx=4$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\pi\left(\frac{91}{3}+\ln 4\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(1-0,2):2+0,3\cdot 2=1$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $f(2)=g(2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^{x+3}=49^x$.

5p **4.** După o ieftinire cu 30%, un produs costă 210 lei. Determinați prețul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$ și $B(2,-1)$. Arătați că triunghiul OMB este dreptunghic în O, unde M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sqrt{3}\sin 45^\circ+2\sin 30^\circ-\sqrt{2}\cos 30^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x+2 & -2 \\ 2 & x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=8$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $A(0)\cdot A(0)=A(x)$.

5p **c)** Arătați că, dacă x și y sunt numere reale distincte astfel încât $\det(A(x))=\det(A(y))$, atunci $x+y=-1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=4xy-3x+2y-1$.

5p **a)** Arătați că $1*2=8$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x*(-1)=4$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x*a=-x$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1+\dfrac{8}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2(x^2-4)}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(1-x)\geq f(1+x)$, pentru orice $x\in(0,1)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+4x+2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 (f(x)-4x)\,dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 (f(x)-3x^2-2)e^x\,dx=4$.

5p **c)** Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_{-1}^0 a\cdot f'(x)\cdot(f(x))^{a-1}\,dx=63$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}=\left(\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}=$	**2p**
	$=\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}=1$	**3p**
2.	$f(a)=2a-8$, pentru orice număr real a	**2p**
	$2a-8=0$, de unde obținem $a=4$	**3p**
3.	$3x-2=1$, de unde obținem $3x=3$	**3p**
	$x=1$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile	**2p**
	Numerele, din mulțimea A, care au suma cifrelor egală cu 2 sunt 11 și 20, deci sunt 2 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$	**3p**
5.	$OA=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
	$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$, deci $OA=AB$	**3p**
6.	$AM=6$	**2p**
	$CM=\sqrt{AC^2+AM^2}=10$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(2))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 2=$	**3p**
	$=2-2=0$	**2p**
b)	$A(3)+2I_2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}5-1 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}=A(5)$	**2p**
c)	$A(x)+xI_2=\begin{pmatrix}x-1 & 2\\ 1 & x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-1 & 2\\ 1 & 2x\end{pmatrix}$ și $\det(A(x)+xI_2)=4x^2-2x-2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2-2x-2=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=-\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$2\circ 1=2\cdot 2+2\cdot 1-1=$	**3p**
	$=4+2-1=5$	**2p**
b)	$x\circ(x+1)=2x+2(x+1)-1=4x+1$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x+1=5$, de unde obținem $x=1$	**2p**

c)	$x\circ x=4x-1$, pentru orice număr real x	**2p**
	$4x-1=-4x^2+4x-1+4x^2=-(2x-1)^2+4x^2\le 4x^2$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-2\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-2\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=-1$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=-x+2$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(0,2]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,2]$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[2,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2,+\infty)$	**3p**
	$f(2)=2-2\ln 2$, deci $2-2\ln 2\le f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, de unde obținem $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\le\dfrac{x-2}{2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^3\frac{1}{f(x)}\,dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^3=$	**3p**
	$=\dfrac{27}{3}+3=12$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_2^3 2xf(x)\,dx=\int_2^3\frac{2x}{x^2+1}\,dx=\int_2^3\frac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}\,dx=\ln\left(x^2+1\right)\Big\vert_2^3=$	**3p**
	$=\ln 10-\ln 5=\ln 2$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_1^2\frac{e^x}{f(x)}dx=\int_1^2 e^x\left(x^2+1\right)dx=e^x\left(x^2+1\right)\Big\vert_1^2-\int_1^2 2xe^x dx=5e^2-2e-\left(2xe^x-2e^x\right)\Big\vert_1^2=3e^2-2e$	**3p**
	$e(3e-2)=e(ae-a+1)$, de unde obținem $a=3$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,3+0,4)\cdot 10+2\cdot 0,5=0,7\cdot 10+1=$	**3p**
	$=7+1=8$	**2p**
2.	$f(1)=1$	**2p**
	$f(2)=3$, de unde obținem $f(1)+f(2)=4$	**3p**
3.	$2x+1=5$, de unde obținem $2x=4$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele, din mulțimea A, care sunt divizibile cu 3 sunt 21, 51 și 81, deci sunt 3 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$	**3p**
5.	$m=\frac{3+5}{2}=$	**3p**
	$=4$	**2p**
6.	$AB=12$	**3p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=48$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(1))=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3\cdot 1-1\cdot 1=$	**3p**
	$=3-1=2$	**2p**
b)	$A(1)+A(5)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}11 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=2A(3)$	**2p**
c)	Inversa matricei $A(1)$ este matricea $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$	**3p**
	$X=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(0)=0^3+m\cdot 0^2+2\cdot 0-5=$	**3p**
	$=0+0+0-5=-5$, pentru orice număr real m	**2p**

b)	$f(1)=0 \Rightarrow 1^3+m\cdot 1^2+2\cdot 1-5=0$	**3p**
	$m-2=0$, de unde obținem $m=2$	**2p**
c)	$x_1+x_2+x_3=-m$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=m^2-4$, deci $m^2-4=5$ și, cum m este număr natural, obținem $m=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x^2)'\cdot(x^2+1)-x^2\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$	**2p**
	$=\dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$, $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,0]$;	**3p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_0^1 \dfrac{f(x)}{x+1}\,dx=\int_0^1 e^x\,dx=e^x\Big|_0^1=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
b)	$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 e^x(x+1)\,dx=e^x(x+1)\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e^x(x+1)\Big|_0^1-e^x\Big|_0^1=$	**3p**
	$=2e-1-e+1=e$	**2p**
c)	$\int_1^a \dfrac{2xf(x^2)}{x^2+1}dx=\int_1^a 2xe^{x^2}\,dx=\int_1^a e^{x^2}(x^2)'dx=e^{x^2}\Big|_1^a=e^{a^2}-e$	**3p**
	$e^{a^2}-e=e(e^3-1)\Rightarrow e^{a^2}=e^4$ și, cum $a>1$, obținem $a=2$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{2}\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}+3=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-3\sqrt{2}+3=$	**2p**
	$=4+3=7$	**3p**
2.	$f\left(m\right)=3m-6$, pentru orice număr real m	**3p**
	$3m-6=3$, de unde obținem $m=3$	**2p**
3.	$4x-2=2$, de unde obținem $4x=4$	**3p**
	$x=1$	**2p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot 300=90$ de lei	**3p**
	Prețul după ieftinire este $300-90=210$ de lei	**2p**
5.	$3=\frac{1+5}{2}$ și $4=\frac{m+1}{2}$	**3p**
	$m=7$	**2p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**
	$2\left(\sin 45^\circ+\sin 30^\circ\right)\left(\sin 45^\circ-\sin 30^\circ\right)=2\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(0)\right)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot 0=$	**3p**
	$=0-0=0$	**2p**
b)	$A(3)+A(5)=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 5\\ 6 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 10 & 0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 0\end{pmatrix}=2A(4)$	**2p**
c)	$A(n)+I_2=\begin{pmatrix}1 & n\\ n+1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & n\\ n+1 & 1\end{pmatrix}$ și $\det\left(A(n)+I_2\right)=2-n(n+1)$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$n(n+1)\le 2$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ și $n=1$	**3p**
2.a)	$f(0)=0^3-3\cdot 0^2+m\cdot 0-1=$	**3p**
	$=0-0+0-1=-1$, pentru orice număr real m	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=3$	**2p**
	$x_1x_2x_3=1$, de unde obținem $x_1+x_2+x_3=3x_1x_2x_3$, pentru orice număr real m	**3p**

c)	$f(1)=1^3-3\cdot 1^2+m\cdot 1-1=1-3+m-1=m-3$, pentru orice număr real m	**2p**
	$f(1)=0$, de unde obținem $m=3$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{x'\cdot\left(x^2+1\right)-x\cdot\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ și $x=1$; $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$; $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,1]$	**3p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+1\right)e^x}{e^x}dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{3}+1-0-0=\dfrac{4}{3}$	**2p**
b)	Funcția F este derivabilă și $F'(x)=(2x-2)e^x+\left(x^2-2x+3\right)e^x=\left(x^2+1\right)e^x$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, pentru orice număr real x, deci funcția F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^2\vert f(x)\vert dx=\int_0^2\left(x^2+1\right)e^x dx=F(x)\vert_0^2=F(2)-F(0)=$	**3p**
	$=3e^2-3=3\left(e^2-1\right)$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}\right)=$	**2p**
	$=\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{6}=2$	**3p**
2.	$f(a)=5a+1$, pentru orice număr real a	**2p**
	$5a+1=6$, de unde obținem $a=1$	**3p**
3.	$4x+1=9$, de unde obținem $4x=8$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Numerele din mulțimea A care sunt divizibile cu 20 sunt 20, 40, 60 și 80, deci sunt 4 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{4}{9}$	**3p**
5.	$BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$	**2p**
	$AB=\sqrt{6^2+8^2}=10$, deci $AB=2BC$	**3p**
6.	$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$, $\sin 60^\circ=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$1+\sin 30^\circ=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$, $2\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&0\\-2&2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&0\\-2&2\end{vmatrix}=1\cdot 2-(-2)\cdot 0=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$A(2)+A(0)=\begin{pmatrix}2&1\\-4&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\-4&4\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}1&0\\-2&2\end{pmatrix}=2A(1)$	**2p**
c)	$A(x)+xI_2=\begin{pmatrix}x&x-1\\-2x&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&x-1\\-2x&2+x\end{pmatrix}$ și $\det(A(x)+xI_2)=4x^2+2x$, pentru orice număr real x	**3p**
	$4x^2+2x-2=0$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=\frac{1}{2}$	**2p**
2.a)	$1\circ 3=2(1+3)-1\cdot 3-4=$	**3p**
	$=8-3-4=1$	**2p**

b)	$y\circ x=2(y+x)-yx-4=$	**2p**
	$=2(x+y)-xy-4=x\circ y$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**3p**
c)	$n\circ n=4n-n^2-4$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$4n-n^2-4\geq n-2\Leftrightarrow -n^2+3n-2\geq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=1$ și $n=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(2x-1)'\cdot x^2-(2x-1)\cdot(x^2)'}{x^4}=\dfrac{2x^2-2x(2x-1)}{x^4}=$	**3p**
	$=\dfrac{-2x^2+2x}{x^4}=\dfrac{2(1-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=1$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$; $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,1]\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,1]$;	**3p**
	$f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+x+1\right)\cdot\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1(2x+1)\,dx=\left(x^2+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=1+1-0-0=2$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}dx=\ln\left(x^2+x+1\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\ln 3-\ln 1=\ln 3$	**2p**
c)	$g(x)=e^x(2x+1)$, $x\in\mathbb{R}$, deci $\mathcal{A}=\displaystyle\int_0^1\vert g(x)\vert dx=\int_0^1 e^x(2x+1)dx=e^x(2x+1)\Big\vert_0^1-\int_0^1 2e^x dx=$	**3p**
	$=e^x(2x+1)\Big\vert_0^1-2e^x\Big\vert_0^1=3e-1-2e+2=e+1$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{8}+3\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)=\frac{1}{8}+3\cdot\frac{5}{8}=$	**3p**
	$=\frac{1}{8}+\frac{15}{8}=2$	**2p**
2.	$f(a)=2a-2$, pentru orice număr real a	**3p**
	$2a-2=0$, de unde obținem $a=1$	**2p**
3.	$2x=2+x$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea A sunt 6 numere n pentru care $n+9\leq 15$, deci sunt 6 cazuri favorabile, de unde obținem $p=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$	**3p**
5.	$a=\frac{0+4}{2}=2$	**3p**
	$b=\frac{5+(-5)}{2}=0$	**2p**
6.	$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**
	$\sqrt{2}\cdot(\sin 45^\circ+\cos 45^\circ)\cdot\sin 30^\circ=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=2\cdot\frac{1}{2}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=3\cdot 0-2\cdot(-1)=$	**3p**
	$=0+2=2$	**2p**
b)	$B+3I_2=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 4\\ -2 & 0\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=2A$	**2p**
c)	$xA+B=\begin{pmatrix}3x+3 & 2x+4\\ -x-2 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot(xA+B)=\begin{pmatrix}7x+5 & 6x+6\\ -3x-3 & -2x-4\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**3p**
	$\begin{pmatrix}7x+5 & 6x+6\\ -3x-3 & -2x-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & 0\\ 0 & 2x\end{pmatrix}$, de unde obținem $x=-1$	**2p**

2.a)	$1\circ 0=2\cdot 1\cdot 0-3(1+0)+1=$ $=0-3+1=-2$	**3p** **2p**
b)	$y\circ x=2yx-3(y+x)+1=$ $=2xy-3(x+y)+1=x\circ y$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$\circ$” este comutativă	**2p** **3p**
c)	$x\circ(-2x)=-4x^2+3x+1$, pentru orice număr real x $-4x^2+3x+1\geq 0$, de unde obținem $x\in\left[-\frac{1}{4},1\right]$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{3(x-4)-(3x-4)}{(x-4)^2}=$ $=\frac{3x-12-3x+4}{(x-4)^2}=-\frac{8}{(x-4)^2}$, $x\in(4,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-4}{x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3-\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x}}=3$ Dreapta de ecuație $y=3$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$g'(x)=f''(x)=\frac{16}{(x-4)^3}$, $x\in(4,+\infty)$ $g'(x)>0$, pentru orice $x\in(4,+\infty)$, deci funcția g este crescătoare	**3p** **2p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)-(x+3)^2\right)dx=\int_0^2 x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^2=$ $=\frac{4}{2}-0=2$	**3p** **2p**
b)	$\int_{-2}^0\frac{1}{f(x)-x}dx=\int_{-2}^0\frac{1}{(x+3)^2}dx=\int_{-2}^0\frac{(x+3)'}{(x+3)^2}dx=-\frac{1}{x+3}\Big\vert_{-2}^0=$ $=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$	**3p** **2p**
c)	$\int_0^6\frac{f(x)}{x+3}dx=\int_0^6\frac{x+(x+3)^2}{x+3}dx=\int_0^6\left(x+4-\frac{3}{x+3}\right)dx=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^6+4x\Big\vert_0^6-3\ln(x+3)\Big\vert_0^6=42-3\ln 3$ $42-3\ln 3=3(a-\ln 3)$, de unde obținem $a=14$	**3p** **2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(0,2+\frac{3}{10}\right)\cdot 10=\left(0,2+0,3\right)\cdot 10=$	**3p**
	$=0,5\cdot 10=5$	**2p**
2.	$f\left(a\right)=2a+3$	**2p**
	$2a+3=7$, de unde obținem $a=2$	**3p**
3.	$x^2+2x+4=4\Rightarrow x\left(x+2\right)=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=-2$, care convin	**2p**
4.	$x+\frac{50}{100}\cdot x=225$, unde x este prețul inițial al obiectului	**3p**
	$x=150$ de lei	**2p**
5.	$AB=5$	**2p**
	$BC=5$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$AC=4$	**3p**
	$\text{tg}\,B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4\cdot 1-0\cdot 0=$	**3p**
	$=4-0=4$	**2p**
b)	$A(3)+2A(1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 12\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=3A(2)$	**2p**
c)	$A(x)\cdot A\left(x^2\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{x^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{x+x^2}\end{pmatrix}$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^{x+x^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2^{x+x^2}=1$, de unde obținem $x=0$ sau $x=-1$	**3p**
2.a)	$2\circ 3=2\cdot 3-2-3+2=$	**3p**
	$=6-2-3+2=3$	**2p**
b)	$x\circ 4=x\cdot 4-x-4+2=3x-2$, pentru orice număr real x	**3p**
	$3x-2=x+6$, de unde obținem $x=4$	**2p**

c)	$(x-2)\circ(x+2)=x^2-2x-2=$	**2p**
	$=(x-1)^2-3\geq -3$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{e^x\left(x^2-3\right)-e^x\cdot 2x}{\left(x^2-3\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{e^x\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2-3\right)^2}$, $x\in(2,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\cdot\dfrac{e^x}{x^2-3}}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(1-\dfrac{3}{x^2}\right)}=0$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=3$; $f'(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(2,3]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(2,3]$; $f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[3,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$	**3p**
	$f(3)=\dfrac{e^3}{6}$, deci $f(x)\geq\dfrac{e^3}{6}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, de unde obținem $\dfrac{e^{x-3}}{x^2-3}\geq\dfrac{1}{6}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_2^4\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_2^4(x+\ln x-\ln x)\,dx=\int_2^4 x\,dx=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_2^4=$	**3p**
	$=\dfrac{16}{2}-\dfrac{4}{2}=6$	**2p**
b)	$\int_1^e\dfrac{f(x)-x}{x}\,dx=\int_1^e\dfrac{x+\ln x-x}{x}\,dx=\int_1^e\dfrac{\ln x}{x}\,dx=\int_1^e\ln x\cdot(\ln x)'\,dx=\dfrac{(\ln x)^2}{2}\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{(\ln e)^2}{2}-\dfrac{(\ln 1)^2}{2}=\dfrac{1}{2}$	**2p**
c)	$\int_1^n f(x)dx=\int_1^n(x+\ln x)dx=\int_1^n(x+x'\ln x)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+x\ln x-x\right)\Big\vert_1^n=\dfrac{n^2-2n+1}{2}+n\ln n$, pentru orice număr natural nenul n	**3p**
	$\dfrac{(n-1)^2}{2}+n\ln n=2+3\ln n\Leftrightarrow(n-3)(n+1+2\ln n)=0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n=3$	**2p**

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{4}{3}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-8$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3x-2}=1$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(6,8)$. Arătați că $OA=AB$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=12$, $AC=8$ și punctul M mijlocul laturii AB. Arătați că $CM=10$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x-1 & 2\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(3)+2I_2=A(5)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)+xI_2)=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2x+2y-1$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 1=5$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ(x+1)=5$.

5p **c)** Arătați că $x\circ x\le 4x^2$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\left(\frac{x}{2}\right)\le\frac{x-2}{2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3\frac{1}{f(x)}dx=12$.

5p **b)** Arătați că $\int_2^3 2xf(x)dx=\ln 2$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_1^2\frac{e^x}{f(x)}dx=e(ae-a+1)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,3+0,4)\cdot 10+2\cdot 0,5=8$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$. Arătați că $f(1)+f(2)=4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x+1)=\log_5 5$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{11,21,31,41,51,61,71,81,91\}$, acesta să fie divizibil cu 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(m,2)$ și $C(5,3)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul B este mijlocul segmentului AC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=20$ și $AC=16$. Arătați că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 48.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}2x+1 & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(1)+A(5)=2A(3)$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $X\cdot A(1)=A(3)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X-5$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-5$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că 1 este rădăcină a polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul natural m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=5$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=e$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care $\displaystyle\int_1^a\frac{2xf\left(x^2\right)}{x^2+1}dx=e\left(e^3-1\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\cdot\left(3+2\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}+3=7$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$. Determinați numărul real m pentru care $f(m)=3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{4x-2}=5^2$.

5p **4.** Prețul unui obiect este 300 de lei. Determinați prețul obiectului după o ieftinire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(5,m)$ și $M(3,4)$. Determinați numărul real m, știind că punctul M este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $2(\sin 45°+\sin 30°)(\sin 45°-\sin 30°)=\cos 60°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x\\ x+1 & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Arătați că $A(3)+A(5)=2A(4)$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $\det(A(n)+I_2)\geq 0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+mX-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Arătați că $x_1+x_2+x_3=3x_1x_2x_3$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $X-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=1$.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\left(x^2-2x+3\right)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=2$ are aria egală cu $3\left(e^2-1\right)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 10

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{12}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=6$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{4x+1}=3$.

5p **4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie divizibil cu 20.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(8,8)$ și $C(11,4)$. Arătați că $AB=2BC$.

5p **6.** Arătați că $1+\sin 30^\circ=2\sin 60^\circ\cdot\cos 30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}x & x-1\\ -2x & 2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(2)+A(0)=2A(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x)+xI_2)=2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2(x+y)-xy-4$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 3=1$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ n\geq n-2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x-1}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(1-x)}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+x+1\right)f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=\ln 3$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^x\left(x^2+x+1\right)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria egală cu $e+1$.

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\frac{1}{8}+3\cdot\left(1-\frac{3}{8}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-2$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x}=5^{2+x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să verifice inegalitatea $n+9\leq 15$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,5)$, $B(4,-5)$ și $C(a,b)$, unde a și b sunt numere reale. Determinați numerele reale a și b, știind că punctul C este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Arătați că $\sqrt{2}\cdot(\sin 45^\circ+\cos 45^\circ)\cdot\sin 30^\circ=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Arătați că $B+3I_2=2A$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot(xA+B)=2xI_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=2xy-3(x+y)+1$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 0=-2$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

5p **c)** Determinați mulțimea numerelor reale x pentru care $x\circ(-2x)\geq 0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x-4}{x-4}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\frac{8}{(x-4)^2}$, $x\in(4,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția $g:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)$ este crescătoare.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+(x+3)^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-(x+3)^2\right)dx=2$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-2}^{0}\frac{1}{f(x)-x}dx=\frac{2}{3}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^6\frac{f(x)}{x+3}dx=3(a-\ln 3)$.

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(0,2+\frac{3}{10}\right)\cdot 10=5$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$. Determinați numărul real a pentru care $f(a)=7$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+2x+4}=2$.

5p **4.** După o scumpire cu 50%, prețul unui obiect este de 225 de lei. Determinați prețul obiectului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(5,0)$ și $C(5,5)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=3$ și $BC=5$. Arătați că $\operatorname{tg}B=\frac{4}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=4$.

5p **b)** Arătați că $A(3)+2A(1)=3A(2)$.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $A(x)\cdot A(x^2)=I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 3=3$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ 4=x+6$.

5p **c)** Arătați că $(x-2)\circ(x+2)\geq -3$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2-3}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{e^x\left(x^2-2x-3\right)}{\left(x^2-3\right)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)}{e^x}=0$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{e^{x-3}}{x^2-3}\geq\frac{1}{6}$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^4 \left(f(x)-\ln x\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)-x}{x}dx=\frac{1}{2}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\int_1^n f(x)dx=2+3\ln n$.

Examenul de bacalaureat naţional 2017

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$	**3p**
	$\frac{5}{6}:\frac{5}{6}=1$	**2p**
2.	$f(0)=3$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecție cu axa Oy sunt $x=0$ și $y=3$	**2p**
3.	$x^2+5=9\Rightarrow x^2-4=0$	**2p**
	$x=-2$ sau $x=2$, care verifică ecuația	**3p**
4.	$p-10\%\cdot p=270$, unde p este prețul obiectului înainte de ieftinire	**3p**
	$p=300$ de lei	**2p**
5.	$M(3,3)$, unde punctul M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$OM=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}$	**3p**
6.	$\sin^2 x=1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ și, cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**3p**
	$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=1$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{vmatrix}=1\cdot 8-2\cdot 4=$	**3p**
	$=8-8=0$	**2p**
b)	$A\cdot B+B\cdot A=\begin{pmatrix}12 & 6\\ 48 & 24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}24 & 48\\ 6 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36 & 54\\ 54 & 36\end{pmatrix}$	**3p**
	$9(A+B)-(A\cdot B+B\cdot A)=9\begin{pmatrix}9 & 6\\ 6 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}36 & 54\\ 54 & 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45 & 0\\ 0 & 45\end{pmatrix}=45\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=45I_2$	**2p**
c)	$A+xI_2=\begin{pmatrix}1+x & 2\\ 4 & 8+x\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A+xI_2)=\begin{vmatrix}1+x & 2\\ 4 & 8+x\end{vmatrix}=x^2+9x$	**3p**
	$x^2+9x=0\Leftrightarrow x=-9$ sau $x=0$	**2p**
2.a)	$f(2)=2^3-3\cdot 2^2-6\cdot 2+8=$	**3p**
	$=8-12-12+8=-8$	**2p**
b)	Câtul este X^2-2X-8	**3p**
	Restul este 0	**2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-6\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=3^2-2\cdot(-6)=21$	**3p**
	$(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2(x_1+x_2+x_3)+3=21+2\cdot 3+3=30$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^2-18x+12=$	**3p**
	$=6\left(x^2-3x+2\right)=6(x-1)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-f(x)}{f'(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2-12x-1}{6x^2-18x+12}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9-\dfrac{12}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{6-\dfrac{18}{x}+\dfrac{12}{x^2}}=\dfrac{3}{2}$	**3p**
c)	$f(1)=6$, $f'(1)=0$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)$, adică $y=6$	**3p**
2.a)	$\int\limits_{-1}^{1}\left(f(x)+2x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-2x+2x\right)dx=\int\limits_{-1}^{1}x^2dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_{-1}^{1}=\dfrac{1}{3}-\left(-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}$	**3p**
b)	$\int\limits_{0}^{1}e^x\left(x^2-f(x)\right)dx=\int\limits_{0}^{1}2xe^x\,dx=2xe^x\Big\vert_{0}^{1}-2\int\limits_{0}^{1}e^x\,dx=$	**3p**
	$=2e-2e^x\Big\vert_{0}^{1}=2e-2e+2=2$	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\int\limits_{0}^{1}\vert f(x)\vert dx=\int\limits_{0}^{1}\left(2x-x^2\right)dx=x^2\Big\vert_{0}^{1}-\dfrac{x^3}{3}\Big\vert_{0}^{1}=$	**3p**
	$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right):\frac{5}{6}=1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg\left(x^2+5\right)=\lg 9$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10%, preţul unui obiect este 270 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$ şi $B(3,5)$. Calculați distanța de la punctul $O(0,0)$ la mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, arătați că $\operatorname{tg}x=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}8 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că $9(A+B)-(A\cdot B+B\cdot A)=45I_2$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $\det(A+xI_2)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2-6X+8$.

5p **a)** Arătați că $f(2)=-8$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $X-1$.

5p **c)** Demonstrați că $(x_1+1)^2+(x_2+1)^2+(x_3+1)^2=30$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-f(x)}{f'(x)}$.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1}(f(x)+2x)\,dx=\frac{2}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_{0}^{1}e^x\left(x^2-f(x)\right)dx$.

5p **c)** Demonstrați că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ are aria egală cu $\frac{2}{3}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2^{-1}+2^{-2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$	**3p**
	$=\frac{3}{4}=0,75$	**2p**
2.	$\frac{2}{x-3}<0 \Leftrightarrow x-3<0$	**3p**
	$x\in(-\infty,3)$	**2p**
3.	Condiție: $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$	**1p**
	$x+2=x^2+4x+4$	**2p**
	$x_1=-2$ și $x_2=-1$	**2p**
4.	Dobânda obținută este $D=1008\text{ lei}-900\text{ lei}=108\text{ lei}$	**1p**
	$\frac{p}{100}\cdot 900=108$	**2p**
	$p=12$	**2p**
5.	$x_A=\frac{x_O+x_B}{2}$ și $y_A=\frac{y_O+y_B}{2}$	**3p**
	$x_B=4$ și $y_B=6$	**2p**
6.	$\sin x+4\cos x=5\cos x$	**1p**
	$\sin x=\cos x$	**2p**
	$x=45^\circ$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(H(x))=1+0+0-0-0-0$	**4p**
	Finalizare	**1p**
b)	$H(x)\cdot H(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a+\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$	**3p**
	$\ln a=0\Rightarrow a=1$	**2p**

c)	$H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)=\begin{pmatrix}2012 & 0 & 0\\ 0 & 2012 & \ln(2012!)\\ 0 & 0 & 2012\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{vmatrix}2012 & 0 & 0\\ 0 & 2012 & \ln(2012!)\\ 0 & 0 & 2012\end{vmatrix}=2012^3$	**2p**
2.a)	$f(1)=1^3+3\cdot 1^2-3\cdot 1-1=0$	**3p**
	$f(1)=0\Rightarrow X-1 \mid f$	**2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-3$	**1p**
	$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$	**1p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=15$	**3p**
c)	$f=X^3+3X^2-3X-1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\Rightarrow f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$	**3p**
	$f(2)=13$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$, $x>0$	**2p**
	f derivabilă în $x=4\Rightarrow \lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=f'(4)$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	f este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2x}$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru orice $x\in(4,+\infty)\Rightarrow$ funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\sqrt{x}-\ln x\right)=+\infty$	**3p**
	$x=0$ este ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f	**2p**
2.a)	F este derivabilă și $F'(x)=xe^x+e^x-e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F'=f$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx=$	**1p**
	$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	**2p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\|_1^e=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\,\mathrm{d}x=$	**2p**
	$=\pi\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\frac{e^{2x}}{2}\Big\|_1^2=$	**2p**
	$=\frac{\pi e^2\left(e^2-1\right)}{2}$	**1p**

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științele naturii
Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0,75$.

5p **2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2}{x-3}<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x+2$.

5p **4.** La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați p, știind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A(2,3)$. Determinați coordonatele punctului B, știind că A este mijlocul segmentului (OB).

5p **6.** Determinați măsura x a unui unghi ascuțit, știind că $\frac{\sin x+4\cos x}{\cos x}=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \ln x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, cu $x\in(0,+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(H(x))=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real a, $a>0$, astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.

5p **c)** Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Arătați că polinomul f se divide cu $X-1$.

5p **b)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **c)** Verificați dacă $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=13$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

5p **c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=xe^x-e^x+2012$ este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\,dx$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2(1+i)=2+2i$ $x=2\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.	$f(2)=0$ $f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(5)=0$	**3p** **2p**
3.	$x^2+1=x^2+2x+1$ Rezultă $x=0$, care verifică ecuaţia	**2p** **3p**
4.	Numerele de două cifre având produsul cifrelor egal cu 5 sunt 15 şi $51\Rightarrow 2$ cazuri favorabile Numărul numerelor naturale de două cifre este $90\Rightarrow 90$ de cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{1}{45}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+3\vec{j}$ $AC=\sqrt{4^2+3^2}=5$	**3p** **2p**
6.	$E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{6}$ $=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{vmatrix}=1\cdot 5-2\cdot 3=$ $=5-6=-1$	**3p** **2p**
b)	$A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 18 & 31\end{pmatrix}$ $A^2-6A=\begin{pmatrix}7 & 12\\ 18 & 31\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6 & 12\\ 18 & 30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$	**2p** **3p**
c)	$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}-6\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\det B=\begin{vmatrix}-5 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$	**2p** **3p**
2.a)	$2*2=\sqrt{2^2+2^2+4}=$ $=\sqrt{12}$	**2p** **3p**
b)	$\sqrt{x^2+x^2+4}=\sqrt{12}\Leftrightarrow 2x^2+4=12$ $x=-2$ sau $x=2$	**2p** **3p**

c)	$\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}=\sqrt{8\cdot 1^2+4\cdot(8-1)}=\sqrt{36}$	**3p**
	$\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1 \text{ de } 8 \text{ ori}}=6\in\mathbb{Z}$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'\left(x^2-6x+9\right)+e^x\left(x^2-6x+9\right)'=$	**3p**
	$=e^x\left(x^2-6x+9\right)+e^x(2x-6)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=e^x\left(x^2-2x-1\right)$	**2p**
	$f(x)+f''(x)=e^x\left(2x^2-8x+8\right)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$ sau $x=3$	**2p**
	$f'(x)>0$ pentru $x\in(-\infty,1)$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(1,3)$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(3,+\infty)$	**2p**
	Punctele de extrem sunt $x_1=1$ şi $x_2=3$	**1p**
2.a)	$\int_0^1(x+1)f(x)dx=\int_0^1\frac{x(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 xdx=$	**2p**
	$=\frac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^1 x^2f(x)dx+\int_0^1 x^3f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^4}{x+1}dx=$	**2p**
	$=\int_0^1\frac{x^3(x+1)}{x+1}dx=\int_0^1 x^3dx=\frac{x^4}{4}\Big\vert_0^1=\frac{1}{4}$	**3p**
c)	$V=\pi\int_1^2 h^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(\frac{x}{x+1}\right)^2dx=\pi\int_0^1\left(1-\frac{2}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx=$	**3p**
	$=\pi\left(x-2\ln(x+1)-\frac{1}{x+1}\right)\Big\vert_0^1=\pi\left(\frac{3}{2}-2\ln 2\right)$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $x=2(1+i)-2i$ este real.

5p **2.** Calculaţi $f(1)\cdot f(2)\cdot ...\cdot f(5)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+1}=x+1$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 5.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}+\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\sin x+\cos\frac{x}{2}$, unde x este număr real. Calculaţi $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 5\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Arătaţi că $A^2-6A=I_2$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $B=A-6I_2$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x*y=\sqrt{x^2+y^2+4}$.

5p **a)** Calculaţi $2*2$.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x=\sqrt{12}$.

5p **c)** Arătaţi că numărul $\underbrace{1*1*\cdots*1}_{1\text{ de }8\text{ ori}}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Verificaţi dacă $f(x)+f''(x)=2\left(f'(x)+e^x\right)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi punctele de extrem ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1(x+1)f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x^2f(x)\,dx+\int_0^1 x^3f(x)\,dx=\frac{1}{4}$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\left(2-\sqrt{2}\right)=6-3\sqrt{2}$	**2p**
	$6-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=6$	**3p**
2.	$f(0)=-1$	**2p**
	$f(2)=1$	**2p**
	$f(0)\cdot f(2)=-1$	**1p**
3.	$5^{x-2}=5^2$	**2p**
	$x=4$	**3p**
4.	$10\%\cdot 100=10$	**2p**
	Preţul după scumpire este 110 lei	**3p**
5.	$AB=\sqrt{(1-1)^2+(3-1)^2}$	**3p**
	$AB=2$	**2p**
6.	$\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\cos 135^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\cos 45^\circ+\cos 135^\circ=0$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$M\left(\dfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$M\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$	**2p**
	$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=M(0)$	**1p**
b)	$\det\left(M(a)\right)=\begin{vmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{vmatrix}=4a^2$	**3p**
	$4a^2=0\Leftrightarrow a=0$	**2p**
c)	$M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)=\left(M(-2)+M(2)\right)+\left(M(-1)+M(1)\right)+M(0)=$	**2p**
	$=3M(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-2\cdot 1^2+1=$	**3p**
	$=1-2+1=0$	**2p**

b)	Câtul este X Restul este $-X+1$	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=4-2\cdot 0=4$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'-1'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$2\sqrt{x}f'(x)=2\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$y-f(4)=f'(4)(x-4)$	**2p**
	$f(4)=1$, $f'(4)=\dfrac{1}{4}\Rightarrow$ ecuaţia tangentei este $y=\dfrac{1}{4}x$	**3p**
c)	$f''(x)=-\dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2(2x+1)dx=$	**2p**
	$=\left(x^2+x\right)\Big\|_1^2=(4+2)-(1+1)=4$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(x^2+x+\ln x\right)'=2x+1+\dfrac{1}{x}$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^2\left\|f(x)\right\|dx=\int_1^2\left(2x+1+\frac{1}{x}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(x^2+x+\ln x\right)\Big\|_1^2=4+2+\ln 2-1-1-\ln 1=4+\ln 2$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6$.

5p **2.** Calculaţi $f(0)\cdot f(2)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x-2}=25$.

5p **4.** Preţul unui obiect este 100 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 10%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(1,3)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Calculaţi $\cos 45^\circ+\cos 135^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right)=M(0)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $\det\left(M(a)\right)=0$.

5p **c)** Determinați matricea $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+1$.

5p **a)** Arătaţi că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2-2X+1$.

5p **c)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-1$.

5p **a)** Arătaţi că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Verificaţi dacă dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Barem de evaluare şi de notare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_1+a_2+a_3=(a_2-r)+a_2+(a_2+r)=$	**3p**
	$=3a_2=12$	**2p**
2.	$f(1)=1$	**2p**
	$(f(1))^{2014}=1$	**3p**
3.	$2-3x=x+6$	**2p**
	$x=-1$	**3p**
4.	Numerele naturale de o cifră, divizori ai lui 10, sunt 1, 2 şi 5, deci sunt 3 cazuri favorabile	**2p**
	Sunt 10 numere naturale de o cifră, deci sunt 10 cazuri posibile	**1p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{3}{10}$	**2p**
5.	$AB:\frac{y-3}{1-3}=\frac{x-1}{-1-1}$	**3p**
	$AB: y=x+2$	**2p**
6.	$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$	**2p**
	$\sqrt{3}\cos 30^\circ+\sqrt{2}\sin 45^\circ=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}=\frac{5}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=18+4+3-2-12-9=$	**3p**
	$=2$	**2p**
b)	$A+mI_3=\begin{pmatrix}1+m&1&1\\1&2+m&3\\1&4&9+m\end{pmatrix}$	**3p**
	$\begin{pmatrix}1+m&1&1\\1&2+m&3\\1&4&9+m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&3\\1&4&8\end{pmatrix}\Rightarrow m=-1$	**2p**
c)	$\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+3z=1\\x+4y+9z=3\end{cases}$	**2p**
	$x=-1,\ y=1,\ z=0$	**3p**

2.a)	$2*(-2)=-5$	**2p**
	$2014*(-2014)=-5\Rightarrow 2*(-2)=2014*(-2014)$	**3p**
b)	$(x*y)*z=(x+y-5)*z=x+y+z-10$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(y+z-5)=x+y+z-10=(x*y)*z$, pentru orice numere reale x, y şi z	**3p**
c)	$(-4)*(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3*4=((-4)*4)*((-3)*3)*((-2)*2)*((-1)*1)*0=$	**2p**
	$=(-5)*(-5)*(-5)*(-5)*0=((-5)*(-5))*((-5)*(-5))*0=(-15)*(-15)*0=-40$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$	**2p**
	$f'(x)=3x^2-3\Rightarrow f'(0)=-3$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x(2x+1)(3x+2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(2+\frac{1}{x}\right)\left(3+\frac{2}{x}\right)}=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{6}$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
	f descrescătoare pe $[-1,1]$, f crescătoare pe $[1,+\infty)$ şi $f(1)=5\Rightarrow f(x)\geq 5,\forall x\in[-1,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_1^2 2x\,dx=$	**2p**
	$=x^2\Big\vert_1^2=3$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(e^x+x^2+2014\right)'=e^x+2x=$	**3p**
	$=f(x)$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, deci F este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\int_0^1 f(x)F(x)\,dx=\dfrac{F^2(x)}{2}\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{(e+2015)^2-2015^2}{2}=\dfrac{e^2+4030e}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Simulare pentru elevii clasei a XII-a

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_2 = 4$.

5p **2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2014x-2013$. Calculaţi $(f(1))^{2014}$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2-3x}=3^{x+6}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie divizor al lui 10.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ şi $B(-1,1)$. Determinaţi ecuaţia dreptei AB.

5p **6.** Arătaţi că $\sqrt{3}\cos 30^\circ+\sqrt{2}\sin 45^\circ=\frac{5}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care matricele $A+mI_3$ şi $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&3\\1&4&8\end{pmatrix}$ sunt egale, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvaţi ecuaţia matriceală $AX=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie comutativă $x*y=x+y-5$.

5p **a)** Arătaţi că $2*(-2)=2014*(-2014)$.

5p **b)** Verificaţi dacă legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Calculaţi $(-4)*(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3*4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+7$.

5p **a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=-3$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x(2x+1)(3x+2)}$.

5p **c)** Demonstraţi că $f(x)\geq 5$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+2x$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=e^x+x^2+2014$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2\left(f(x)-e^x\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\int_0^1 f(x)F(x)\,dx$.

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2 = 3$	**3p**
	$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 3 + 5 = 9$	**2p**
2.	$x^2 - x = 2x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0$	**3p**
	$x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$	**2p**
3.	$3^{2-x} = 3^{-2} \Leftrightarrow 2 - x = -2$	**3p**
	$x = 4$	**2p**
4.	$p - 15\% \cdot p = 34$, unde p este preţul obiectului înainte de ieftinire	**2p**
	$p = 40$ de lei	**3p**
5.	$x_M = 1$, $y_M = 2$, unde punctul M este mijlocul laturii BC	**2p**
	$AM = 2$	**3p**
6.	$\operatorname{tg}30^\circ \operatorname{ctg}60^\circ + \operatorname{tg}60^\circ \operatorname{ctg}30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} =$	**3p**
	$= \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 1 =$	**3p**
	$= 0$	**2p**
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & 30 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 5\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 5A$, de unde obţinem $x = 5$	**2p**
c)	$\det(A + aI_2) = \begin{vmatrix} 3+a & 6 \\ 1 & 2+a \end{vmatrix} = (3+a)(2+a) - 6 = a^2 + 5a$	**3p**
	$a^2 + 5a = 0 \Leftrightarrow a_1 = -5$ şi $a_2 = 0$	**2p**
2.a)	$x * y = xy + 2x + 2y + 4 - 2 =$	**2p**
	$= x(y+2) + 2(y+2) - 2 = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x şi y	**3p**
b)	$x * (-2) = -2$ şi $(-2) * y = -2$, pentru x şi y numere reale	**3p**
	$(-2015) * (-2) * 0 * 2 * 2015 = ((-2015) * (-2)) * 0 * 2 * 2015 = (-2) * (0 * 2 * 2015) = -2$	**2p**
c)	$n * (-n) = (n+2)(-n+2) - 2 = 2 - n^2$	**2p**
	$2 - n^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow n_1 = 0$ şi $n_2 = 1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{1\cdot(x+2)-(x-2)\cdot 1}{(x+2)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{(x+2)^2},\ x\in(-2,+\infty)$	**2p**
b)	$f(0)=-1,\ f'(0)=1$	**3p**
	Ecuația tangentei este $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x-1$	**2p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x+2}=1$	**3p**
	Dreapta $y=1$ este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
2.a)	$\int_0^1\left(f(x)+1\right)dx=\int_0^1 2xdx=x^2\Big\vert_0^1=$	**2p**
	$=1-0=1$	**3p**
b)	$F'(x)=\left(x^2-x+1\right)'=2x-1=$	**3p**
	$=f(x)$, pentru orice număr real x, deci F este o primitivă a funcţiei f	**2p**
c)	$\int_0^n F(x)dx=\int_0^n\left(x^2-x+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x\right)\Big\vert_0^n=\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n^2}{2}+n$	**2p**
	$\dfrac{n^3}{3}-\dfrac{n^2}{2}+n=\dfrac{n^3}{3}\Leftrightarrow n^2-2n=0$ şi cum n este număr natural nenul, obţinem $n=2$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=1$ şi $a_3=5$.

5p **2.** Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficelor funcţiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x-2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2-x}=\frac{1}{9}$.

5p **4.** După o ieftinire cu 15%, preţul unui obiect este 34 de lei. Calculaţi preţul obiectului înainte de ieftinire.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ şi $C(5,2)$. Calculaţi lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC.

5p **6.** Arătaţi că $\text{tg}\,30^\circ\text{ctg}\,60^\circ+\text{tg}\,60^\circ\text{ctg}\,30^\circ=\frac{10}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x, ştiind că $A\cdot A=xA$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A+aI_2)=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy+2x+2y+2$.

5p **a)** Arătaţi că $x*y=(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Calculaţi $(-2015)*(-2)*0*2*2015$.

5p **c)** Determinaţi numerele naturale n, ştiind că numărul $n*(-n)$ este natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x-2}{x+2}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ şi $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2-x+1$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^1 (f(x)+1)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_0^n F(x)\,dx=\frac{n^3}{3}$.

Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{10}{3+i}=\frac{10(3-i)}{3^2-i^2}=3-i$	**3p**
	$3-i=a+ib\Rightarrow a=3,\ b=-1$	**2p**
2.	$f(1)=0,\ f(0)=-1$	**2p**
	$\left(f(1)\right)^{2016}+\left(f(0)\right)^{2016}=0^{2016}+(-1)^{2016}=1$	**3p**
3.	$6^{x^2-3x+5}=6^3\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$	**3p**
	$x=1$ sau $x=2$	**2p**
4.	$C_6^5=\frac{6!}{5!(6-5)!}=$	**3p**
	$=6$	**2p**
5.	Punctul C este mijlocul segmentului $AB\Rightarrow 10=\frac{5+2m+1}{2}$	**3p**
	$2m+6=20\Rightarrow m=7$	**2p**
6.	ΔABC este dreptunghic în A	**2p**
	$\cos C=\frac{12}{13}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=$	**3p**
	$=1$	**2p**
b)	$A-I_3=\begin{pmatrix}0&2&4\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$	**2p**
	$(A-I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&0&6\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow(A-I_3)(A-I_3)(A-I_3)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O_3$	**3p**
c)	$\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+2y+4z\\y+3z\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$	**2p**
	$x=2,\ y=-5,\ z=2$	**3p**

2.a)	$x*y=xy-x-y+1+1=$ $=x(y-1)-(y-1)+1=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**2p** **3p**
b)	$0*1*2*3=(0*1)*2*3=1*(2*3)=$ $=1$	**3p** **2p**
c)	$a*a=(a-1)^2+1\Rightarrow a*a*2016=2015(a-1)^2+1$ $2015(a-1)^2+1=2016\Leftrightarrow(a-1)^2=1\Leftrightarrow a=0$ sau $a=2$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$ $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ și $f'(2)=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\dfrac{1}{4}$	**2p** **3p**
b)	$f(1)=2$, $f'(1)=-1$ Ecuația tangentei este $y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y=-x+3$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,+\infty)$ Cum $f(1)=2$ și $f(2016)=\dfrac{2017}{2016}$, obținem $\dfrac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1,2016]$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^2\left(f(x)+3x^2-2\right)dx=\int_0^2 x^3dx=\dfrac{x^4}{4}\Big\vert_0^2=$ $=4$	**3p** **2p**
b)	$\int_0^1\left(f(x)-x^3+3x^2+x\right)e^x\,dx=\int_0^1(2+x)e^x\,dx=$ $=(1+x)e^x\Big\vert_0^1=2e-1$	**2p** **3p**
c)	$\int_{1-a}^{1+a}f(x)dx=\left(\dfrac{x^4}{4}-x^3+2x\right)\Big\vert_{1-a}^{1+a}=$ $=2a+2a^3-2a^3-6a+4a=0$, pentru orice număr real a	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, pentru care $\frac{10}{3+i}=a+ib$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $\left(f(1)\right)^{2016}+\left(f(0)\right)^{2016}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $6^{x^2-3x+5}=216$.

5p **4.** Calculați în câte moduri poate fi aleasă o echipă formată din 5 elevi din totalul de 6 elevi pe care îi are la dispoziție un antrenor.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,0)$ și $B(2m+1,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul $C(10,0)$ este mijlocul segmentului AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC în care $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$. Calculați $\cos C$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&2&4\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați $\det A$.

5p **b)** Arătați că $(A-I_3)(A-I_3)(A-I_3)=O_3$, unde $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $O_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $AX=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, unde $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-x-y+2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $0*1*2*3$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că $a*a*2016=2016$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1,2016]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+2$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^2\left(f(x)+3x^2-2\right)dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\left(f(x)-x^3+3x^2+x\right)e^x dx=2e-1$.

5p **c)** Demonstraţi că $\int_{1-a}^{1+a} f(x)dx=0$, pentru orice număr real a.

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}$	**2p**
	$\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=13-4\sqrt{3}\Rightarrow\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}+13-4\sqrt{3}=20$	**3p**
2.	$f(3)=0$	**3p**
	$f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)=0$	**2p**
3.	$2^{3x}=2^{4x+2}\Leftrightarrow 3x=4x+2$	**3p**
	$x=-2$	**2p**
4.	$p+\frac{25}{100}\cdot p=250$, unde p este prețul obiectului înainte de scumpire	**2p**
	$p=200$ de lei	**3p**
5.	$AB=4$	**2p**
	$AC=4\Rightarrow AB=AC$, deci triunghiul ABC este isoscel	**3p**
6.	$\sin 60^\circ=\cos 30^\circ$	**2p**
	$\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{ctg}45^\circ\Rightarrow\sin 60^\circ+\operatorname{tg}45^\circ=\cos 30^\circ+\operatorname{ctg}45^\circ$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(3)=\begin{pmatrix}3&2\\3&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(3))=\begin{vmatrix}3&2\\3&3\end{vmatrix}=3\cdot 3-3\cdot 2=$	**3p**
	$=9-6=3$	**2p**
b)	$A(2017+x)+A(2017-x)=\begin{pmatrix}2017+x&2\\2017+x&2017+x\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2017-x&2\\2017-x&2017-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4034&4\\4034&4034\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2\begin{pmatrix}2017&2\\2017&2017\end{pmatrix}=2A(2017)$, pentru orice număr real x	**2p**
c)	$A(2)+mA(1)=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}m&2m\\m&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+m&2+2m\\2+m&2+m\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(2)+mA(1))=-m(m+2)$	**3p**
	$m(m+2)=0\Leftrightarrow m=-2$ sau $m=0$	**2p**
2.a)	$x*y=2xy+6x+6y+18-3=$	**2p**
	$=2x(y+3)+6(y+3)-3=2(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$7*98=2(7+3)(98+3)-3=2\cdot 10\cdot 101-3=$	**3p**
	$=2020-3=2017$	**2p**
c)	$2(x+3)(x+2+3)-3=3\Leftrightarrow x^2+8x+12=0$	**3p**
	$x=-6$ sau $x=-2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$	**2p**
	$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)\Rightarrow f'(3)=0$, deci $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x(x-2)}\right)=1$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x-2}\right)=1$, deci dreapta de ecuație $y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	**3p**
c)	$f''(x)=\dfrac{2}{(x-2)^3}$, $x\in(2,+\infty)$	**3p**
	$f''(x)>0$, pentru orice $x\in(2,+\infty)$, deci funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\int_1^e\left(f(x)-\ln x\right)dx=\int_1^e 1\,dx=x\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=e-1$	**2p**
b)	F este derivabilă și $F'(x)=(x\ln x)'=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}=$	**3p**
	$=\ln x+1=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$, deci F este o primitivă a funcției f	**2p**
c)	$\int_1^e f(x)F(x)\,dx=\dfrac{1}{2}F^2(x)\Big\vert_1^e=$	**3p**
	$=\dfrac{1}{2}F^2(e)-\dfrac{1}{2}F^2(1)=\dfrac{e^2}{2}$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1-2\sqrt{3}\right)^2=20$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x$. Calculați $f(1)\cdot f(2)\cdot f(3)\cdot f(4)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^x=4^{2x+1}$.

5p **4.** După o scumpire cu 25%, prețul unui obiect este 250 de lei. Calculați prețul obiectului înainte de scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$, $B(1,1)$ și $C(5,5)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Arătați că $\sin 60^\circ+\operatorname{tg}45^\circ=\cos 30^\circ+\operatorname{ctg}45^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 2 \\ x & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(3))=3$.

5p **b)** Arătați că $A(2017+x)+A(2017-x)=2A(2017)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale m pentru care $\det(A(2)+mA(1))=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=2xy+6x+6y+15$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $7*98=2017$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*(x+2)=3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.

2. Se consideră funcțiile $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\ln x$ și $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x\ln x$.

5p **a)** Calculați $\int_1^e\left(f(x)-\ln x\right)dx$.

5p **b)** Arătați că F este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\int_1^e f(x)F(x)\,dx=\dfrac{e^2}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$b_1q^3=24\Rightarrow q^3=8$	**3p**
	$q=2$	**2p**
2.	$f(a)=2\Leftrightarrow a^2-2a+1=0$	**3p**
	$a=1$	**2p**
3.	$\log_3\left((x+1)(x-1)\right)=\log_3 8\Rightarrow x^2-1=8$	**3p**
	$x=-3$, care nu verifică ecuația și $x=3$, care verifică ecuația	**2p**
4.	Cifrele pot fi 1 sau 7	**2p**
	Numerele sunt 117, 171 și 711	**3p**
5.	$AB=5$	**2p**
	$AC=10\Rightarrow AC=2AB$	**3p**
6.	$MP=4$	**2p**
	$\mathcal{A}_{\Delta MNP}=\dfrac{4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}}{2}=4$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$5A-3B=5\begin{pmatrix}3&7\\2&5\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}5&-7\\-2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15&35\\10&25\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}15&-21\\-6&9\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}0&56\\16&16\end{pmatrix}=8\begin{pmatrix}0&7\\2&2\end{pmatrix}$	**2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}3\cdot5+7\cdot(-2)&3\cdot(-7)+7\cdot3\\2\cdot5+5\cdot(-2)&2\cdot(-7)+5\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$	**2p**
	$B\cdot A=\begin{pmatrix}5\cdot3+(-7)\cdot2&5\cdot7+(-7)\cdot5\\(-2)\cdot3+3\cdot2&(-2)\cdot7+3\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=I_2$, deci matricea B este inversa matricei A	**3p**
c)	$xA\cdot A\cdot B-8A\cdot B=yI_2\cdot B\Leftrightarrow xA-8I_2=yB\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3x&7x\\2x&5x\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8&0\\0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5y&-7y\\-2y&3y\end{pmatrix}$	**3p**
	$x=1$, $y=-1$	**2p**
2.a)	$x*y=xy-2x-2y+4+2=$	**2p**
	$=x(y-2)-2(y-2)+2=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$(x-2)(3-2)+2=2018$	**2p**
	$x=2018$	**3p**

c)	$x*2=2$ și $2*y=2$, pentru x și y numere reale	**2p**
	$\log_2 2*\log_2 3*\log_2 4*\ldots*\log_2 2018=\left(\left(\log_2 2*\log_2 3\right)*2\right)*\left(\log_2 5*\ldots*\log_2 2018\right)=$ $=2*\left(\log_2 5*\ldots*\log_2 2018\right)=2$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=6x^5-6$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=0$	**3p**
b)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$	**2p**
	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty,1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**3p**
c)	$f(x)\ge f(1)$, deci $f(x)\ge 5$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(0,9)\ge 5$ și $f(1,1)\ge 5$, deci $f(0,9)+f(1,1)\ge 10$	**3p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big\vert_1^2=$	**3p**
	$=e^2-e=e(e-1)$	**2p**
b)	$F(x)=\int xe^x dx=(x-1)e^x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$(1-1)e+c=0\Rightarrow c=0$, deci $F(x)=(x-1)e^x$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,f'(x)dx=\frac{1}{2}f^2(x)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}e^2$	**3p**
	$\dfrac{1}{2}e^2=\dfrac{1}{2}e^a\Rightarrow a=2$	**2p**

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=3$ și $b_4=24$.
5p	**2.** Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1)+\log_3(x-1)=\log_3 8$.
5p	**4.** Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 7.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,5)$ și $C(7,10)$. Arătați că $AC=2AB$.
5p	**6.** Calculați aria triunghiului MNP, știind că $MN=4$ și $m(\sphericalangle N)=m(\sphericalangle P)=75°$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $5A-3B=8\begin{pmatrix}0 & 7\\ 2 & 2\end{pmatrix}$.
5p	**b)** Demonstrați că matricea B este inversa matricei A.
5p	**c)** Determinați numerele reale x și y, știind că $xA\cdot A-8A=yI_2$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-2(x+y)+6$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=(x-2)(y-2)+2$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numărul real x, pentru care $x*3=2018$.
5p	**c)** Calculați $\log_2 2*\log_2 3*\log_2 4*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6-6x+10$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=0$.
5p	**b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(0,9)+f(1,1)\geq 10$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^2 \dfrac{f(x)}{x}dx=e(e-1)$.
5p	**b)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției f pentru care $F(1)=0$.
5p	**c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 f(x)\,f'(x)dx=\dfrac{1}{2}e^a$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\left(1+\sqrt{5}\right)^2=6+2\sqrt{5}$	**3p**
	$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, deci $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{20}=6+2\sqrt{5}-2\sqrt{5}=6$	**2p**
2.	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2+2x-3=0$, deci $x=-3$ sau $x=1$	**3p**
	Distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox este egală cu 4	**2p**
3.	$2^{2x}\cdot 2^{3x+3}=2^{8x}\Leftrightarrow 2^{5x+3}=2^{8x}$	**3p**
	$5x+3=8x$, deci $x=1$	**2p**
4.	Numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15 sunt formate cu cifrele 1, 3 și 5	**3p**
	Numerele sunt 135, 153, 315, 351, 513 și 531	**2p**
5.	$a+1=2a-1$	**3p**
	$a=2$	**2p**
6.	$4\sin^2 x+12\sin x\cos x+9\cos^2 x+9\sin^2 x-12\sin x\cos x+4\cos^2 x=$	**2p**
	$=13\sin^2 x+13\cos^2 x=13\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=13$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=$	**3p**
	$=2\cdot 2-1\cdot 1=3$	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}x & x-1\\ x-1 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & y-1\\ y-1 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy+xy-x-y+1 & xy-x+xy-y\\ xy-y+xy-x & xy-x-y+1+xy\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}2xy-x-y+1 & 2xy-x-y+1-1\\ 2xy-x-y+1-1 & 2xy-x-y+1\end{pmatrix}=A(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$A(x)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)=A\left(2\cdot x\cdot\frac{1}{2}-x-\frac{1}{2}+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, $A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(y)=A\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot y-\frac{1}{2}-y+1\right)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	Pentru orice numere reale x și y, $\left(A(x)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\right)\cdot A(y)=A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(y)=A\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $a=\frac{1}{2}$	**3p**
2.a)	$6*2=6+2-\frac{6\cdot 2}{4}=$	**3p**
	$=8-3=5$	**2p**

b)	$x+4x-\frac{x\cdot 4x}{4}=6\Leftrightarrow x^2-5x+6=0$	**3p**
	$x=2$ sau $x=3$	**2p**
c)	$x*4=4$ și $4*y=4$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
	$1*2*3*\ldots*2019=\left((1*2*3)*4\right)*\left(5*6*\ldots*2019\right)=4*\left(5*6*\ldots*2019\right)=4$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-(x-3)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=$	**3p**
	$=\frac{e^x\left(1-(x-3)\right)}{e^{2x}}=\frac{4-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	$f''(x)=\frac{x-5}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$f''(x)\geq 0$, pentru orice $x\in[5,+\infty)$, deci funcţia f este convexă pe $[5,+\infty)$	**2p**
c)	$x\in(-\infty,4]\Rightarrow f'(x)\geq 0$, deci f este crescătoare pe $(-\infty,4]$ și $x\in[4,+\infty)\Rightarrow f'(x)\leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[4,+\infty)$	**2p**
	$f(x)\leq f(4)$, pentru orice număr real $x\Rightarrow 3+\frac{x-3}{e^x}\leq 3+\frac{1}{e^4}$, deci $x-3\leq e^{x-4}$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(6x^2+4x+1\right)dx=\left(2x^3+2x^2+x\right)\Big\vert_0^1=$	**3p**
	$=2+2+1-0=5$	**2p**
b)	F este o primitivă a funcției $f\Rightarrow F'(x)=f(x)=6x^2+4x+1$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f(x)>0\Rightarrow F'(x)>0$, pentru orice număr real x, deci funcţia F este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\int_1^a\frac{f(x)}{x}dx=\int_1^a\left(6x+4+\frac{1}{x}\right)dx=\left(3x^2+4x+\ln x\right)\Big\vert_1^a=3a^2+4a+\ln a-7$	**2p**
	$3a^2+4a+\ln a-7=13+\ln a\Leftrightarrow 3a^2+4a-20=0$, de unde obținem $a=-\frac{10}{3}$ care nu convine, $a=2$ care convine	**3p**

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(1+\sqrt{5}\right)^2-\sqrt{20}=6$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x\cdot 8^{x+1}=16^{2x}$.

5p **4.** Determinați numerele naturale de trei cifre care au produsul cifrelor egal cu 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(a,a+1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul A se află pe dreapta de ecuație $y=2x-1$.

5p **6.** Demonstrați că $(2\sin x+3\cos x)^2+(3\sin x-2\cos x)^2=13$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x-1 \\ x-1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(2xy-x-y+1)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $A(a)=A(x)\cdot A\left(\frac{1}{2}\right)\cdot A(y)$, pentru orice numere reale x și y.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-\frac{xy}{4}$.

5p **a)** Arătați că $6*2=5$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*(4x)=6$.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\ldots*2019$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3+\frac{x-3}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{4-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că funcția f este convexă pe $[5,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $x-3\le e^{x-4}$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=6x^2+4x+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=5$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)}{x}\,dx=13+\ln a$.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2019 - 2020

Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	50	**5p**
2.	30	**5p**
3.	10	**5p**
4.	25	**5p**
5.	90	**5p**
6.	20	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează cubul Notează cubul $ABCDEFGH$	**4p** **1p**
2.	$a=\frac{3-2}{4}:\frac{1}{12}=\frac{1}{4}\cdot\frac{12}{1}=3$ $b=3\cdot\frac{4-3+1}{6}=3\cdot\frac{2}{6}=1$, deci $m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{3+1}{2}=2$	**2p** **3p**
3.	$\frac{30}{100}\cdot x=\frac{2}{5}(140-x)$, unde x este suma economisită de Ana $3x=560-4x$, de unde $x=80$, deci Ana a economisit 80 de lei	**3p** **2p**
4.	**a)** $x=3^{47-45}-2^{40-38}=3^2-2^2=$ $=9-4=5$	**3p** **2p**
	b) $y=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot 3\sqrt{3}=1+5+9-3=12$ $N=12-3=9$, iar cel mai mic număr natural de două cifre divizibil cu N este 18	**3p** **2p**
5.	$E(x)=4x^2+4x+1-3(x^2-2x+1)-(x^2-1)-6x-6=4x^2+4x+1-3x^2+6x-3-x^2+1-6x-6=$ $=4x-7$, pentru orice număr real x $4n-7\le -1\Leftrightarrow n\le\frac{3}{2}$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=0$ sau $n=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $P_{ABCD}=2(AB+BC)=$ $=2(13+10)=46$cm	**3p** **2p**
	b) $BC=CE$ şi $AD=BC$, deci $AD=CE$ şi, cum $DE\|\|AC$, obţinem că $ACED$ este trapez isoscel, deci $AE=CD$ $AB=CD$, deci $AB=AE$	**3p** **2p**

	c) Triunghiul BCE echilateral şi are aria $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$	**2p**
	$AB = AE$ şi $BC = CE$, deci AC este mediatoarea segmentului BE, de unde obţinem că $AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = 12\,\text{cm}$, unde F este punctul de intersecţie a dreptelor AC şi BE $\mathcal{A}_{\Delta ABE} = 60\,\text{cm}^2 \Rightarrow \mathcal{A}_{ABCE} = \mathcal{A}_{\Delta ABE} + \mathcal{A}_{\Delta BCE} = 60 + 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$	**3p**
2.	**a)** $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC =$	**3p**
	$= 24 \cdot 10 = 240\,\text{cm}^2$	**2p**
	b) MN este linie mijlocie în ΔABD şi MP este linie mijlocie în ΔABE	**2p**
	$MN \parallel BD$, $MP \parallel BE$, $MN \cap MP = \{M\}$ şi $BD \cap BE = \{B\} \Rightarrow (MNP) \parallel (BDE)$	**3p**
	c) $EO \perp (ABC)$, $AT \subset (ABC)$, unde $AT \perp BD$, $T \in BD \Rightarrow EO \perp AT$ şi, cum $BD \cap EO = \{O\}$, obţinem $AT \perp (BDE)$, deci, cum $(MNP) \parallel (BDE)$, $AT \perp (MNP) \Rightarrow d((MNP),(BDE)) = TS$, unde $\{S\} = MN \cap AT$	**3p**
	N este mijlocul segmentului AD şi $NS \parallel BD \Rightarrow NS$ este linie mijlocie în $\Delta ATD \Rightarrow TS = \frac{AT}{2}$ şi, cum $AT = \frac{AD \cdot AB}{BD} = \frac{120}{13}\,\text{cm}$, obţinem $TS = \frac{60}{13}\,\text{cm}$	**2p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2019 - 2020

Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 4

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al II-lea şi SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	15	**5p**
2.	14	**5p**
3.	6	**5p**
4.	6	**5p**
5.	45	**5p**
6.	50	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	Desenează paralelipipedul dreptunghic Notează paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$	**4p** **1p**
2.	$a=\frac{6-5}{10}:\frac{1}{10}=\frac{1}{10}:\frac{1}{10}=1$ $b=4\cdot\frac{10-3-1}{6}=4\cdot\frac{6}{6}=4$, de unde obținem $b=4\cdot1=4a$	**2p** **3p**
3.	$\frac{x}{4}+2\cdot\frac{x}{4}+10=x$, unde x este lungimea traseului parcurs în cele trei zile $x=40\,\text{km}$	**3p** **2p**
4.	**a)** $x=10\sqrt{2}-3\sqrt{9\cdot2}=$ $=10\sqrt{2}-9\sqrt{2}=\sqrt{2}$	**3p** **2p**
	b) $y=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{2\sqrt{5}}-\frac{7}{5\sqrt{5}}\right):\frac{8}{5\sqrt{5}}=\frac{10+5-7}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{5\sqrt{5}}{8}=1$ $\left(y-x^2\right)^{2020}=\left(1-\sqrt{2}^2\right)^{2020}=(-1)^{2020}=1$	**3p** **2p**
5.	$E(x)=(2x+1)^2+2(2x-1)(2x+1)+(2x-1)^2=\left((2x+1)+(2x-1)\right)^2=(4x)^2=16x^2$, pentru orice număr real x $\frac{E(x)+E(-x)}{2}=\sqrt{E(1)\cdot E(-1)}\Leftrightarrow\frac{16x^2+16(-x)^2}{2}=\sqrt{16\cdot16}\Leftrightarrow16x^2=16$, deci $x^2=1$, de unde obținem $x=-1$ sau $x=1$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $DF=\frac{AD}{3}=$ $=\frac{12}{3}=4\,\text{cm}$	**3p** **2p**

	b) ΔDCF și ΔBCE sunt dreptunghice, $DC=BC$ și $DF=BE$, deci $\Delta DCF\equiv\Delta BCE$, de unde obținem $\mathcal{A}_{\Delta DCF}=\mathcal{A}_{\Delta BCE}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{AECF}=\mathcal{A}_{ABCD}-\mathcal{A}_{\Delta DCF}+\mathcal{A}_{\Delta BCE}=\mathcal{A}_{ABCD}=AB^2=144\text{cm}^2$	**2p**
	c) ΔCFE este isoscel și, cum $EF=8\sqrt{5}\text{cm}$, obținem $EN=4\sqrt{5}\text{cm}$, unde N este punctul de intersecție a dreptelor CM și EF	**3p**
	$\Delta EMN\sim\Delta EFA\Rightarrow\frac{EM}{EF}=\frac{EN}{EA}$, deci $EM=10\text{cm}$ și, cum $B\in(EM)$, obținem $MB=6\text{cm}$, deci $MB=\frac{AB}{2}$, de unde obținem că punctul M este mijlocul segmentului AB	**2p**
2.	**a)** $P_{ABCD}=4AB=$	**3p**
	$=4\cdot6=24\text{cm}$	**2p**
	b) VO este mediană în ΔVBD și $VG=2GO$, $G\in VO$, deci G este centrul de greutate a ΔVBD și, cum $\{N\}=VB\cap DG$, obținem că punctul N este mijlocul segmentului VB	**2p**
	MN este linie mijlocie în $\Delta VAB\Rightarrow MN\|\|AB$ și, cum $AB\subset(ABC)$, obținem $MN\|\|(ABC)$	**3p**
	c) $VO\|\|NP$, unde $NP\perp BO$, $P\in BO$, deci $NP\perp(ABC)$ și, cum $MN\|\|(ABC)$, obținem $d(M,(ABC))=d(N,(ABC))=NP$	**2p**
	ΔVOB este dreptunghic, $BO=3\sqrt{2}\text{cm}$, deci $VO=\sqrt{VB^2-OB^2}=3\sqrt{3}\text{cm}$ și, cum N este mijlocul segmentului VB și $NP\|\|VO\Rightarrow NP$ este linie mijlocie în ΔVBO, deci $NP=\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}$	**3p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2019 - 2020

Matematică

Varianta 1

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieţi numai rezultatele. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $60-20:2$ este egal cu … .

5p **2.** Numărul care reprezintă $\frac{1}{4}$ din 120 este egal cu … .

5p **3.** Cel mai mic număr natural din intervalul $I=[10,20]$ este egal cu … .

5p **4.** Pătratul $MNPQ$ are latura de 5cm. Aria pătratului $MNPQ$ este egală cu … cm^2.

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Unghiul dreptelor BC și DD' are măsura de …°.

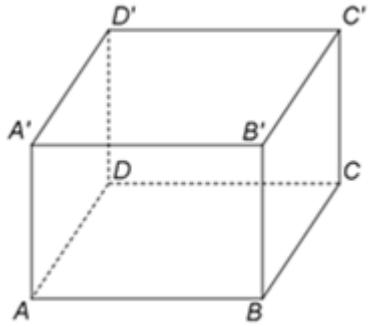
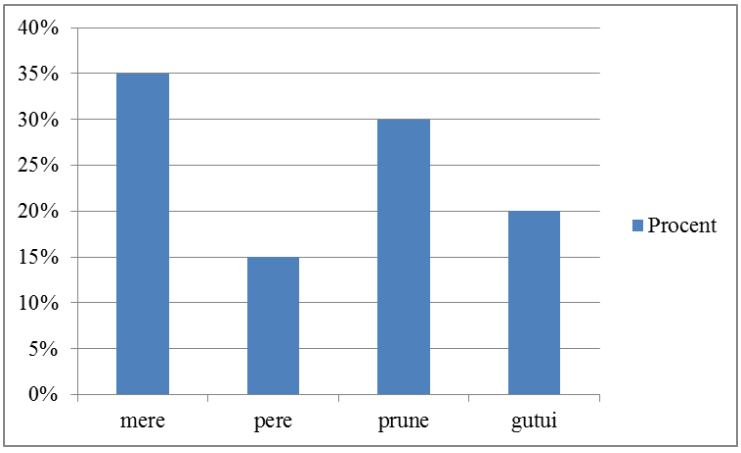


Figura 1

5p **6.** Într-un depozit sunt în total 100kg de fructe. Repartiția procentuală a tipurilor de fructe din depozit este reprezentată în diagrama de mai jos.



Conform informațiilor din diagramă, cantitatea de gutui din acest depozit este de …kg .

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Desenaţi, pe foaia de examen, un cub $ABCDEFGH$.

5p **2.** Arătați că media aritmetică a numerelor raționale $a=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{12}$ și $b=3\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)$ este egală cu 2.

5p **3.** Ana și Mihai au economisit, împreună, 140 de lei. Determinați suma economisită de Ana, știind că 30% din suma economisită de ea reprezintă două cincimi din suma economisită de Mihai.

4. Se consideră numerele reale $x=3^{47}:3^{45}-2^{40}:2^{38}$ şi $y=\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right):\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

5p **a)** Arătaţi că $x=5$.

5p **b)** Se consideră numărul natural $N=y-\frac{x+1}{2}$. Determinaţi cel mai mic număr natural de două cifre care este divizibil cu N.

5p **5.** Se consideră expresia $E(x)=(2x+1)^2-3(x-1)^2-(x-1)(x+1)-6(x+1)$, unde x este număr real. Determinaţi numerele naturale n pentru care $E(n)\le -1$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieţi rezolvările complete. (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un paralelogram $ABCD$ cu $AB=13\text{cm}$, $BC=10\text{cm}$ şi $m(\sphericalangle BAD)<90^\circ$. Se consideră punctul E astfel încât $DE\parallel AC$, $DE<AC$ şi segmentele BC şi CE sunt congruente.

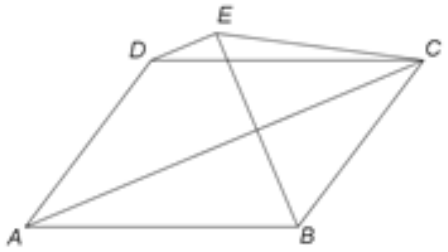


Figura 2

5p **a)** Arătaţi că perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu 46cm.

5p **b)** Demonstraţi că segmentele AB şi AE sunt congruente.

5p **c)** Demonstraţi că, dacă măsura unghiului BCE este de 60°, atunci aria patrulaterului $ABCE$ este egală cu $60+25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

2. În *Figura 3* este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB=24\text{cm}$ şi $BC=10\text{cm}$. Punctul O este intersecţia dreptelor AC şi BD, iar dreapta EO este perpendiculară pe planul (ABC). Punctele M, N şi P sunt mijloacele segmentelor AB, AD, respectiv AE.

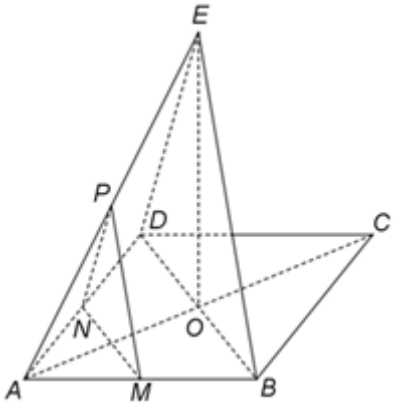


Figura 3

5p **a)** Arătaţi că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 240cm^2.

5p **b)** Demonstraţi că planele (MNP) şi (BDE) sunt paralele.

5p **c)** Arătaţi că distanţa dintre planele (MNP) şi (BDE) este egală cu $\frac{60}{13}\text{cm}$.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2019 - 2020

Matematică

Varianta 4

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I - Pe foaia de examen scrieți numai rezultatele. (30 de puncte)

5p **1.** Rezultatul calculului $20-20:4$ este egal cu … .

5p **2.** Dacă $\frac{x}{6}=\frac{7}{3}$, atunci numărul real x este egal cu … .

5p **3.** Dacă $A=\{0,2,4,6,8\}$, $B=\{0,3,6\}$ și $A\cap B=\{0,n\}$, atunci n este egal cu … .

5p **4.** Aria pătratului $ABCD$ este egală cu 36cm^2. Lungimea laturii acestui pătrat este egală cu … cm.

5p **5.** În *Figura 1* este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Unghiul dreptelor AD' și BC are măsura de …°.

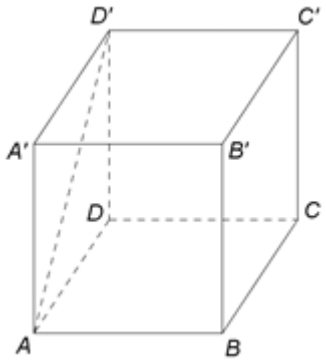


Figura 1

5p **6.** În tabelul de mai jos este prezentat numărul de elevi ai unei școli, care participă la olimpiada de matematică.

Clasa	a V-a	a VI-a	a VII-a	a VIII-a
Număr de elevi	50	24	16	10

Conform informațiilor din tabel, procentul din numărul total de participanți la olimpiada de matematică, reprezentat de numărul elevilor de clasa a V-a este … %.

SUBIECTUL al II-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Desenați, pe foaia de examen, un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$.

5p **2.** Se consideră numerele reale $a=\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right):\frac{1}{10}$ și $b=2^2\cdot\left(\frac{5}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)$. Arătați că $b=4a$.

5p **3.** Vlad a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi, Vlad a parcurs un sfert din lungimea traseului, în a doua zi, Vlad a parcurs dublul distanței parcurse în prima zi, iar în a treia zi restul de 10km. Determinați lungimea traseului parcurs de Vlad.

4. Se consideră numerele reale $x=10\sqrt{2}-3\sqrt{18}$ și $y=\left(\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{20}}-\frac{7}{\sqrt{125}}\right):\frac{8}{5\sqrt{5}}$.

5p **a)** Arătați că $x=\sqrt{2}$.

5p **b)** Calculați $\left(y-x^2\right)^{2020}$.

5p **5.** Se consideră expresia $E(x)=(2x+1)^2+(2x-1)(4x+2)+(2x-1)^2$, unde x este număr real. Determinați numerele reale x, știind că media aritmetică a numerelor $E(x)$ și $E(-x)$ este egală cu media geometrică a numerelor $E(1)$ și $E(-1)$.

SUBIECTUL al III-lea - Pe foaia de examen scrieți rezolvările complete. (30 de puncte)

1. În *Figura 2* este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu $AB=12\text{cm}$. Punctul E aparține dreptei AB astfel încât $B\in(AE)$ și $BE=4\text{cm}$, iar punctul F este situat pe latura AD astfel încât $AD=3DF$.

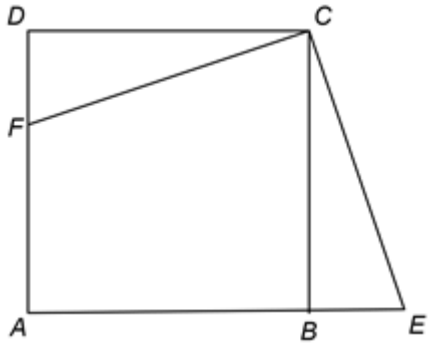


Figura 2

5p **a)** Arătați că $DF=4\text{cm}$.

5p **b)** Arătați că aria patrulaterului $AECF$ este egală cu 144cm^2.

5p **c)** Perpendiculara din C pe dreapta EF intersectează dreapta AB în M. Demonstrați că punctul M este mijlocul segmentului AB.

2. În *Figura 3* este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$ cu $VB=3\sqrt{5}\text{cm}$ și baza pătratul $ABCD$, $AB=6\text{cm}$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD, iar dreapta VO este perpendiculară pe planul (ABC). Punctul M este mijlocul muchiei VA, punctul G este situat pe segmentul VO astfel încât $VG=2GO$ și punctul N este intersecția dreptelor VB și DG.

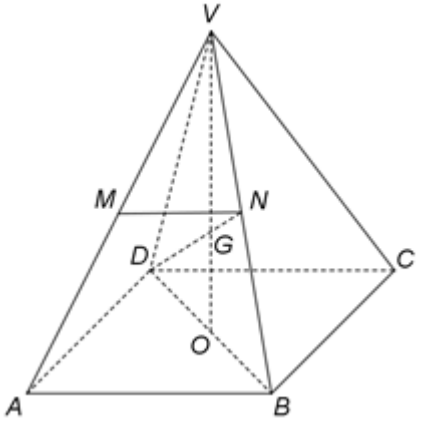


Figura 3

5p **a)** Arătați că perimetrul pătratului $ABCD$ este egal cu 24cm.

5p **b)** Demonstrați că dreapta MN este paralelă cu planul (ABC).

5p **c)** Demonstrați că distanța de la punctul M la planul (ABC) este egală cu $\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{cm}$.

Prezenta lucrare conține___pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: ……..
Prenumele:…….....
……..……
Școala de proveniență: ……..
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: ……

Nume şi prenume asistent	Semnătura

SIMULARE JUDEȚEANĂ EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Februarie 2023

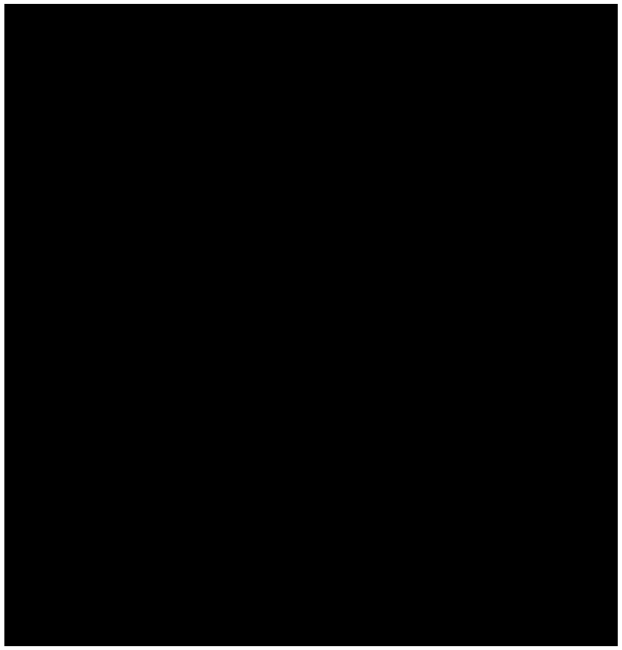
Matematică

Varianta 2

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Cel mai mare număr care împărțit la 5 dă câtul egal cu 21 este:
a) 105;
b) 109;
c) 110;
d) 106.

5p **2.** Dintre numerele $\frac{20}{19}$, $\frac{21}{20}$, $\frac{22}{21}$ și $\frac{23}{22}$, cel mai mare este numărul:
a) $\frac{20}{19}$; **b)** $\frac{21}{20}$; **c)** $\frac{22}{21}$; **d)** $\frac{23}{22}$;

5p **3.** Ana, Adina, Alin și Andrei au efectuat calculul: $-\frac{12}{\sqrt{3}}+\sqrt{75}+\left|\sqrt{3}-4\right|$. Rezultatele obținute sunt trecute în tabelul alăturat:

Ana	Adina	Alin	Andrei
$2\sqrt{3}-4$	4	-4	$4-2\sqrt{3}$

Copilul care a obținut rezultatul corect este:
a) Ana;
b) Adina;
c) Alin;
d) Andrei.

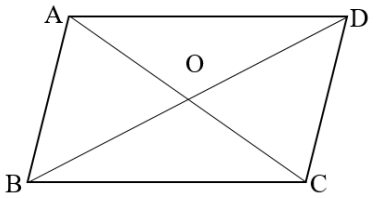
5p **4.** Probabilitatea ca, înlocuind la întâmplare pe x cu o cifră, numărul $\overline{2x34}$ să fie divizibil cu 9 este egală cu:
a) $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{4}$; **c)** $\frac{1}{5}$; **d)** $\frac{1}{10}$.

5p	**5.** O echipă de 18 muncitori termină o lucrare în 10 zile. Dacă echipa ar conține 12 muncitori, atunci lucrarea s-ar executa în: **a)** 5 zile; **b)** 18 zile; **c)** 8 zile; **d**) 15 zile.
5p	**6.** Maria afirmă: "O pătrime din numărul 2^{12} înseamnă 512". Afirmația Mariei este: **a)** adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea

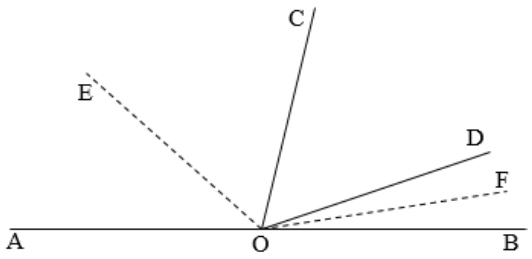
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$, cu $AC \cap BD = \{O\}$, unde $\sphericalangle BAC = 70^0$ și $\sphericalangle BDC = 50^0$. Măsura unghiului BOC este egală cu:



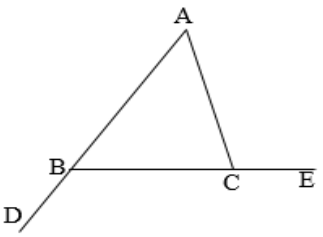
a) 90^0; **b)** 100^0; **c)** 110^0; **d)** 120^0.

5p **2.** În figura alătură , punctele A, O, B sunt coliniare, iar semidreptele OC și OD sunt de aceeași parte a dreptei AB, măsura unghiului COD este de 60^0, $\sphericalangle AOC = 5 \cdot \sphericalangle DOB$. Semidreptele OE și OF sunt bisectoarele unghiurilor AOC, respectiv $\sphericalangle DOB$. Măsura unghiului EOF este egală cu:

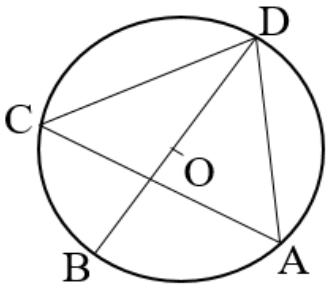
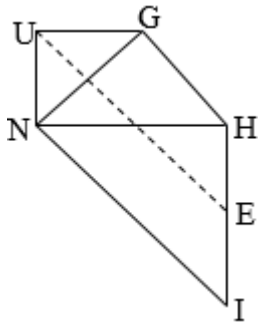
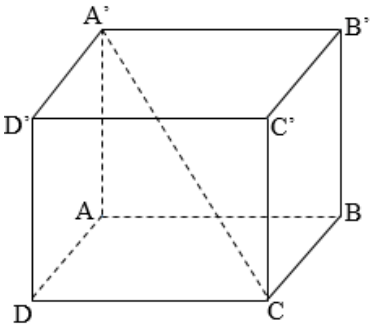


a) 60^0; **b)** 90^0; **c)** 120^0; **d)** 150^0.

5p **3.** În figura alătură este reprezentat un triunghi ABC, în care $\sphericalangle CBD = 3x^0$, $\sphericalangle ACE = 6x^0 + 36^0$ și $\sphericalangle A = \frac{\sphericalangle C}{2}$. Valoarea lui x este egală cu:



a) 16; **b)** 18; **c)** 20; **d)** 22.

5p	**4.** În figura alăturată, punctele A, B, C, D aparțin cercului , de centru O, astfel încât punctul D este diametral opus punctului B, $\sphericalangle CAD = 60^0$ și $CD = 6\sqrt{3}\ cm$. Distanța de la punctul B la dreapta CD este egală cu:  **a)** $6\ cm$; **b)** $6\sqrt{2}\ cm$; **c)** $12\ cm$; **d)** $12\sqrt{2}\ cm$.
5p	**5.** Un parc are forma din figură, compunându-se din trei triunghiuri dreptunghice isoscele UNG, NGH și NHI astfel încât $\sphericalangle NUG = \sphericalangle NGH = \sphericalangle NHI = 90^0$. Se știe că $UN = 12\ cm$. Dacă punctul E este mijlocul laturii HI, atunci lungimea segmentului EU, este egală cu:  **a)** $24\ cm$; **b)** $24\sqrt{2}\ cm$; **c)** $12\sqrt{2}\ cm$; **d)** $12\ cm$.
5p	**6.** În figura alăturată este reprezentată o cutie în formă de cub, cu latura $BC = 8\ cm$. Sinusul unghiului dintre dreptele $A'C$ și BB' este egal cu.  **a)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; **c)** $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; **d)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Dacă într-un parc elevii unei clase se așază câte 3 pe o bancă, atunci rămân 4 elevi în picioare. Dacă elevii se așază câte 5 pe o bancă, atunci o bancă rămâne liberă și o bancă este ocupată doar de 2 elevi.

(2p) a) Este posibil să fie 25 de elevi în clasă? Justifică răspunsul.

(3p) b) Câți elevi sunt în clasă?

5p **2.** Fie expresia $E(x)=(x+3)^2-(x+2)^2$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(2p) a) Calculează $E(\sqrt{3}-1)$.

(3p) b) Arată că numărul $A=E(1)+E(2)+\ldots+E(n)+9$ este un număr pătrat perfect, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p

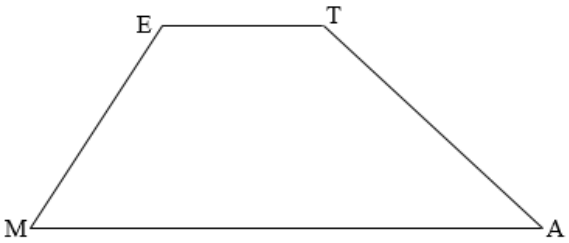
3. Fie mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\sqrt{(2x+3)^2}<3\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{2x+5}{3}\right|<1\right\}$.

(2p) a) Determină suma elementelor mulțimii $(A\cup B)\cap\mathbb{Z}$.

(3p) b) Dacă numărul real $b=\sqrt{24}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-2\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|-\frac{12}{\sqrt{48}}$, arată că $b\in B$.

5p

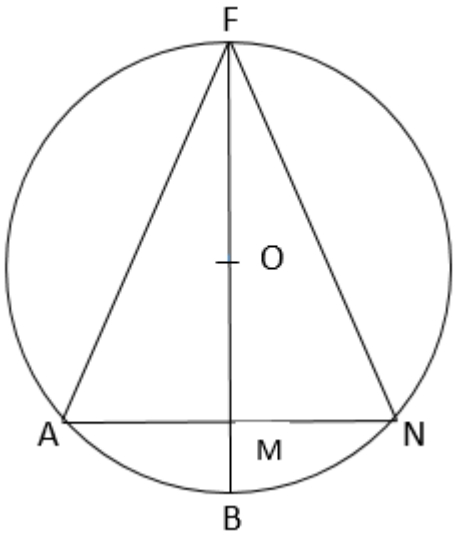
4. Fie trapezul $MATE$, $MA \| TE$, $\sphericalangle MAT = 60^0$, $TE = 8\ cm$, $tg(\sphericalangle EMA) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. Înălțimea trapezului are lungimea egală cu $10\sqrt{3}\ cm$.



(2p) a) Determină aria triunghiului MET.

(3p) b) Calculează aria trapezului.

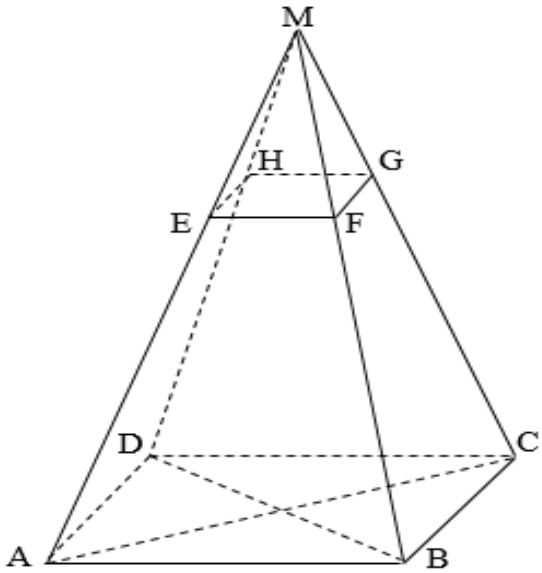
5p	**5.** Fie triunghiul FAN cu $FA = FN$, înscris în cercul de centru O și rază R, B punctul diametral opus lui F și $FB \cap AN = \{M\}$.



(2p) a) Demonstrează că $\Delta FAB \sim \Delta FMA$.

(3p) b) Dacă $AF = 8\ cm$ și $R = 5\ cm$, calculează lungimea segmentului AN.

5p **6.** Fie $MABCD$ o piramidă patrulateră regulate și punctele $E \in MA$, $F \in MB$, $G \in MC$, $H \in MD$ astfel încât $\frac{ME}{EA} = \frac{1}{3}$; $\frac{MF}{MB} = \frac{1}{4}$; $\frac{CG}{GM} = 3$ și $\frac{DH}{DM} = \frac{3}{4}$.



(2p) a) Demonstrează că $(ABC) \| (EFG)$.

(3p) b) Demonstrează că dreptele AG, BH, CE și DF sunt concurente.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică

Testul 12

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Trei fire de trandafiri costă $3\cdot 10=30$ de lei.	**1p**
	Cum două fire de lalele și trei fire de trandafiri costă împreună 27 de lei, deducem că nu este posibil ca prețul unui fir de trandafir să fie 10 lei.	**1p**
	b) $5x+4y=43$ și $2x+3y=27$**,** unde x este prețul unui fir de lalea și y este prețul unui fir de trandafir	**1p**
	$y=7$ lei, deci prețul unui fir de trandafir este de 7 lei	**2p**
2.	**a)** $E(x)=12x^2-1-2\left(4x^2+4x+1\right)-\left(4x^2-11x-3\right)+1-x=$	**1p**
	$=12x^2-1-8x^2-8x-2-4x^2+11x+3+1-x=2x+1$	**1p**
	b) $E(a)=2a+1$, deci $2a+1\le 3\sqrt{5}=\sqrt{45}<7$ și $2a+1$ este un număr natural impar, obținem că $2a+1\in\{1,3,5\}$	**2p**
	$a\in\{0,1,2\}$	**1p**
3.	**a)** $f(-2)=-1$, $f(2)=5$	**1p**
	$f(-2)+f(2)=-1+5=4$	**1p**

	b) $MA+MB$ are valoare minimă pentru cazul A, M și B puncte coliniare M reprezintă punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa $Oy \Rightarrow M(0,2)$	**1p** **2p**
4.	**a)** $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4}$	**1p**
	$= \dfrac{144\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**1p**
	b) $MN \parallel BC \Rightarrow \sphericalangle MNB = \sphericalangle ABC = 60°$	**1p**
	$\sphericalangle ABM = \dfrac{\sphericalangle ABD}{2} = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60° \Rightarrow \sphericalangle ABM = \sphericalangle ACB$, deci $\Delta BMN \sim \Delta ABC$	**2p**
5.	**a)** M mijlocul laturii DC, triunghiul BCD este isoscel de bază DC, deci $BM \perp DC$	**1p**
	Triunghiul BMC este dreptunghic în M, $\cos\sphericalangle C = \dfrac{MC}{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sphericalangle C = 30°$	**1p**
	b) Triunghiul BMC este dreptunghic în M, $\sphericalangle C = 30° \Rightarrow BM = \dfrac{BC}{2} = 3\,\text{cm}$	**1p**
	$AM = AC - MC = \sqrt{3}\,\text{cm}$ și $AD = DC - AC = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$	**1p**
	Triunghiul AMB dreptunghic în M, $AB = \sqrt{AM^2 + BM^2} = 2\sqrt{3}\,\text{cm} = AD$, deci triunghiul ABD este isoscel	**1p**
6.	**a)** Construim $MN \parallel AC$, $N \in AB$, MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, $MN = \dfrac{AC}{2} = 9\,\text{cm}$ și $\sphericalangle(VM, AC) = \sphericalangle(VM, MN) = \sphericalangle VMN$	**1p**
	Triunghiul VMC este dreptunghic în M, $VM = \sqrt{VC^2 - MC^2} = 9\,\text{cm}$, $VN = VM = MN \Rightarrow \Delta VMN$ este echilateral, deci $\sphericalangle VMN = 60°$	**1p**
	b) $VB^2 + VC^2 = BC^2 \Rightarrow \Delta VBC$ este dreptunghic, deci și triunghiul VAB este dreptunghic, $VB \perp VC$, $VB \perp VA$, și $VA, VC \subset (VAC) \Rightarrow VB \perp (VAC)$	**2p**
	P este mijlocul segmentului VC, $MP \parallel VB \Rightarrow MP \perp (VAC)$ și $MP = \dfrac{VB}{2} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}$	**1p**
	Așadar, $\text{d}(M, (VAC)) = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}\,\text{cm}$	

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică

Testul 13

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $a=m+2,\ a+m=15$, unde a reprezintă numărul problemelor rezolvate de Ana și m reprezintă numărul problemelor rezolvate de Mihai	**1p**
	$2m+2=15$, de unde obținem că nu este posibil ca numărul total de probleme rezolvate de Ana și Mihai să fie 15	**1p**
	b) $m=\frac{3}{4}a,$ deci $a=\frac{3}{4}a+2$	**2p**
	$a=8$	**1p**
2.	**a)** $E(10)=21^2+19^2-4\cdot 199$	**1p**
	$E(10)=6$	**1p**
	b) $E(x)=4x^2+4x+1+4x^2-4x+1-8x^2+4=6$, pentru orice număr real x	**1p**
	$n\cdot E(10)\cdot E(11)\cdot ...\cdot E(100)=n\cdot 6^{91}=6\cdot n\cdot 6^{90}$, de unde rezultă că $n=6$	**2p**

3.	**a)** $f(1)=1$, deci $P(1,1)\in G_f$	**1p**
	$g(1)=1$, deci $P(1,1)\in G_g$, de unde rezultă că $P(1,1)\in G_f\cap G_g$	**1p**
	b) $A(2,0)$, $B(0,2)$	**1p**
	$AO=OB=2$, triunghiul AOB dreptunghic în O, deci $AB=2\sqrt{2}$, de unde rezultă că	**1p**
	$d(O,AB)=\dfrac{OA\cdot OB}{AB}=\dfrac{2\cdot 2}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$	**1p**
4.	**a)** $\Delta AMN\sim\Delta ACB\Rightarrow\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{AN}{AB}=\dfrac{MN}{BC}$	**1p**
	$\dfrac{AM+AN+MN}{AB+AC+BC}=\dfrac{AM}{AC}=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$, deci $P_{\Delta AMN}=\dfrac{P_{\Delta ABC}}{3}=\dfrac{27}{3}=9\,\text{cm}$	**1p**
	b) $\Delta AMN\sim\Delta ACB\Rightarrow\dfrac{A_{\Delta AMN}}{A_{\Delta ABC}}=\left(\dfrac{AM}{AC}\right)^2=\dfrac{1}{9}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{BMNC}=\mathcal{A}_{\Delta ABC}-\mathcal{A}_{\Delta AMN}=\dfrac{8}{9}\mathcal{A}_{\Delta ABC}$	**1p**
5.	**a)** $\Delta AMD,\Delta DMC,\Delta MCB$ triunghiuri echilaterale congruente	**1p**
	$A_{ABCD}=3\cdot A_{\Delta AMD}=3\cdot\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4}=108\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**1p**
	b) $AMCD$ romb, AC bisectoarea $\sphericalangle BAD$	**2p**
	În ΔABC, $\sphericalangle CAB=30^\circ$, $\sphericalangle ABC=60^\circ\Rightarrow\sphericalangle ACB=90^\circ\Rightarrow AC\perp BC$	**1p**
6.	**a)** Triunghiurile DBC și DAC sunt echilaterale și congruente, deci $BN=AN=6\sqrt{3}\,\text{cm}$	**1p**
	Triunghiul ANB este isoscel, deci $MN\perp AB$, $MN=6\sqrt{2}\,\text{cm}$ și cum $\sqrt{72}<\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, obținem că MN are lungimea mai mică decât $5\sqrt{3}$	**1p**
	b) $(ABN)\cap(ABC)=AB$, $NM\perp AB$, $CM\perp AB\Rightarrow\cos(\sphericalangle((ABN),(ABC)))=\cos(\sphericalangle NMC)$	**2p**
	$CD\perp(ABN)\Rightarrow CN\perp MN\Rightarrow\cos(\sphericalangle NMC)=\dfrac{NM}{MC}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2020 - 2021
Matematică

Testul 14

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** După prima zi automobilul mai are de parcurs 65% din lungimea drumului, a doua zi mai parcurge 20% din rest, adică $\frac{20}{100}\cdot\frac{65}{100}x=\frac{13}{100}x=13\%$ din x, unde x este lungimea totală a drumului pe care îl parcurge automobilul	**1p**
	În prima și a doua zi automobilul a parcurs 48% din lungimea drumului, deci nu este adevărat că automobilul a parcurs jumătate din drum în primele două zile	**1p**
	b) Cum în primele două zile automobilul a parcurs 48% din lungimea drumului, obținem că în cea de-a treia zi automobilul a parcurs 52% din lungimea drumului	**1p**
	Cum $\frac{13}{100}x<\frac{35}{100}x<\frac{52}{100}x$, cea mai lungă distanță dintre cele parcurse de automobil în cele trei zile corespunde celei de-a treia zi	**2p**
2.	**a)** $x^2-10x+21=x^2-3x-7x+21=x(x-3)-7(x-3)=$	**1p**
	$=(x-3)(x-7)$, pentru orice număr real x	**1p**

	b) $E(x)=(x+2021)^2-10(x+2021)+25-4=(x+2021-5)^2-2^2=(x+2016)^2-2^2=$ $=(x+2014)(x+2018)$, pentru orice număr real x	**2p**
	$E(-2018)=0\Rightarrow E(-2018)\cdot E(-2019)\cdot E(-2020)\cdot E(-2021)=0$	**1p**
3.	**a)** $A(a,2a)\in G_f \Leftrightarrow f(a)=2a$	**1p**
	$-2a+8=2a$, de unde rezultă $a=2$	**1p**
	b) $B(0,8)$ este punctul de intersecție al graficului funcției f cu axa Oy	**1p**
	Distanța de la punctul $A(2,4)$ la punctul $B(0,8)$ este $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=2\sqrt{5}$	**2p**
4.	**a)** În triunghiul ABC, $MN\parallel BC$, deci $\Delta AMN\sim\Delta ABC$	**1p**
	$\frac{MN}{BC}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow MN\cdot AC=BC\cdot AN$	**1p**
	b) $NP\parallel AB\Rightarrow \frac{BP}{BC}=\frac{AN}{AC}$	**1p**
	$MN\parallel BC\Rightarrow \frac{BM}{AB}=\frac{CN}{AC}$	**1p**
	$\frac{BP}{BC}+\frac{BM}{AB}=\frac{AN}{AC}+\frac{CN}{AC}=1$	**1p**
5.	**a)** În triunghiul ABC dreptunghic A, $\measuredangle C=30^\circ$, deci $BC=12\text{cm}$, și cum M este mijlocul segmentului BC, rezultă că $AM=\frac{BC}{2}=BM=6$ cm	**1p**
	$P_{\Delta ABM}=3\cdot 6=18$ cm	**1p**
	b) În triunghiul ABC dreptunghic în A, $AC^2=\sqrt{BC^2-AB^2}$, deci $AC=6\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	AM este mediană, deci $\mathcal{A}_{\Delta AMC}=\frac{\mathcal{A}_{\Delta ABC}}{2}=\frac{6\cdot 6\sqrt{3}}{4}=9\sqrt{3}\text{cm}^2$, $9\sqrt{3}<16\Leftrightarrow\sqrt{243}<\sqrt{256}$, obținem că aria triunghiului AMC este mai mică decât 16cm^2	**2p**
	$\mathcal{A}_l=P_{\Delta ABC}\cdot AD=36\cdot 18=648\text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=\mathcal{A}_l+2\cdot\mathcal{A}_b=648+2\cdot 36\sqrt{3}\text{cm}^2=72\left(9+\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$	**1p**
	$72\left(9+\sqrt{3}\right)>720 \Leftrightarrow 9+\sqrt{3}>10\Leftrightarrow\sqrt{3}>\sqrt{1}$, deci aria totală a prismei $ABCDEF$ este mai mare decât 720cm^2	**1p**
	b) $AM\perp BC$, unde $M\in BC$ și, cum $DA\perp(ABC)$ și $AM, BC\subset(ABC)$, obținem că $DM\perp BC$, $AM\cap DM=\{M\}\Rightarrow BC\perp(ADM)$	**2p**
	Construim $AQ\perp DM$, $Q\in DM$ și, cum $AQ\perp BC$, $DM\cap BC=\{M\}\Rightarrow AQ\perp(DBC)\Rightarrow$ $d(A,(BCD))=AQ$; triunghiul ADM este dreptunghic în A, deci $AQ=\frac{AD\cdot AM}{DM}=9\text{cm}\Rightarrow$ $AA'=AQ=d(A,(BCD))$ și, cum $Q, A'\in(BCD)$, obținem că $A'=Q$	
	$EF\parallel BC$, deci $EF\perp(ADM)$, de unde obținem că $\measuredangle(AA', EF)=90^\circ$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A
Anul școlar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 15

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $35\cdot 4+2(g+r)=198$, unde g reprezintă numărul găinilor, iar r reprezintă numărul rațelor din ograda bunicii Mariei, deci $g+r=29$	**1p**
	Cum $35+29=64\neq 69$, deducem că în ograda bunicii Mariei nu pot fi 35 de iepuri	**1p**
	b) Cum $g=r+11$, deci $r=g-11$, din $i+g+r=69$ rezultă $i+2g=80$, unde i reprezintă numărul iepurilor din ograda bunicii Mariei	**1p**
	Cum $4i+2(g+r)=198$ și $r=g-11$, obținem $i+g=55$	**1p**
	$g=80-55=25$	**1p**

2.	**a)** $a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 4=-\frac{1}{2}+\frac{4}{3}$	**1p**
	$a=\frac{-3+8}{6}=\frac{5}{6}$	**1p**
	b) $b=\frac{3}{4}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{4}{3}-\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-1\right)=\frac{3}{4}-2+\frac{4}{3}-\left(\frac{3}{4}-1\right)=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}$	**2p**
	$N=2a-5b=2\cdot\frac{5}{6}-5\cdot\frac{1}{3}=0\in\mathbb{N}$	**1p**
3.	**a)** $f(2)=1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$	**1p**
	$f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)=-1$, deci $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+(-2)=-1=f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)$	**1p**
	b) $A\left(\frac{3}{2},0\right)$ și $B(0,-3)$ sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy	**1p**
	A este mijlocul segmentului BC și $OA\|\|CN$, unde N este proiecția punctului C pe axa Oy, deci OA linie mijlocie în triunghiul BCN, de unde obținem că $CN=2OA=3$ și $OB=ON=3$	**1p**
	M este proiecția punctului C pe axa Ox, deci $CM=ON=3$, de unde suma distanțelor de la punctul C la axele de coordonate este $CN+CM=6$	**1p**
4.	**a)** În triunghiul isoscel ABC, AT este mediană, deci AT este și înălțime, punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC deci, $AT=3GT=24\text{cm}$	**1p**
	Triunghiul ATB este dreptunghic în T, deci $AB=\sqrt{AT^2+BT^2}=26\text{cm}$, de unde $P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=72\text{cm}$	**1p**
	b) $BG\cap AC=\{N\}$, unde N este mijlocul segmentului AC și, cum S este simetricul punctului G față de punctul N, rezultă $GN\equiv NS$ și $BG\equiv GS$, deci GT este linie mijlocie în triunghiul BGS, de unde obținem că $SC\perp BC$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta SGC}=\mathcal{A}_{\Delta SBC}-\mathcal{A}_{\Delta GBC}=\frac{BC\cdot SC}{2}-\frac{BC\cdot GT}{2}=\frac{20(16-8)}{2}=80\text{cm}^2$ În triunghiul GTC dreptunghic în T, $GC^2=GT^2+TC^2$, deci $GC=\sqrt{164}=2\sqrt{41}\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta GSC}=\frac{GC\cdot d(S,GC)}{2}=80\text{cm}^2$ de unde obținem $d(S,CG)=\frac{80}{\sqrt{41}}=\frac{80\sqrt{41}}{41}\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** $\sin(\sphericalangle ADT)=\frac{AT}{AD}$ și $\sin(\sphericalangle ABT)=\frac{AT}{AB}$, unde $AT\perp BD$, $T\in BD$	**1p**
	$\frac{\sin(\sphericalangle ADB)}{\sin(\sphericalangle ABD)}=\frac{AT}{4}\cdot\frac{8}{AT}=2$	**1p**
	b) $\frac{DA}{BD}=\frac{4}{10},\ \frac{AB}{BC}=\frac{8}{20},\ \frac{BD}{CD}=\frac{10}{25}$, deci $\frac{DA}{BD}=\frac{AB}{BC}=\frac{BD}{CD}=\frac{2}{5}\Rightarrow\Delta BDA\sim\Delta CDB$	**2p**
	$\sphericalangle ADB\equiv\sphericalangle BDC$, deci DB este bisectoarea unghiului ADC	**1p**

6.	**a)** $VM^2 = VB^2 - BM^2 \Rightarrow VM = \sqrt{91}\,\text{cm}$ $\mathcal{A}_l = 3 \cdot \frac{BC \cdot VM}{2} = 3 \cdot \frac{6 \cdot \sqrt{91}}{2} = 9\sqrt{91}\,\text{cm}^2$	**1p** **1p**
	b) Segmentul MN este linie mijlocie în triunghiul $VBC \Rightarrow MN \parallel VB \Rightarrow MN = \frac{VB}{2} = 5\,\text{cm}$ Cum $VB \subset (VAB)$, $NM \parallel VB \Rightarrow MN \parallel (VAB)$, deci lungimea proiecției segmentului MN pe planul (VAB) este un segment de lungime $5\,\text{cm}$, egală cu cea a segmentului MN	**1p** **2p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică

Testul 10

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ŞI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $A=\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)=198$, de unde rezultă că $a+b=18$, dar cum a,b sunt cifre	**1p**
	$\Rightarrow a=b=9$, valori care nu convin, deoarece a și b trebuie să fie distincte, deci numărul A nu este posibil să fie 198	**1p**
	b) $11(a+b)=k^2$, $k\in\mathbb{N}$, deci $a+b=11$, unde a și b sunt cifre și cum $\overline{ab}\vdots 5$, obținem că $b=0$ sau $b=5$	**2p**
	Pentru $b=0$ obținem $a=11$, care nu convine, iar pentru $b=5$ obținem $a=6$, care convine, deci numărul căutat $\overline{ab}$ este 65	**1p**
2.	**a)** $x^2+x-12=x^2+4x-3x-12=\left(x^2+4x\right)-\left(3x+12\right)=$	**1p**
	$=x(x+4)-3(x+4)=(x+4)(x-3)$, pentru orice număr real x	**1p**

	b) $E(x)=x^2-2x+1+x^2+x-12-2x^2+8=$	**2p**
	$=2x^2-2x^2-2x+1-12+8=-x-3$, pentru orice număr real x	**1p**
3.	**a)** $f(0)=4$,	**1p**
	$f(-3)=0$, deci $f(0)+f(-3)=4$	**1p**
	b) $A(-3,0)$, $B(0,4)$	**1p**
	$AB=5=BM$, $O\in BM\Rightarrow OM=1$, deci coordonatele punctului M sunt $(0,-1)$	**1p**
	$O\notin BM\Rightarrow BM=5\Rightarrow OM=9$, deci coordonatele punctului M sunt $(0,9)$	**1p**
4.	**a)** $AB=2\cdot AM=4\text{cm}$ și $AC=3\cdot AQ=6\text{cm}$	**1p**
	triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci $BC=2\sqrt{13}\text{cm}$	**1p**
	b) MS linie mijlocie în triunghiul $ABC\Rightarrow SC=\dfrac{BC}{2}$ cm	**1p**
	$QT\parallel AB\Rightarrow\dfrac{CT}{BC}=\dfrac{CQ}{CA}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow CT=\dfrac{2}{3}BC$	**1p**
	$\dfrac{ST}{BC}=\dfrac{CT-SC}{BC}=\dfrac{1}{6}$	**1p**
5.	**a)** În triunghiului echilateral ABC, $AD\perp BC, D\in BC\Rightarrow AD=4\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AMC}=\dfrac{MC\cdot AD}{2}=4\sqrt{3}\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=32\sqrt{3}\text{ cm}^2$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\mathcal{A}_{\Delta ABM}+\mathcal{A}_{\Delta ACM}=\dfrac{AM}{2}\cdot\left(d(B,AM)+d(C,AM)\right)=16\sqrt{3}\text{cm}^2$	**1p**
	$d(B,AM)+d(C,AM)=\dfrac{32\sqrt{3}}{AM}>\dfrac{32\sqrt{3}}{8}=4\sqrt{3}$, deoarece $AM<8\text{cm}$	**1p**
6.	**a)** AM și CM sunt mediane în triunghiurile echilaterale congruente VAB și VBC, deci $AM=CM=3\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	Cum $AC=AB\sqrt{2}=6\sqrt{2}\text{cm}$, obținem că perimetrul triunghiului AMC egal cu $6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\text{cm}$	**1p**
	b) OM este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul dreptunghic isoscel $VOB\Rightarrow OM$ este și înălțime $\Rightarrow OM\perp VB$	**1p**
	$(VAB)\cap(VBD)=VB$, $AM\perp VB$, $OM\perp VB$, $AM\subset(VAB)$, $OM\subset(VBD)$ de unde rezultă că $\sphericalangle\left((VAB),(VBD)\right)=\sphericalangle\left(AM,MO\right)=\sphericalangle AMO$	**1p**
	$AO\perp(VBD)\Rightarrow AO\perp OM\Rightarrow tg\left(\sphericalangle AMO\right)=\dfrac{AO}{OM}=\dfrac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2020 - 2021
Matematică

Testul 11

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	b)	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $y=5z$, unde y este numărul apartamentelor cu trei camere și z numărul apartamentelor cu patru camere	**1p**
	$9=5z$, deci $9 \vdots 5$, afirmație falsă, de unde rezultă că nu este posibil ca în bloc să fie nouă apartamente cu trei camere	**1p**
	b) $x+y+z=40$, $y=5z$, $2x+3y+4z=122$, unde x este numărul apartamentelor cu două camere	**1p**
	$\begin{cases} x+6z=40 \\ 2x+19z=122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+12z=80 \\ 2x+19z=122 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=6 \\ x=4 \end{cases}$, deci, în bloc, sunt patru apartamente cu două camere	**2p**

2.	**a)** $2021^0=1,\ (-1)^{2021}=-1$	**1p**
	$a=2021-1+1=2021$	**1p**
	b) $b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}=-\frac{2\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$	**1p**
	$N=\left(a^2-2ab+b^2-a^2-2ab-b^2\right)\cdot b=-4ab^2$, deci $N=-4\cdot 2021\cdot\left(-\sqrt{2}\right)^2=-8084\cdot 2=-16168$, care este un număr întreg	**2p**
3.	**a)** $f(1)=2,\ f(3)=4,\ f(2)=3$	**1p**
	$f(1)+f(3)=2+4=6=2\cdot f(2)$	**1p**
	b) $M(-1,0)$, $N(0,1)$	**1p**
	Punctul P este simetricul punctului M față de punctul N și punctul Q este proiecția punctului P pe axa Ox, NO este linie mijlocie în triunghiul PMQ, deci $OQ=MO=1$, de unde rezultă că $PQ=2\cdot ON=2$, deci coordonatele punctului P sunt $(1,2)$	**2p**
4.	**a)** In triunghiul ABC, $26^2=10^2+24^2\Leftrightarrow BC^2=AB^2+AC^2$, de unde rezultă că $\sphericalangle BAC=90^\circ$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{10\cdot 24}{2}=120\,\text{cm}^2$	**1p**
	b) $NP=\frac{BD}{2}+\frac{DC}{2}=\frac{BC}{2}=13\,\text{cm}$, unde $\{N\}=AG\cap BC$ și $\{P\}=AG'\cap BC$	**1p**
	$\frac{AG}{GN}=\frac{AG'}{G'P}=2\Rightarrow GG'\|\|NP\Rightarrow\Delta AGG'\sim\Delta ANP\Rightarrow$	**1p**
	$\frac{GG'}{NP}=\frac{AG}{AN}\Rightarrow\frac{GG'}{13}=\frac{2}{3}$, de unde obținem că $GG'=\frac{26}{3}\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** Triunghiul ADT este dreptunghic în A, $DT^2=DA^2+AT^2$, deci $DT=10\sqrt{5}\,\text{cm}$	**1p**
	$\sin\left(\sphericalangle DTA\right)=\frac{DA}{DT}=\frac{10}{10\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, și cum $\sphericalangle DTA\equiv\sphericalangle BTC$, rezultă că $\sin\left(\sphericalangle BTC\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$	**1p**
	b) În triunghiul BTC dreptunghic în B, $\sin\left(\sphericalangle BTC\right)=\frac{BC}{TC}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, de unde obținem că $\Rightarrow TC=BC\sqrt{5}$, dar $TC^2=BC^2+BT^2$, deci $5BC^2=BC^2+1600\Leftrightarrow 4BC^2=1600$, de unde rezultă că $BC=20\,\text{cm}$	**2p**
	$DS\perp BC$, $S\in BC$, deci $ABSD$ este dreptunghi, de unde $BS=AD=10\,\text{cm}\Rightarrow SC=10\,\text{cm}$ și cum DS este înălțime și mediană în triunghiul DBC, obținem că triunghiul DBC este isoscel de bază BC	**1p**
6.	**a)** $\mathcal{V}=\mathcal{A}_{bazei}\cdot h_{apă}=60\cdot 40\cdot 50=120000\,\text{cm}^3$	**1p**
	$\mathcal{V}=120000\,\text{cm}^3=120\,\text{dm}^3=120\,\text{de litri}$	**1p**
	b) AC' constant, deci perimetrul triunghiului $A'MC$ este minim când suma lungimilor laturilor $A'M$ și MC este minimă	**1p**

	Pe desfășurarea în plan a paralelipipedului, în dreptunghiul $A'ACC'$ minimul $A'M+MC$ se realizează când punctele A', M și C sunt coliniare	**1p**
	Pe desfășurare avem $MB \parallel AA' \Rightarrow \Delta CBM \sim \Delta CAA' \Rightarrow \frac{MB}{AA'} = \frac{CB}{CA} \Rightarrow MB = 24\text{cm}$,deci $d(M,(ABC)) = MB = 24\text{cm}$	**1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 9

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dintre numerele 2020, 2021, 2022 și 2023, numărul divizibil cu 3 este:

a) 2020
b) 2021
c) 2022
d) 2023

5p **2.** Cinci kilograme de mere costă $17,5$ lei. Două kilograme de mere, de același fel, costă:

a) $3,5$ lei
b) 7 lei
c) 14 lei
d) 35 de lei

5p **3.** Maria lucrează la un proiect. Pentru acesta, ea măsoară temperatura pe parcursul unei zile, din două în două ore, de la ora $8:00$ până la ora $18:00$. Temperaturile măsurate sunt înregistrate în tabelul de mai jos:

Ora	8:00	10:00	12:00	14:00	16:00	18:00
Temperatura (℃)	–4	0	2	6	5	1

Temperatura înregistrată la ora $14:00$ este mai mare decât temperatura înregistrată la ora $8:00$ cu:

a) $-9°C$
b) $-6°C$
c) $8°C$
d) $10°C$

5p **4.** Se consideră numerele reale:

$$x=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right) \text{ și } y=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right).$$

Dintre enunțurile de mai jos, propoziția adevărată este:

a) $x=y$
b) $0>x>y$
c) $x>0>y$
d) $x>y>0$

5p **5.** Tudor, Ilinca, Maria și Mihai calculează produsul numerelor $a=\sqrt{2^2+2^2}$ și $b=\sqrt{2^4+2^4}$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul următor:

Tudor	Ilinca	Maria	Mihai
16	32	64	256

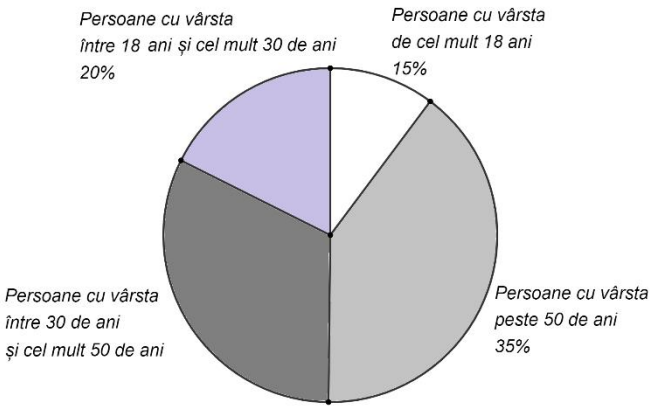
Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect este:

a) Tudor
b) Ilinca
c) Maria
d) Mihai

5p **6.** În diagrama alăturată este reprezentată distribuția celor 100000 de persoane ale unui oraș în funcție de grupa de vârstă din care fac parte.

Numărul de persoane cu vârsta cuprinsă între 30 de ani și cel mult 50 de ani este egal cu:

a) 15 000
b) 20 000
c) 30000
d) 35000

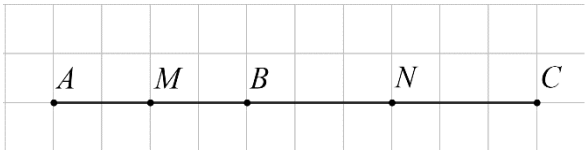


SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

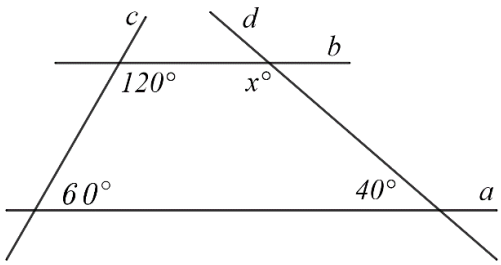
5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B și C, în această ordine. Punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul N este mijlocul segmentului BC. Știind că $MN = 5\text{cm}$, lungimea segmentului AC este egală cu:

a) $2{,}5\text{cm}$
b) 5cm
c) 10cm
d) 20cm



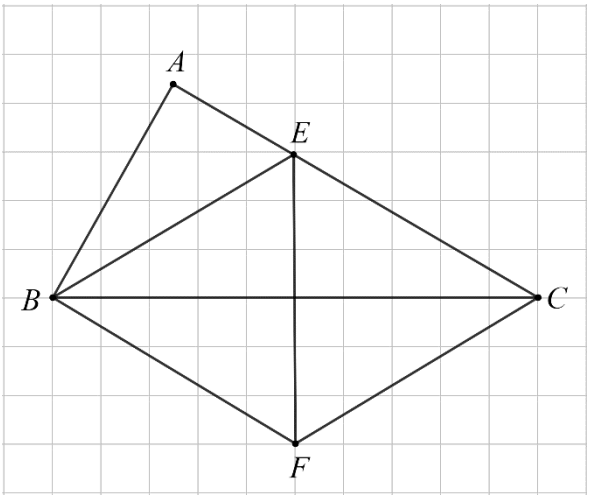
5p **2.** În figura alăturată, paralelele a și b sunt intersectate de dreptele c și d. Valoarea lui x este de:

a) 40
b) 60
c) 120
d) 140



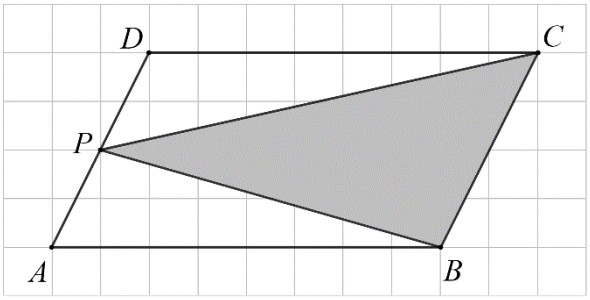
5p **3.** Figura alăturată reprezintă schița unui loc de joacă pentru copii în care triunghiul ABC este dreptunghic în A, unghiul ABC are măsura de $60°$, BE este bisectoarea acestuia, $E \in AC$, iar $AE = 3\text{m}$. Eugen se deplasează în linie dreaptă din punctul E până în punctul F care este simetricul punctului E față de dreapta BC, apoi iarăși în linie dreaptă, din punctul F până în punctul C. Deplasându-se astfel, Eugen a parcurs un traseu de lungime egală cu:

a) 3m
b) 6m
c) 12m
d) 18m



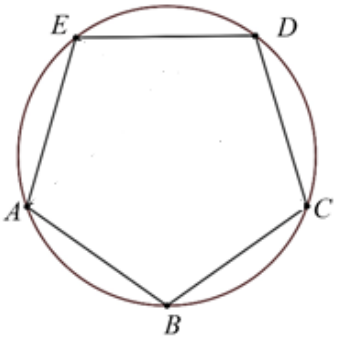
5p **4.** Figura alăturată reprezintă schița unei grădini, în formă de paralelogram $ABCD$. Punctul P este mijlocul segmentului AD. Suprafața corespunzătoare triunghiului PBC este cultivată cu legume. Raportul dintre aria suprafeței cultivate cu legume și aria suprafeței grădinii este egal cu:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}$



5p **5.** Punctele A, B, C, D și E sunt situate, în această ordine, pe un cerc, astfel încât coardele AB, BC, CD, DE și AE sunt congruente. Măsura unghiului EAB este egală cu:

a) 72°
b) 108°
c) 144°
d) 288°



5p **6.** Un acvariu are forma unei prisme drepte cu baza pătrat de latură $6\,\text{dm}$, iar muchia laterală a prismei este de 4 dm. Acvariul este umplut cu apă la jumătatea capacității maxime. Numărul de litri de apă din acvariu este egal cu:

a) 36 de litri
b) 72 de litri
c) 108 litri
d) 144 de litri

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un test conține 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 4 puncte, pentru fiecare răspuns greșit se scad 2 puncte și nu se acordă puncte din oficiu.

(2p) a) Este posibil ca Mihai, după ce a parcurs integral testul și a răspuns la toate întrebările, să obțină 65 de puncte? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Silvia a răspuns la toate întrebările testului și a obținut 50 de puncte. Determină numărul de întrebări din test la care Silvia a răspuns corect.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(x\sqrt{2}-3\right)\left(x\sqrt{2}+3\right)-(2x+3)^2+2x(x+6,5)+18$, unde x este număr real.

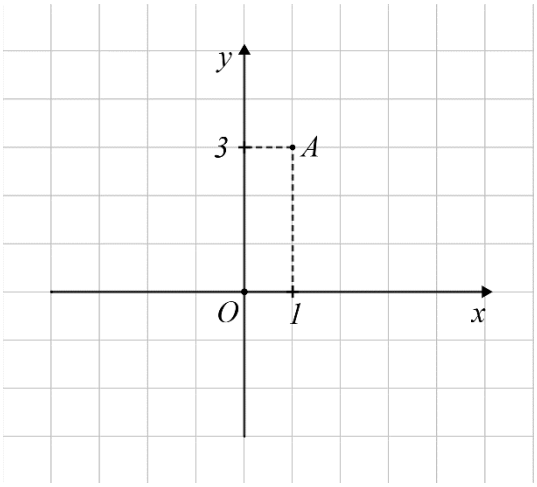
(3p) a) Demonstrează că $E(x)=x$, pentru orice număr real x.

(2p) b) Demonstrează că numărul $N=E(1)+E(2)+E(3)+...+E(49)$ este pătratul unui număr natural.

5p **3.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=-x+4$.

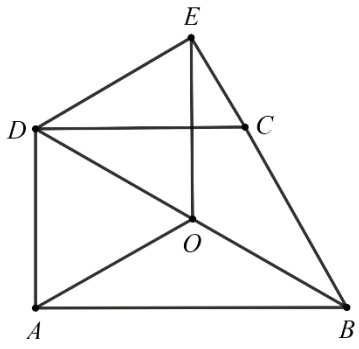
(2p) a) Demonstrează că punctul $A(1,3)$ este punctul de intersecție a reprezentărilor geometrice ale graficelor funcțiilor f și g în sistemul de axe ortogonale xOy.

(3p) b) Demonstrează că, în sistemul de axe ortogonale xOy, distanța dintre punctele B și C care reprezintă intersecția reprezentării geometrice a graficului funcției f, respectiv g, cu axa Ox este egală cu dublul distanței de la punctul $A(1,3)$ la axa Ox.



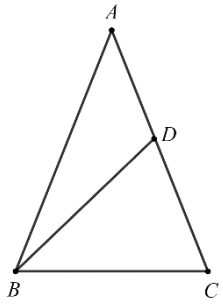
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AD \perp AB$, $AD = 6\text{cm}$, $\measuredangle BCD = 120°$ și $DC = BC$. Punctul E reprezintă proiecția punctului D pe dreapta BC.

(2p) a) Arată că $BD = 12\text{cm}$.



(3p) b) Punctul O este mijlocul segmentului BD. Calculează perimetrul patrulaterului $AOED$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC isoscel, cu $AB = AC = 10\text{cm}$ și $BC = 8\text{cm}$. Punctul D aparține laturii AC astfel încât $BD = BC$.

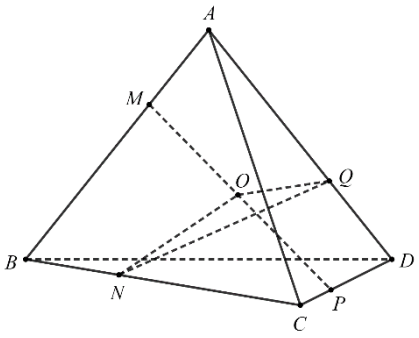


(**2p) a)** Arată că aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{21}\text{cm}^2$.

(3p) b) Demonstrează că triunghiul ABD are perimetrul mai mic decât 22cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$ cu $AB=6\text{cm}$. Punctele M, N, P și Q aparțin segmentelor AB, BC, CD, respectiv AD, astfel încât $AM=BN=CP=DQ=2\text{cm}$.

a) Demonstrează că unghiul dintre dreptele MN și AC are măsura de $30°$.



(3p) b) Punctul O este mijlocul segmentului MP. Demonstrează că dreapta MP este perpendiculară pe planul (NOQ).

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică

Testul 9

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Punctajul pentru răspunsurile corecte este multiplu de 4, deci este număr par, și punctajul pentru răspunsurile greșite este multiplu de 2, deci este număr par	**1p**
	Cum 65 este număr impar și punctajul total nu poate fi decât un număr par, obținem că nu este posibil ca Mihai, după ce a parcurs integral testul și a răspuns la toate întrebările, să obțină 65 de puncte	**1p**
	b) $4x-2(20-x)=50$, unde x este numărul răspunsurilor corecte	**2p**
	$x=15$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=2x^2-9-(4x^2+12x+9)+2x^2+13x+18$	**2p**
	$=2x^2-9-4x^2-12x-9+2x^2+13x+18=x$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $N=1+2+3+...+49=49\cdot 25$	**1p**
	$N=(7\cdot 5)^2=35^2$, aşadar N este pătratul unui număr natural	**1p**

3.	**a)** $f(1)=3\Rightarrow A(1,3)\in G_f$	**1p**
	$g(1)=3\Rightarrow A(1,3)\in G_g$	**1p**
	b) Intersecția axei Ox cu reprezentarea geometrică a graficului funcției f este punctul $B(-2,0)$, iar pentru funcția g obținem punctul $C(4,0)$, deci $BC=6$	**2p**
	Distanța de la punctul $A(1,3)$ la punctul Ox este egală cu 3, deci BC este dublul acestei distanțe	**1p**
4.	**a)** $DC \parallel AB$ și $DC \equiv CB$, deci $\sphericalangle CDB \equiv \sphericalangle CBD \equiv \sphericalangle DBA$ și cum $\sphericalangle DCB = 120°$, obținem $\sphericalangle DBA = 30°$	**1p**
	În triunghiul ABD dreptunghic în A, $\sphericalangle ABD = 30°$, deci $BD = 2\cdot AD = 12\text{cm}$	**1p**
	b) Cum DAB și DEB sunt triunghiuri dreptunghice și O este mijlocul ipotenuzei BD, rezultă $AO = EO = \frac{BD}{2} = 6\text{cm}$	**1p**
	$\Delta DAB \equiv \Delta DEB$, rezultă că $DE = AD = 6\text{cm}$	**1p**
	$P_{AOED} = 4AD = 24\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** Dacă $AD \perp BC$, $D \in BC$, atunci punctul D este mijlocul segmentului BC $\Rightarrow AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 2\sqrt{21}\text{cm}$	**1p**
	$A_{\Delta ABC} = \frac{AD\cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{21}\cdot 8}{2} = 8\sqrt{21}\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\Delta ABC \sim \Delta BDC \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{DC}$	**1p**
	Obținem $DC = 6,4\text{cm}$, deci $AD = 3,6\text{cm}$ și $P_{\Delta ABD} = AB + BD + AD = 21,6\text{cm} < 22\text{cm}$, de unde rezultă că triunghiul ABD are perimetrul mai mic decât 22cm	**2p**
6.	**a)** Considerăm punctul E mijlocul lui NC și obținem $\frac{AM}{BM} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow ME \parallel AC$	**1p**
	Așadar $\sphericalangle(MN, AC) = \sphericalangle(MN, ME) = \sphericalangle NME$ și cum MN este mediană în triunghiul echilateral MBE, deci este și bisectoare $\Rightarrow \sphericalangle NME = 30°$	**1p**
	b) $\Delta BMN \equiv \Delta CNP \equiv \Delta DPQ \equiv \Delta AQM \Rightarrow MN \equiv NP \equiv PQ \equiv MQ$	**1p**
	Cum NO și QO sunt mediane în triunghiurile isoscele MNP, respectiv MQP, situate în plane diferite $\Rightarrow NO \perp MP$ și $QO \perp MP$, de unde obținem $MP \perp (NOQ)$	**2p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 10

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Suma a două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$ poate fi egală cu:

a) 1
b) 3
c) 8
d) 9

5p **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate informații referitoare la cantitățile de fructe existente într-un magazin la începutul programului unei zile și procentul de vânzări din ziua respectivă, pentru fiecare din cele patru tipuri de fructe.

Denumire fruct	**Mere**	**Pere**	**Banane**	**Cireșe**
Cantitatea existentă la începutul programului unei zile	200 kg	150 kg	100 kg	180 kg
Procent de vânzare din ziua respectivă	20%	40%	50%	20%

Cea mai mare cantitate de fructe, vândută în ziua respectivă, a fost de:

a) mere
b) pere
c) banane
d) cireșe

5p **3.** Dintre numerele -2, 2, -4 și 4, mai mic decât -3 este numărul:

a) 4
b) 2
c) -2
d) -4

5p **4.** Scrierea fracției zecimale $1,(3)$ sub formă de fracție ordinară este:

a) $\frac{13}{10}$ **b)** $\frac{2}{15}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{13}{90}$

5p **5.** Patru elevi efectuează calculul $\left(\sqrt{2}+1\right)^2-\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul următor.

Mircea	$4\sqrt{2}$
Alina	0
Nicolae	3
Diana	$2\sqrt{2}$

Dintre cei patru elevi, cel care a efectuat corect calculul este:

a) Mircea
b) Alina
c) Nicolae
d) Diana

5p **6.** Orarul unui elev de clasa a VIII-a, pentru ziua de vineri este prezentat mai jos. Știind că orele încep la 9:00, cu Educație muzicală, că durata unei ore de curs este de 50 de minute, iar pauza este de 10 minute, precizați la cât începe ora de matematică?

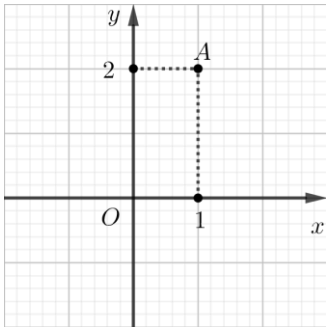
Educație muzicală
Istorie
Fizică
Matematică
Biologie

a) 10:00
b) 11:00
c) 12:00
d) 13:00

SUBIECTUL al II-lea

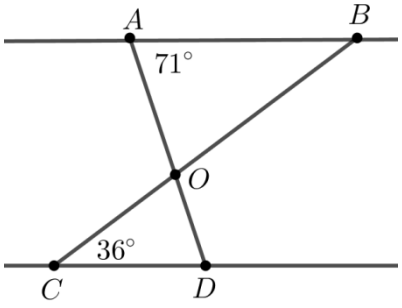
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată este reprezentat punctul $A(1,2)$ într-un sistem de axe ortogonale xOy. Coordonatele simetricului punctului A față de axa Oy sunt:



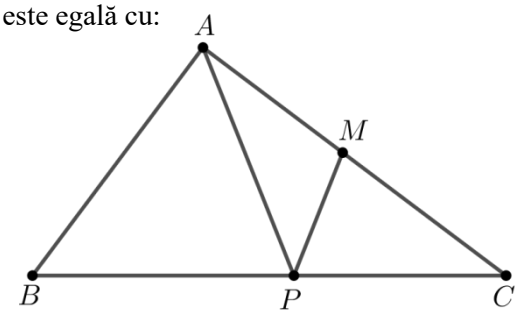
a) $(1,0)$
b) $(3,2)$
c) $(-1,-2)$
d) $(-1,2)$

5p **2.** În figura alăturată dreptele AB și CD sunt paralele. Măsura unghiului BAD este egală cu $71°$, iar măsura unghiului BCD este egală cu $36°$. Știind că segmentele AD și BC se intersectează în punctul O, atunci măsura unghiului AOB este egală cu:



a) $144°$
b) $107°$
c) $73°$
d) $36°$

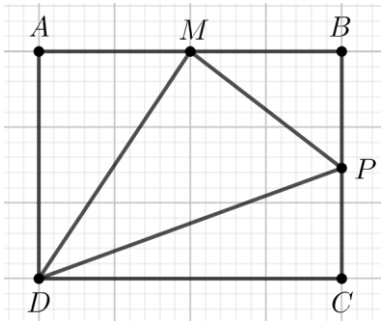
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu măsura unghiului BAC de $90°$, $AC=8\text{cm}$ și $BC=10\text{cm}$. Știind că punctul M este mijlocul laturii AC și punctul P este situat pe ipotenuza BC, astfel încât $PC=4\text{cm}$, atunci măsura unghiului APM este egală cu:



a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 75°

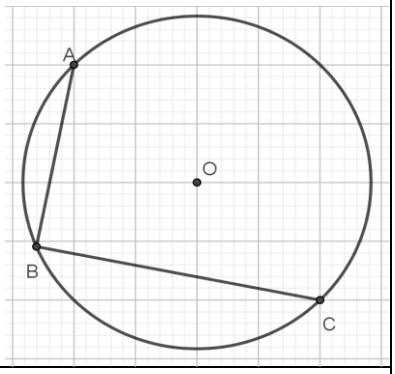
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ și punctele M și P mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Raportul dintre aria triunghiului DMP și aria dreptunghiului $ABCD$ este egal cu:

a) $\frac{1}{4}$
b) $\frac{3}{8}$
c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}$



5p **5.** Punctele A, B și C sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât $AB \perp BC$, $AB = 6$ cm și $BC = 8$ cm. Suma distanțelor de la punctul O la dreptele AB și BC este egală cu:

a) 7 cm
b) 10 cm
c) 14 cm
d) 24 cm



5p **6.** Un robinet deschis poate umple un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile de $5\,\text{m}$, $3\,\text{m}$ și $2\,\text{m}$ în 20 de ore. În câte ore poate umple același robinet un bazin în formă de cub cu latura de $3\,\text{m}$?

a) 20 de ore
b) 18 ore
c) 12 ore
d) 6 ore

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul natural $A = \overline{ab} + \overline{ba}$, unde a și b sunt cifre distincte.

(2p) a) Este posibil ca numărul A să fie egal cu 198? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul natural $\overline{ab}$, știind că $\overline{ab}$ este divizibil cu 5 și A este pătratul unui număr natural.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(x-1)^2+(x+4)(x-3)-2\left(x^2-4\right)$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $x^2+x-12=(x+4)(x-3)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Demonstrează că $E(x)=-x-3$, pentru orice număr real x.

5p

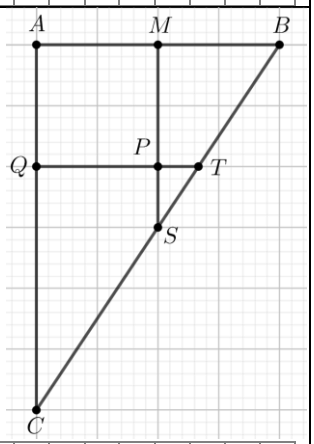
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{4}{3}x+4$.

(2p) a) Calculează $f(0)+f(-3)$.

(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină coordonatele punctelor M, situate pe axa Oy, astfel încât segmentele AB și BM să aibă aceeași lungime.

5p

4. În figura alăturată este reprezentat un pătrat $AMPQ$ cu $AM=2\text{cm}$. Punctul B se află pe dreapta AM, astfel încât M este mijlocul segmentului AB, iar punctul C este situat pe dreapta AQ, astfel încât Q aparține segmentului AC și $CQ=2\cdot AQ$.

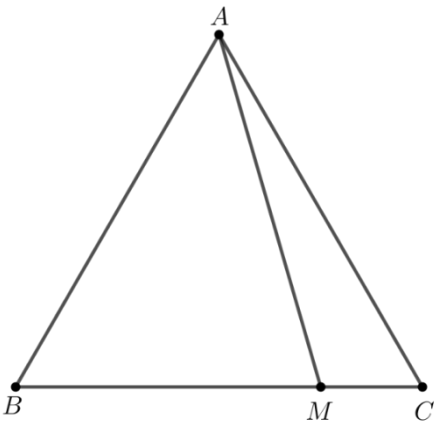


(2p) a) Arată că $BC=2\sqrt{13}\,\text{cm}$.

(3p) b) Știind că $MP \cap BC = \{S\}$ și $QP \cap BC = \{T\}$, demonstrează că $\frac{ST}{BC} = \frac{1}{6}$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC cu $AB = 8\text{cm}$. Punctul M se află pe latura BC astfel încât $MC = 2\text{cm}$.

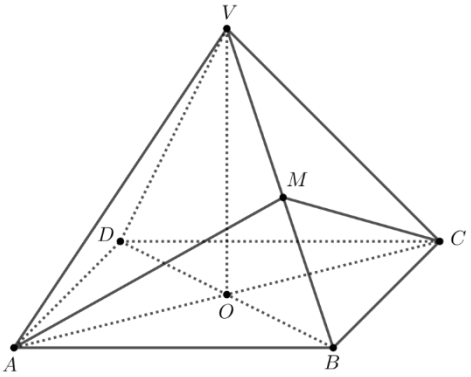
(**2p) a)** Arată că aria triunghiului AMC este egală cu $4\sqrt{3}$ cm^2.



(3p) b) Arată că suma distanțelor de la punctele B și C la dreapta AM este mai mare decât $4\sqrt{3}$ cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu $VA = AB = 6\text{cm}$, punctul M mijlocul muchiei VB și $AC \cap BD = \{O\}$.

(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului AMC este egal cu $6\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$ cm.



(3p) b) Determină tangenta unghiului dintre planele (VAB) și (VBD).

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 11

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $32:8+8\cdot 2$ este egal cu:

a) 1
b) 4
c) 20
d) 24

5p **2.** Știind că $\frac{a}{b}=\frac{c}{2}$, $b\cdot c=30$ și $b\neq 0$, valoarea numărului a este egală cu:

a) 60
b) 30
c) 15
d) 10

5p **3.** Se consideră expresia $E(x)=3-(x+2)$, unde x este număr real. Pentru $x=-2$, valoarea expresiei este egală cu:

a) 3
b) 0
c) -1
d) -3

5p **4.** În tabelul de mai jos sunt trecute volumul unui pahar mic și volumul unui pahar mare.

Pahar mic	Pahar mare
0,25 litri	0,5 litri

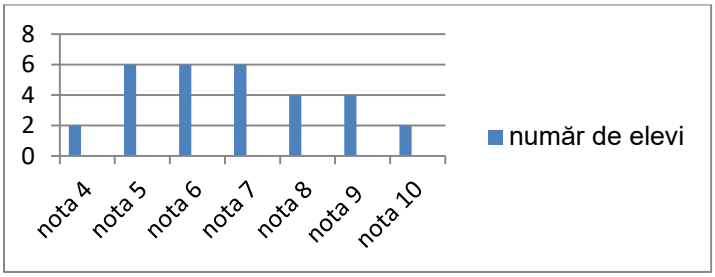
Volumul a șase pahare mici și trei pahare mari, toate pline, este egal cu:

a) 2 litri
b) 3 litri
c) 4 litri
d) 9 litri

5p **5.** Cel mai mic număr natural mai mare decât $3\sqrt{2}$ este:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

5p **6.** În graficul de mai jos sunt reprezentate rezultatele obținute la un test de matematică de elevii unei clase a VIII-a.



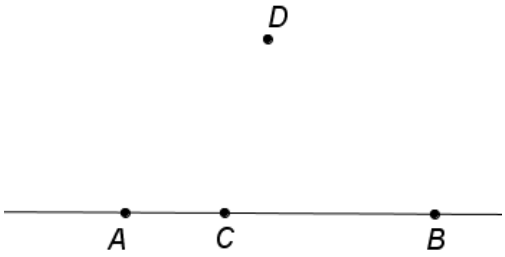
Conform graficului, numărul elevilor care au obținut cel puțin nota 8 la acest test este egal cu:

a) 4
b) 10
c) 12
d) 20

SUBIECTUL al II-lea

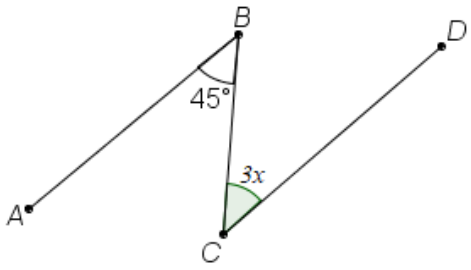
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele distincte A, B, C și D. Punctul C aparține dreptei AB și punctul D nu aparține dreptei AC. Numărul dreptelor determinate de oricare două dintre punctele A, B, C și D este egal cu:



a) 3
b) 4
c) 5
d) 6

5p **2.** În figura alăturată $AB \| CD$ și măsura unghiului ABC este de $45°$. Valoarea lui x este egală cu:

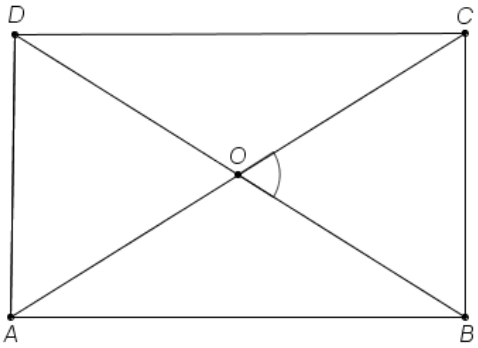


a) 15
b) 45
c) 90
d) 135

5p **3.** Diametrul unui cerc este de $22\,\text{cm}$. Lungimea cercului este egală cu:

a) $11\pi\,\text{cm}$
b) $22\pi\,\text{cm}$
c) $44\pi\,\text{cm}$
d) $121\pi\,\text{cm}$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O, $\sphericalangle BOC = 60^o$ și $AD = 10\,\text{m}$. Aria suprafeței $ABCD$ este egală cu:



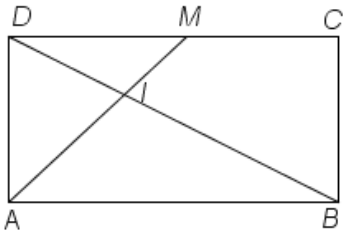
a) $50\sqrt{3}\,\text{m}^2$

b) $100\,\text{m}^2$

c) $100\sqrt{3}\,\text{m}^2$

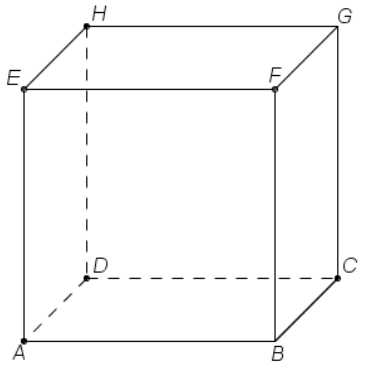
d) $200\,\text{m}^2$

5p **5.** În figura alăturată $ABCD$ este un dreptunghi, punctul M este mijlocul segmentului CD și punctul I este intersecția dreptelor BD și AM. Raportul dintre aria triunghiului DIM și aria dreptunghiului $ABCD$ este egal cu:



a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** $\frac{1}{12}$

5p **6.** În figura alăturată cubul $ABCDEFGH$ reprezintă o cutie confecționată din tablă care are muchia de $10\,\text{cm}$. Afirmația „Pentru confecționarea cutiei este suficientă o foaie de tablă cu aria de $5\,\text{dm}^2$” este:



a) adevărată

b) falsă

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Într-un bloc de locuințe sunt apartamente cu două, trei și patru camere, în total fiind 40 de apartamente care au 122 de camere. Numărul apartamentelor cu trei camere este de cinci ori mai mare decât al celor cu patru camere.

(2p) a) Este posibil ca în acest bloc să fie nouă apartamente cu trei camere ? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul de apartamente cu două camere din acest bloc.

5p **2.** Se consideră numerele: $a = 2021 - 2021^0 - (-1)^{2021}$ și $b = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}$.

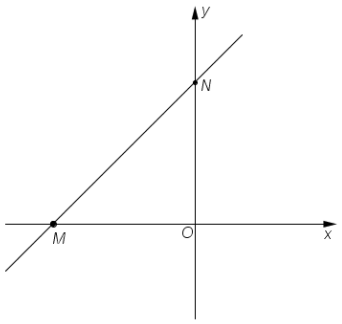
(2p) a) Arată că $a = 2021$.

(3p) b) Arată că numărul $N=\left(\left(a-b\right)^2-\left(a+b\right)^2\right)\cdot b$ este întreg.

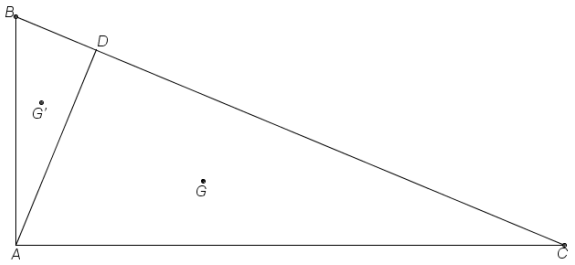
5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x+1$.

(2p) a) Arată că $f\left(1\right)+f\left(3\right)=2\cdot f\left(2\right)$.

(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele M, respectiv N. Determină coordonatele simetricului punctului M față de punctul N.



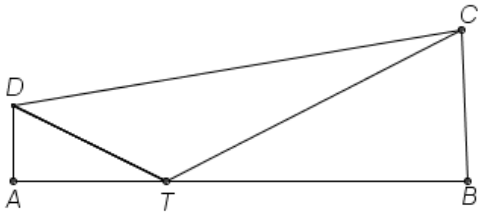
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB=10\text{cm}$, $AC=24\text{cm}$ și $BC=26\text{cm}$, punctul D reprezintă proiecția punctului A pe dreapta BC și punctele G și G' sunt centrele de greutate ale triunghiului ADC, respectiv ADB.



(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu 120cm^2.

(3p) b) Determină lungimea segmentului GG'.

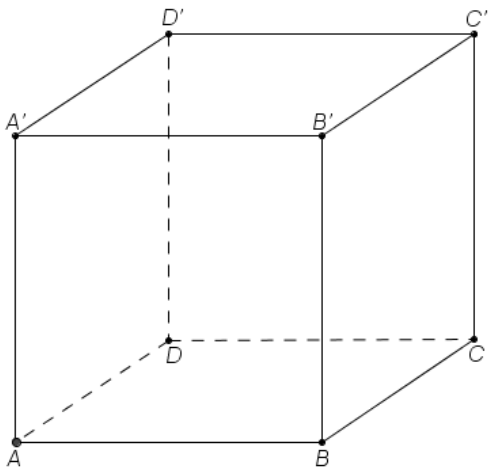
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AD \| CB$, măsura unghiului DAB este de $90°$, $AD = 10\,\text{cm}$ și $AB = 60\,\text{cm}$. Punctul T aparține segmentului AB, $AT = 20\,\text{cm}$ și unghiurile ATD și BTC sunt congruente.



(**2p) a)** Arată că sinusul unghiului BTC este egal cu $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(3p) b) Demonstrează că triunghiul BCD este isoscel.

5p **6.** În figura alăturată paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ reprezintă un acvariu cu dimensiunile $AB = 60\,\text{cm}$, $BC = 40\,\text{cm}$ și înălțimea $AA' = 60\,\text{cm}$. Apa din acvariu are adâncimea de $50\,\text{cm}$.



(2p) a) Arată că în acvariu sunt 120 de litri de apă.

(3p) b) Se consideră punctul M pe muchia BB' a paralelipipedului, astfel încât perimetrul triunghiului $A'MC$ să aibă cea mai mică valoare. Determină distanța de la punctul M la planul (ABC).

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 12

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Produsul a două numere prime este egal cu 14. Suma celor două numere prime este egală cu:

a) 2
b) 7
c) 9
d) 15

5p **2.** Într-o lădiță sunt 48 de mere roșii, verzi și galbene. Probabilitatea ca, alegând un măr din lădiță, acesta să fie roșu este egală cu $\frac{5}{8}$. Numărul de mere roșii din această lădiță este egal cu:

a) 6
b) 8
c) 30
d) 40

5p **3.** Mihai a înregistrat în tabelul următor temperaturile măsurate la aceeași oră pe parcursul unei săptămâni.

Zi	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura	–4°C	–1°C	–5°C	–2°C	0°C	1°C	–3°C

Media aritmetică a temperaturilor măsurate de Mihai, în această săptămână, la aceeași oră, este egală cu:

a) 0°C
b) –2°C
c) –5°C
d) –7°C

5p **4.** Știind că x este un număr natural, $x>1$, iar fracția $\frac{6}{x}$ este supraunitară și ireductibilă, atunci x este egal cu:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

5p **5.** Media aritmetică a numerelor $a=\sqrt{5^2-1^2}$ și $b=\frac{48}{\sqrt{6}}$ aparține intervalului:

a) $[5,6]$
b) $[10,11]$
c) $[12,13]$
d) $[15,16]$

5p **6.** În tabelul următor este prezentat numărul de elevi al fiecăreia dintre clasele V-VIII ale unei școli:

Clasa	a V-a A	a V-a B	a VI-a A	a VI-a B	a VII-a A	a VII-a B	a VIII-a A	a VIII-a B
Număr de elevi	32	30	28	31	27	32	29	31

Numărul elevilor din clasele a VIII-a din această școală reprezintă $p\%$ din numărul total al elevilor școlii. Valoarea lui p este egală cu:

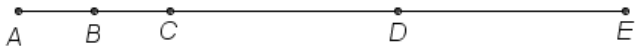
a) 25
b) 29
c) 31
d) 60

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

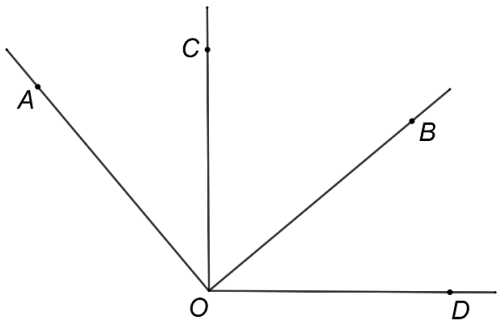
5p **1.** În figura alăturată, pe segmentul AE se consideră punctul C astfel încât $AC < CE$, iar punctele B și D sunt mijloacele segmentelor AC, respectiv CE. Dintre următoarele afirmații, cea adevărată este:

a) $AC < BD < CE$
b) $BD < AC < CE$
c) $AC < CE < BD$
d) $AC = BD = CE$

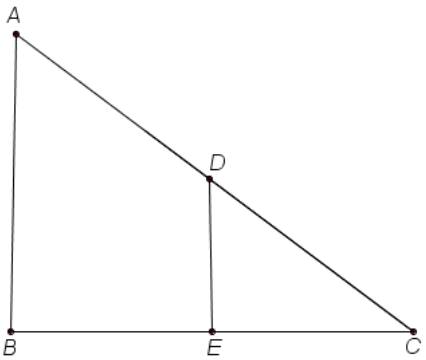


5p **2.** În figura alăturată este reprezentat unghiul drept AOB, bisectoarea OC a acestuia și semidreapta OD astfel încât semidreapta OB este bisectoarea unghiului COD. Măsura unghiului BOD este egală cu:

a) 90°
b) 50°
c) 45°
d) 40°

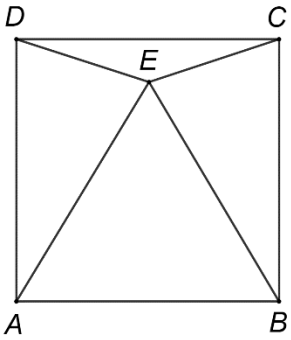


5p **3.** În figura alăturată, segmentele AB, AC și CB reprezintă alei într-un parc, unde dreptele AB și BC sunt perpendiculare. Ana și Dan ocupă inițial pozițiile A, respectiv D, unde D este mijlocul segmentului AC. Din pozițiile inițiale, Ana ajunge în punctul B și Dan parcurge segmentul DE, unde $DE \| AB$, ajungând în punctul E. Raportul dintre distanța parcursă de Dan și cea parcursă de Ana este egal cu :



a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{2}{3}$

5p **4.** Figura alăturată reprezintă schița unei grădini în formă de pătrat $ABCD$ cu latura $AB=10\,\text{cm}$. Pe suprafața corespunzătoare triunghiului echilateral AEB sunt plantate begonii, pe suprafața corespunzătoare triunghiului DEC sunt plantate crizanteme, iar pe suprafețele corespunzătoare triunghiurilor AED și BEC sunt plantate panseluțe, E fiind un punct din interiorul pătratului $ABCD$. Aria suprafeței totale cultivate cu panseluțe este:

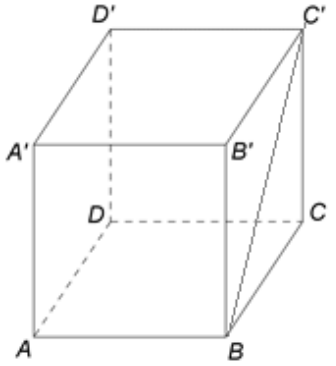


a) mai mare decât suma ariilor suprafețelor cultivate cu begonii și cu crizanteme
b) mai mică decât suma ariilor suprafețelor cultivate cu begonii și cu crizanteme
c) egală cu suma ariilor suprafețelor cultivate cu begonii și cu crizanteme
d) egală cu o treime din aria suprafeței întregii gradini

5p **5.** Diametrul unui cerc cu lungimea de $10\pi\,\text{cm}$ este egal cu:

a) $5\,\text{cm}$
b) $10\,\text{cm}$
c) $20\,\text{cm}$
d) $25\,\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$, cu lungimea segmentului BC' egală cu $4\sqrt{2}\,\text{cm}$. Aria totală a cubului $ABCDA'B'C'D'$ este egală cu:



a) $16\,\text{cm}^2$
b) $64\,\text{cm}^2$
c) $96\,\text{cm}^2$
d) $192\,\text{cm}^2$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** O florărie are la vânzare lalele și trandafiri, dar prețurile acestora nu sunt afișate. Anastasia întreabă vânzătorul despre prețuri. Acesta îi propune să afle singură prețurile care o interesează, spunându-i că cinci fire de lalele și patru fire de trandafiri costă împreună 43 de lei, iar două fire de lalele și trei fire trandafiri costă împreună 27 de lei.

(2p) a) Anastasia face afirmația următoare: „Prețul unui fir de trandafir este de 10 lei.”. Este această afirmație adevărată? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină prețul unui fir de trandafir pe care îl are spre vânzare florăria.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(1+2\sqrt{3}x\right)\left(2\sqrt{3}x-1\right)-2(2x+1)^2-(4x+1)(x-3)+1-x$, unde x este număr real.

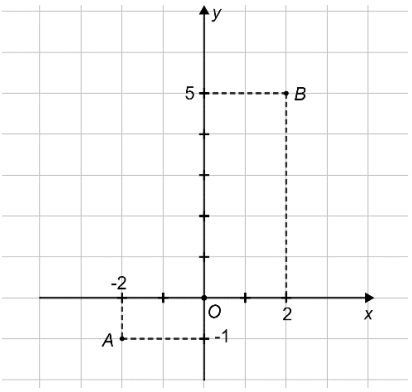
(3p) a) Arată că $E(x)=2x+1$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină numerele naturale a pentru care $E(a)\leq 3\sqrt{5}$.

5p

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3}{2}x+2$.

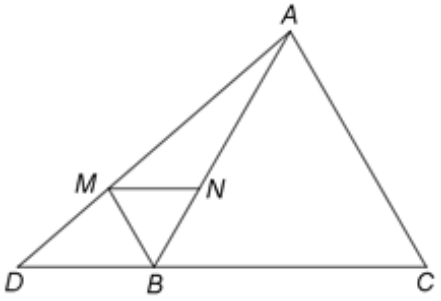
(2p) a) Arată că $f(-2)+f(2)=4$.



(3p) b) Se consideră punctele $A(-2,-1)$ și $B(2,5)$ care aparțin reprezentării geometrice a graficului funcției f. Determină coordonatele punctului $M(x,y)$ situat pe axa Oy a sistemului de axe ortogonale xOy, astfel încât suma lungimilor segmentelor MA și MB să fie minimă.

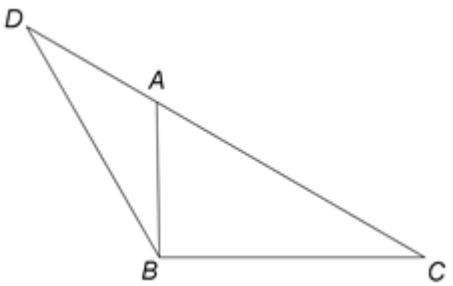
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral ABC cu $AB=12$ cm și punctul D este situat pe dreapta BC astfel încât $BC=2BD$ și punctul B aparține segmentului CD. Semidreapta BM, $M\in AD$, este bisectoarea unghiului ABD și N este punctul de intersecție dintre AB și paralela prin M la BC.

(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.



(3p) b) Demonstrează că triunghiurile BMN și ABC sunt asemenea.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi DBC cu $BC = BD = 6\text{cm}$ și $DC = 6\sqrt{3}\text{cm}$. Punctul A este situat pe latura DC astfel încât $AC = 4\sqrt{3}\text{cm}$.

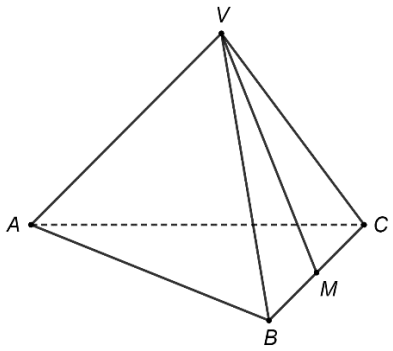


(**2p) a)** Arată că măsura unghiului C este egală cu $30°$.

(3p) b) Demonstrează că triunghiul ABD este isoscel.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu baza triunghiul ABC. Punctul M este mijlocul segmentului BC, $AB=18\text{cm}$ și $VA=9\sqrt{2}\,\text{cm}$.

(2p) a) Arată că măsura unghiului dintre dreapta VM şi dreapta AC este egală cu $60°$.



(3p) b) Determină distanța de la punctul M la planul (VAC).

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 13

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Suma tuturor numerelor naturale, care sunt divizori ai numărului 20, este egală cu:

a) 8
b) 20
c) 21
d) 42

5p **2.** Știind că a și b sunt numere reale și $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$, expresia $1,5\cdot a-b$ este egală cu:

a) $-0,5$ **b)** 0 **c)** $1,5$ **d)** $3,5$

5p **3.** Două turnuri au înălțimile de $120\,\text{m}$, respectiv $10\,\text{dam}$. Diferența pozitivă a înălțimilor celor două turnuri este egală cu:

a) $119\,\text{m}$
b) $110\,\text{m}$
c) $20\,\text{m}$
d) $2\,\text{m}$

5p **4.** Se consideră numărul rațional $1,(3)$. Aproximarea prin lipsă la sutimi a acestui număr este egală cu:

a) $1,30$
b) $1,33$
c) $1,34$
d) $1,40$

5p **5.** Se consideră numărul real $a=-\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$. Patru elevi au calculat a^{2021} și au scris rezultatele în tabelul următor.

Andrei	0
Valentina	1
Mihai	-1
Rada	2021

Dintre cei patru elevi, cel care a scris rezultatul corect este:

a) Andrei
b) Valentina
c) Mihai
d) Rada

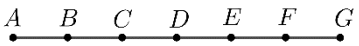
5p **6.** Un biciclist s-a deplasat cu viteza de 15 km/h pe o distanță de 6 km. Un pieton s-a deplasat cu viteza de $3\,\text{km/h}$ pe o distanță de 1 km. Afirmația „Timpul de deplasare a biciclistului este egal cu timpul de deplasare a pietonului.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

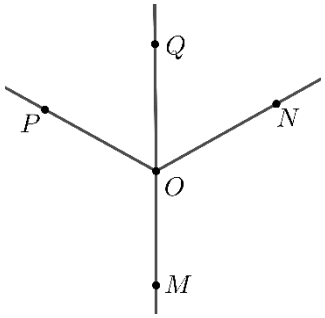
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate, în această ordine, punctele coliniare A, B, C, D, E, F și G, astfel încât $AB = BC = CD = DE = EF = FG = 2$ cm. Distanța dintre simetricul punctului E față de punctul C și simetricul punctului E față de punctul F este egală cu:



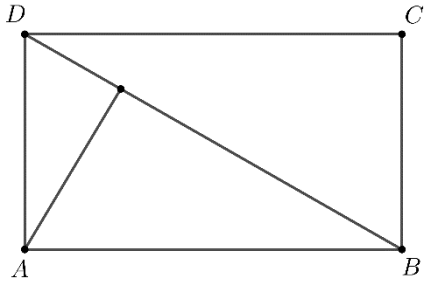
a) 6 cm
b) 8 cm
c) 10 cm
d) 12 cm

5p **2.** În figura alăturată $\sphericalangle MON$, $\sphericalangle NOP$ și $\sphericalangle POM$ sunt unghiuri congruente în jurul punctului O, iar semidreapta OQ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle NOP$. Măsura complementului unghiului POQ este egală cu:



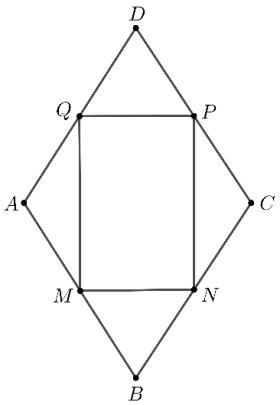
a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°

5p **3.** În figura alăturată dreptunghiul $ABCD$ reprezintă schița unui parc în care $AB = 40$ m și $BD = 2 \cdot AD$. Știind că în vârful A este plantat un copac, distanța de la baza copacului la aleea BD este egală cu:

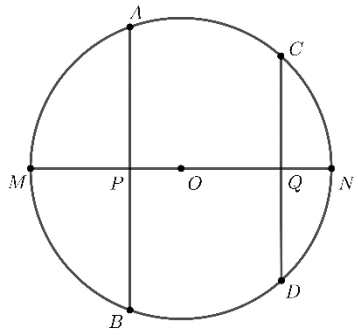


a) 10 m
b) 20 m
c) 25 m
d) 30 m

5p **4.** Figura alăturată reprezintă schița unei grădini având forma unui romb $ABCD$ cu $AB = 100$ m și $\sphericalangle ABC = 60°$. Pe suprafața delimitată de patrulaterul $MNPQ$, ale cărui vârfuri sunt mijloacele laturilor rombului dat, sunt cultivate flori, iar restul suprafeței grădinii este acoperit cu gazon. Aria suprafeței grădinii, acoperite de gazon, este egală cu:



a) $50\sqrt{3}\,\text{m}^2$
b) $250\sqrt{3}\,\text{m}^2$
c) $500\sqrt{3}\,\text{m}^2$
d) $2500\sqrt{3}\,\text{m}^2$

5p	**5.** În figura alăturată AB și CD sunt două coarde perpendiculare pe diametrul MN al cercului de centru O, acestea intersectând MN în punctele P, respectiv Q, astfel încât $OP < OQ$. Patrulaterul convex cu vârfurile în punctele A, B, C și D reprezintă: **a)** un trapez dreptunghic **b)** un trapez isoscel **c)** un dreptunghi **d)** un pătrat 
5p	**6.** Mihai are la dispoziție 216 cubulețe cu muchia de 10 cm, pe care le lipește obținând un cub ale cărui fețe le vopsește. Volumul total al cubulețelor care au exact 3 fețe vopsite este egal cu: **a)** $3\ \text{dm}^3$ **b)** $4\ \text{dm}^3$ **c)** $6\ \text{dm}^3$ **d)** $8\ \text{dm}^3$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Mihai și Ana rezolvă probleme din ultimul număr publicat al revistei *Gazeta Matematică*. Se știe că Ana a rezolvat cu două probleme mai mult decât Mihai. **(2p) a)** Dacă problemele rezolvate de cei doi sunt diferite, este posibil ca numărul total de probleme rezolvate de Mihai și Ana să fie 15? Justifică răspunsul. **(3p) b)** Știind, că numărul problemelor rezolvate de Mihai reprezintă $\frac{3}{4}$ din numărul problemelor rezolvate de Ana, determină numărul problemelor rezolvate de Ana.

5p

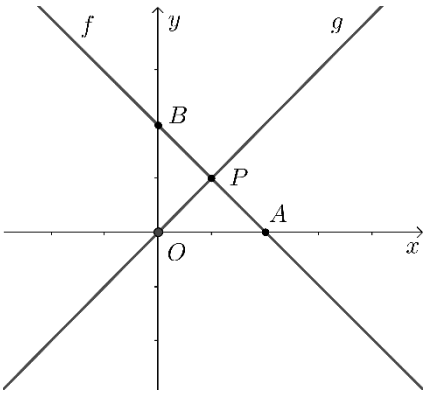
2. Se consideră expresia $E(x)=(2x+1)^2+(2x-1)^2-4\left(2x^2-1\right)$, unde x este număr real.

(2p) a) Calculează $E(10)$.

(3p) b) Determină cel mai mic număr natural nenul n pentru care $n\cdot E(10)\cdot E(11)\cdot ...\cdot E(100)$ este pătratul unui număr natural.

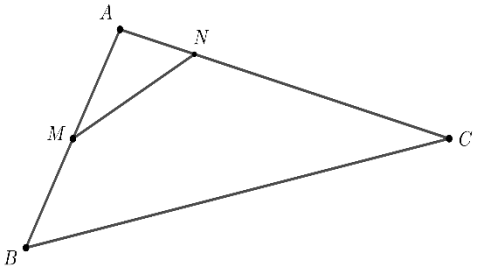
5p **3.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+2$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x$

(2p) a) Argumentează că $P(1,1)$ este punctul de intersecție al reprezentărilor geometrice ale graficelor celor două funcții.



(3p) b) Calculează distanța de la originea $O(0,0)$ a sistemului de axe ortogonale *xOy* la reprezentarea geometrică a graficului funcției f.

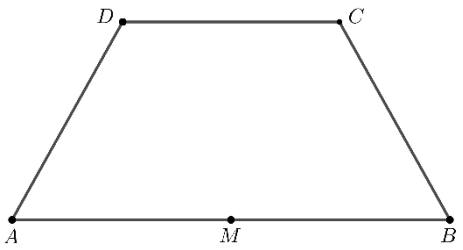
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC cu $AB=6\text{cm}$, $AC=9\text{cm}$ și $BC=12\text{cm}$, iar M este mijlocul segmentului AB și N este un punct ce aparține segmentului AC, astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ANM$.



(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului AMN este egal cu 9cm.

(3p) b) Demonstrează că aria patrulaterului $BMNC$ reprezintă $\frac{8}{9}$ din aria triunghiului ABC.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \| CD$. Punctul M este mijlocul bazei mari AB și $AM = AD = CD = 12$ cm.

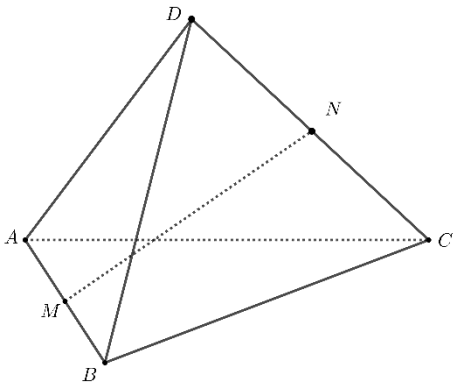


(**2p) a)** Arată că aria trapezului $ABCD$ este egală cu $108\sqrt{3}$ cm^2.

(3p) b) Demonstrează că bisectoarea unghiului BAD este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** O cutie de bomboane de forma unui tetraedru regulat $ABCD$, cu muchia de lungime $12\,\text{cm}$, este reprezentată în figura alăturată. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv CD.

(2p) a) Arată că MN are lungimea mai mică decât $5\sqrt{3}\,\text{cm}$.



(3p) b) Determină cosinusul unghiului dintre planele (ABN) și (ABC).

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 14

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Numărul natural de forma $\overline{2x}$ divizibil cu 6 este:

a) 28

b) 26

c) 24

d) 22

5p **2.** În tabelul de mai jos sunt prezentate informații referitoare la temperatura înregistrată în patru zile, la ora 8:00, respectiv ora 12:00.

	8:00	**12:00**
Luni	4^0C	8^0C
Marţi	3^0C	9^0C
Miercuri	4^0C	16^0C
Joi	6^0C	18^0C

Zilele pentru care raportul dintre temperatura înregistrată la ora 8:00 și temperatura înregistrată la ora 12:00 are aceeași valoare sunt:

a) Luni şi Miercuri

b) Luni şi Joi

c) Marţi şi Miercuri

d) Marţi şi Joi

5p **3.** Vârful Omu din Munţii Bucegi are altitudinea de 2505m. Marea Neagră are o adâncime medie de 1271m. Valoarea absolută a diferenţei dintre adâncimea medie a Mării Negre şi altitudinea vârfului Omu este egală cu:

a) 3776m

b) -3776m

c) 1234m

d) -1234m

5p **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel care reprezintă numai fracţii ordinare subunitare este:

a) $\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{4}{3},\frac{6}{8},\frac{1}{3},\frac{5}{7}$

b) $\frac{10}{13},\frac{1}{5},\frac{2}{3},\frac{15}{8},\frac{2}{7},\frac{3}{10}$

c) $\frac{1}{4},\frac{9}{15},\frac{6}{11},\frac{7}{8},\frac{6}{5},\frac{5}{7}$

d) $\frac{5}{9},\frac{3}{8},\frac{2}{7},\frac{10}{11},\frac{4}{13},\frac{5}{7}$

5p **5.** Patru elevi, Radu, Alexandru, Vlad și Eva, calculează media geometrică a numerelor $8\sqrt{3}$ și $3\sqrt{3}$. Rezultatele obținute sunt înregistrate în tabelul următor.

Radu	$2\sqrt{6}$
Alexandru	$6\sqrt{2}$
Vlad	$4\sqrt{3}$
Eva	$6\sqrt{3}$

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică a celor două numere este:

a) Radu

b) Alexandru

c) Vlad

d) Eva

5p **6.** Elevii unei clase au obţinut la un test notele prezentate în tabelul de mai jos:

Nota	**10**	**9**	**8**	**7**	**6**	**5**	**4**
Număr elevi	2	2	6	7	5	1	1

Un elev afirmă că ”media notelor obținute de elevii clasei este egală cu 7,30”. Afirmaţia făcută este:

a) adevărată

b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate, în această ordine, punctele coliniare A, B, C. Ştiind că punctele M și N, sunt mijloacele segmentelor AB respectiv BC, $AB=2\text{cm}$ și $BC=4\text{cm}$, lungimea segmentului MN este egală cu:

a) 1cm

b) 2cm

c) 3cm

d) 4cm

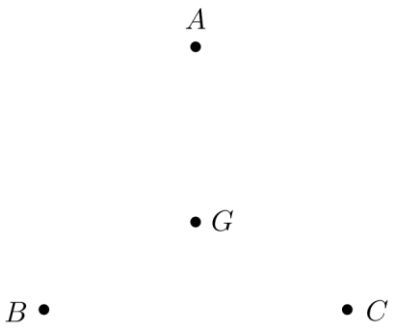
5p **2.** În figura alăturată punctele A, B, C se găsesc la distanţe egale unul faţă de celălalt, respectiv la distanţe egale faţă de punctul G. Măsura unghiului BGC este egală cu:

a) 90°

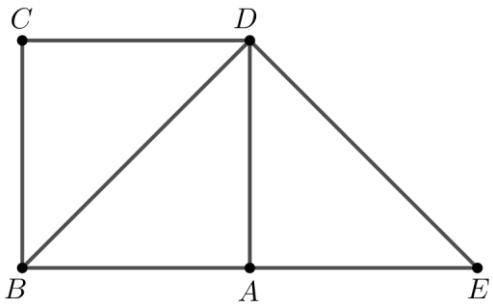
b) 120°

c) 130°

d) 150°



5p **3.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ de latură 3cm. Perpendiculara în D pe diagonala BD a pătratului $ABCD$ intersectează dreapta AB în punctul E. Perimetrul triunghiul DBE este egal cu:



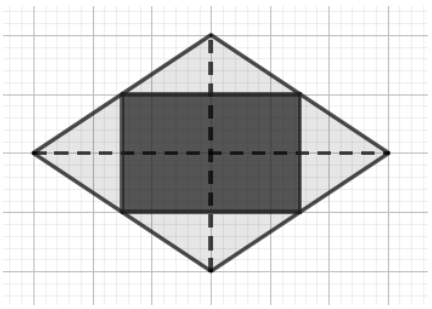
a) 9cm

b) $3\left(2+\sqrt{2}\right)\text{cm}$

c) 18cm

d) $6\left(1+\sqrt{2}\right)\text{cm}$

5p **4.** Figura alăturată reprezintă schița unei fețe de masă în formă de romb cu lungimile diagonalelor de 60 cm și de 80 cm. Pe fața de masă este cusută o broderie în formă de dreptunghi, care are vârfurile în mijloacele laturilor feței de masă. Valoarea raportului dintre suprafața broderiei și suprafața feței de masă este:



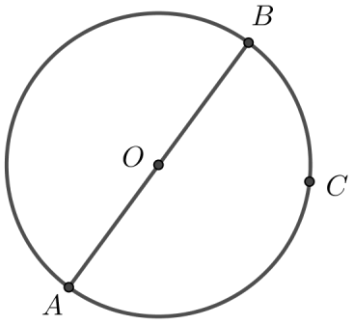
a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{2}$

5p **5.** În figura alăturată punctele A și B sunt situate pe cercul de centru O și sunt diametral opuse, iar punctul C aparține cercului dat astfel încât $AC=2\sqrt{3}\text{cm}$ și $BC=OC$. Aria triunghiului BOC este egală cu:



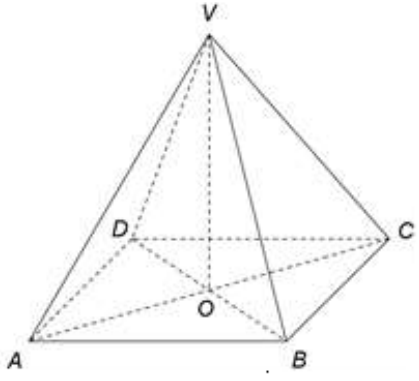
a) $\sqrt{3}\text{cm}$

b) 6cm

c) 8cm

d) $6\sqrt{3}\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramida patrulateră $VABCD$ cu $ABCD$ pătrat, $AB=12\text{cm}$ și înălțimea $VO=8\text{cm}$. Volumul piramidei $VABCD$ este egal cu:



a) 96cm^3

b) 144cm^3

c) 384cm^3

d) 1152cm^3

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un automobil a parcurs un drum în trei zile, astfel: în prima zi a parcurs 35% din lungimea drumului, în a doua zi 20% din lungimea drumului rămas, iar în a treia zi restul de 624 km.

(2p) a) Este adevărat că automobilul a parcurs în primele două zile jumătate din lungimea drumului? Justifică răspunsul dat.

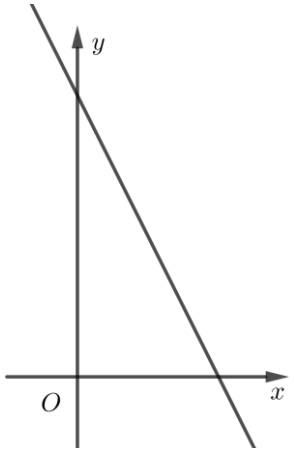
(3p) b) Determină în care dintre cele trei zile automobilul a parcurs cei mai multi kilometri.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(x+2021)^2-10(x+2021)+21$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Demonstrează că $E(-2018)\cdot E(-2019)\cdot E(-2020)\cdot E(-2021)=0$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x+8$.

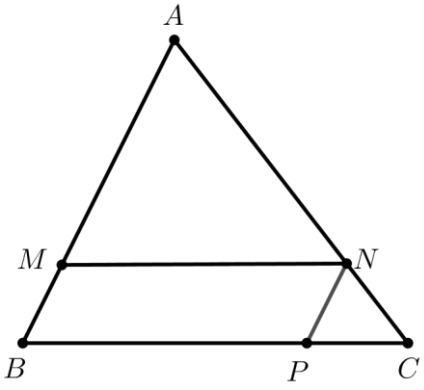


(2p) a) Determină numărul real a, ştiind că punctul $A(a,2a)$ aparține graficului funcției f.

(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctul $A(2,4)$, iar B este punctul de intersecţie al graficului funcţiei f cu axa Oy. Determină lungimea segmentului AB.

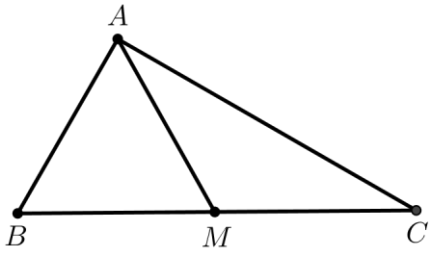
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC. Pe latura AB a triunghiului se consideră punctul M și se construiește paralela MN la dreapta BC, cu $N\in AC$. Paralela prin N la dreapta AB intersectează pe BC în punctul P.

(2p) a) Arată că $MN\cdot AC=BC\cdot AN$.



(3p) b) Demonstrează că $\frac{BP}{BC}+\frac{BM}{AB}=1$.

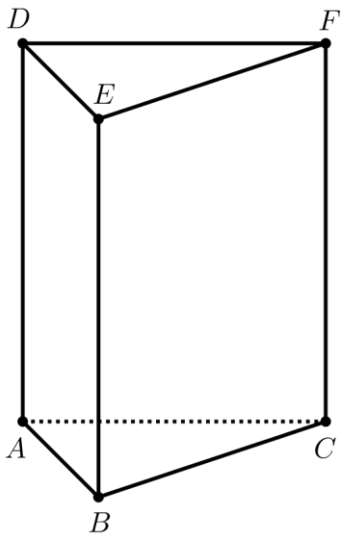
5p **5.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Punctul M este mijlocul segmentului BC, măsura unghiului ACB este de 30° și $AB=6\text{cm}$.



(**2p) a)** Arată că perimetrul triunghiului ABM este egal cu 18cm.

(3p) b) Arată că aria triunghiului AMC este mai mică decât $16\,\text{cm}^2$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma dreapta $ABCDEF$, cu baza triunghiul echilateral ABC, iar $AB=12\,\text{cm}$ și $AD=18\,\text{cm}$.



(2p) a) Arată că aria totală a prismei este mai mare decât $720\,\text{cm}^2$.

(3p) b) Se consideră punctul A' din planul (BCD) astfel încât $AA'=9\text{cm}$. Determină măsura unghiului dintre dreptele AA' și EF.

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 15

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p 1. Cel mai mic număr par de ordinul zecilor, format cu cifre identice, este numărul:

a) 10
b) 11
c) 22
d) 98

5p **2.** Numărul care reprezintă $\frac{3}{4}$ din 1600 este egal cu:

a) 120
b) 1200
c) $\frac{6400}{3}$
d) 4800

5p **3.** Patru elevi propun câte un exercițiu de calcul. În tabelul de mai jos sunt scrise numele elevilor și exercițiile propuse de aceștia.

Alina	$-3+(-4)$
Mihai	$-3+4$
Daria	$-(-3)+4$
Vlad	$+3-4$

Conform informațiilor din tabel, prin rezolvarea corectă a calculelor, rezultatul care reprezintă cel mai mic număr corespunde exercițiului propus de:

a) Alina
b) Mihai
c) Daria
d) Vlad

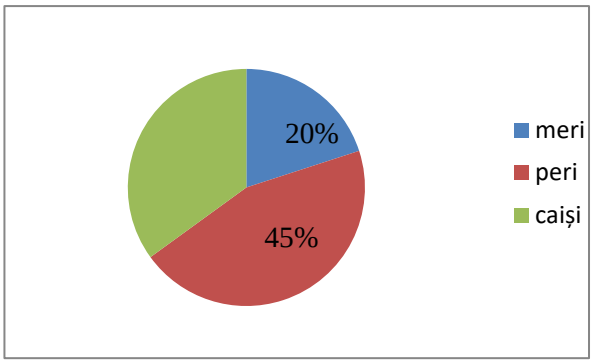
5p **4.** Șase caiete tip dictando și cinci caiete de matematică costă 15 lei, iar șase caiete tip dictando și două caiete de matematică costă $11,4$ lei. Prețul unui caiet de matematică este de:

a) $1,2$ lei
b) $1,5$ le
c) $2,1$ lei
d) $3,6$ lei

5p **5.** Numărul $2\sqrt{7}$ aparține intervalului de numere reale:

a) $(2,3)$
b) $[3,4]$
c) $[4,5)$
d) $(5,6)$

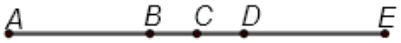
5p	**6.** Într-o livadă sunt 300 de pomi fructiferi de trei tipuri: meri, peri și caiși. În diagrama de mai jos este reprezentată distribuția celor 300 de pomi fructiferi în funcție de tipul acestora. Conform diagramei, numărul caișilor din livadă este egal cu: **a)** 60 **b)** 105 **c)** 135 **d)** 150 **e)**



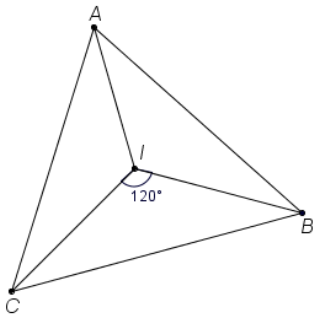
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

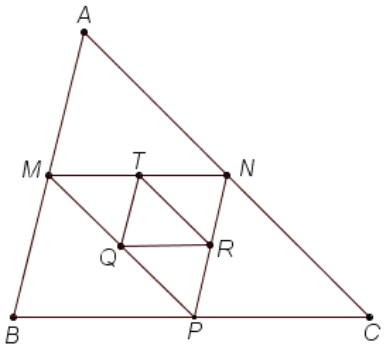
5p	**1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, D și E, distincte, în această ordine, astfel încât punctul C este mijlocul segmentului AE și, respectiv, al segmentului BD. Dintre afirmațiile următoare, cea adevărată este: **a)** $AC-CD>DE$ **b)** $AC-CD<DE$ **c)** $AC-CD=DE$ **d)** $AC+CD=DE$



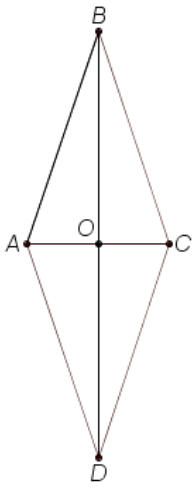
5p	**2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC. Punctul I este punctul de intersecție a bisectoarelor unghiurilor acestui triunghi. Știind că măsura unghiului BIC este egală cu $120°$, atunci măsura unghiului BAI este: **a)** 30° **b)** 60° **c)** 90° **d)** 120°



5p	**3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC. Punctele M, N și P sunt mijloacele laturilor AB, AC, respectiv BC, iar punctele Q, R și T sunt mijloacele segmentelor MP, NP, respectiv MN. Raportul dintre perimetrul triunghiului QRT și perimetrul triunghiului ABC este egal cu: **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **d)** $\frac{1}{12}$

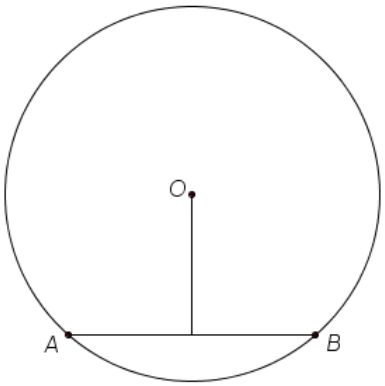


5p **4.** Se consideră rombul $ABCD$ în care diagonalele AC și BD se intersectează în punctul O. Perimetrul rombului este egal cu $100\,\text{cm}$, iar distanța de la punctul A la dreapta BC este egală cu $24\,\text{cm}$. Aria suprafeței triunghiului AOB este egală cu:



a) $2400\,\text{cm}^2$
b) $600\,\text{cm}^2$
c) $300\,\text{cm}^2$
d) $150\,\text{cm}^2$

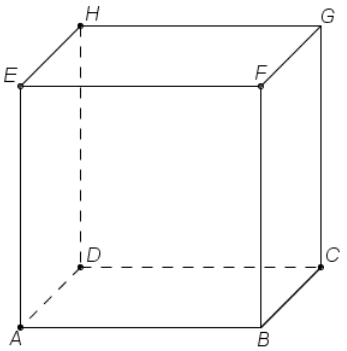
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și punctele A și B care aparțin acestui cerc. Lungimea segmentului AB este de $8\,\text{cm}$ și distanța de la centrul cercului la dreapta AB este de $3\,\text{cm}$. Lungimea acestui cerc este egală cu:



a) $25\pi\,\text{cm}$
b) $10\pi\,\text{cm}$
c) $8\pi\,\text{cm}$
d) $5\pi\,\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ care are dimensiunile: $AB=2\sqrt{2}\,\text{cm}$, $BC=3\sqrt{3}\,\text{cm}$ și $AE=5\,\text{cm}$.

Afirmația „Patrulaterul $ACGE$ este pătrat.” este:



a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Bunica Mariei are în ograda sa iepuri, găini și rațe. În total, în ogradă sunt 69 de animale care au 198 de picioare. Numărul găinilor este cu 11 mai mare decât al rațelor.

(2p) a) Pot fi în ograda bunicii Mariei 35 de iepuri? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul găinilor din ograda bunicii Mariei.

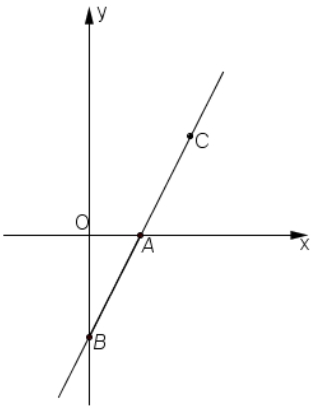
5p **2.** Se consideră numerele: $a=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$ și $b=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)\cdot\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(2p) a) Arată că $a=\frac{5}{6}$.

(3p) b) Arată că numărul $N=2a-5b$ este natural.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-3$.

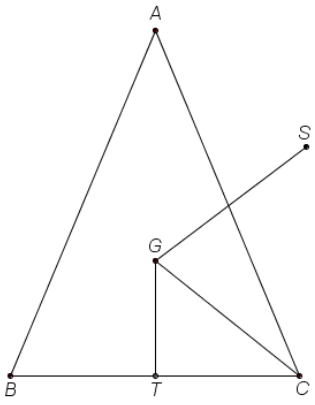
(2p) a) Arată că: $f(2)+f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(2\cdot\frac{1}{2}\right)$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Punctul C aparține reprezentării grafice a funcției f astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC. Calculează suma distanțelor de la punctul C la axele de coordonate.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $AB\equiv AC$, $BC=20\,\text{cm}$, punctul G reprezintă centrul de greutate al triunghiului ABC, punctul T este mijlocul segmentului BC și $GT=8\,\text{cm}$. Punctul S este simetricul punctului G față de mijlocul segmentului AC.

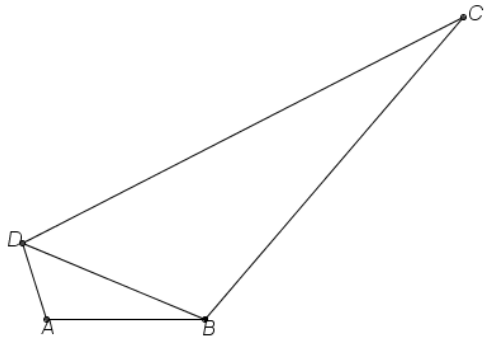
(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $72\,\text{cm}$.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul S la dreapta CG.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat patrulaterul $ABCD$ cu $AB=8\text{cm}$, $BC=20\text{cm}$, $CD=25\text{cm}$, $AD=4\text{cm}$ și $BD=10\text{cm}$.

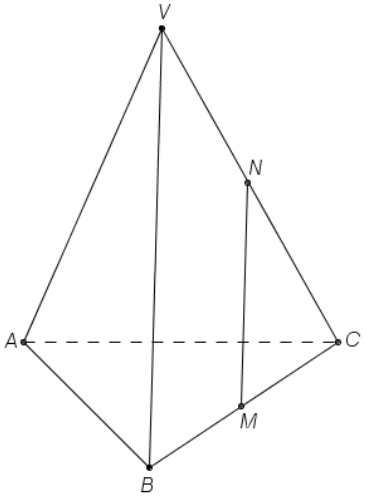
(**2p) a)** Arată că raportul dintre sinusul unghiului ADB și sinusul unghiului ABD este egal cu 2.



(3p) b) Demonstrează că semidreapta DB este bisectoarea unghiului ADC.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza triunghiul ABC, $AB=6\text{cm}$, $VA=10\text{cm}$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv VC.

(2p) a) Arată că aria laterală a piramidei este egală cu $9\sqrt{91}\text{cm}^2$.



(3p) b) Determină lungimea proiecției segmentului MN pe planul (VAB).

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 1

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	a)	**5p**
2.	c)	**5p**
3.	d)	**5p**
4.	a)	**5p**
5.	b)	**5p**
6.	a)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	c)	**5p**
2.	a)	**5p**
3.	c)	**5p**
4.	b)	**5p**
5.	b)	**5p**
6.	b)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În urmă cu opt ani tatăl avea $36-8=28$ de ani, iar fiul avea $28:7=4$ ani , deci, în prezent fiul are $4+8=12$ ani	**2p**
	$36:12=3$, deci, în prezent, vârsta fiului este de trei ori mai mică decât vârsta tatălui	**1p**
	b) $36+x=2(12+x)$, unde x reprezintă numărul anilor care vor trece până când vârsta tatălui va fi egală cu dublul vârstei fiului	**1p**
	$x=12$ ani	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\left((x+1)+(x-2)\right)^2=$	**1p**
	$=(2x-1)^2$	**1p**
	b) $E(\sqrt{2})=9-4\sqrt{2}$	**1p**
	$E(\sqrt{2})+a\sqrt{2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow 9+(a-4)\sqrt{2}\in\mathbb{N}$, de unde rezultă că $a=4\in\mathbb{N}$	**2p**

3.	**a)** $x=\left(\frac{8}{3\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}=\left(\frac{8}{3\sqrt{2}}+\frac{18}{3\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}$	**1p**
	$=\frac{26}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}=\frac{2}{3}$	**1p**
	b) $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{5}{7\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{14}{\sqrt{3}}=\left(\frac{7}{7\sqrt{3}}-\frac{5}{7\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{2}{7\sqrt{3}}\cdot\frac{14}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}$	**2p**
	$x+y=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}=\frac{6}{3}=2\in\mathbb{N}$	**1p**
4.	**a)** ΔAEB este dreptunghic isoscel, deci $\sphericalangle BAE=45^\circ$	**1p**
	Cum $FD=DC$ și $DC=AD$, ΔADF este dreptunghic isoscel, deci $\sphericalangle FAD=45^\circ$ $\sphericalangle FAE=\sphericalangle FAD+\sphericalangle DAB+\sphericalangle BAE=45^\circ+90^\circ+45^\circ=180^\circ$, deci punctele E, A și F sunt coliniare	**1p**
	b) $\sphericalangle ABD=45^\circ\Rightarrow\sphericalangle ABD\equiv\sphericalangle EAB$, deci $AE\|\|BD$ și, cum $DO=\frac{BD}{2}=4\sqrt{2}$cm, unde $\{O\}=AC\cap BD\Rightarrow DO=AE$, obținem $ADOE$ este paralelogram	**2p**
	$\{P\}=DE\cap AO$ și DE, AO sunt diagonale în paralelogram, deci P este mijlocul segmentului DE	**1p**
5.	**a)** ΔEBC este dreptunghic în B, $BA\perp EC$ de unde rezultă că BA=$\sqrt{AE\cdot AC}=\sqrt{16}=4$cm	**2p**
	b) ΔABC este dreptunghic în A, de unde rezultă că $BC^2=AB^2+AC^2\Rightarrow BC=4\sqrt{5}$cm	**1p**
	ΔEAB este dreptunghic în A, deci $EB^2=EA^2+AB^2\Rightarrow EB=2\sqrt{5}$cm $P_{\Delta BCE}=2\sqrt{5}+4\sqrt{5}+10=2(3\sqrt{5}+5)$cm și, cum $6\sqrt{5}<18\Leftrightarrow\sqrt{5}<3\Leftrightarrow\sqrt{5}<\sqrt{9}$, obținem că triunghiul BCE are perimetrul mai mic decât 28cm	**2p**
6	**a)** $D'D\perp(ABC)$ de unde rezultă că $\sphericalangle((D'B,(ADC))=\sphericalangle(D'B,DB)=\sphericalangle D'BD$	**1p**
	$\Delta D'DB$ este dreptunghic D, $\cos(\sphericalangle D'DB)=\frac{DB}{D'B}=\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$	**1p**
	b) $ADD'A'$ - pătrat, $A'D\cap AD'=\{O\}$, de unde rezultă $A'O\perp AD'$	**2p**
	$C'D'\perp(ADD')$, $A'O\subset(ADD')\Rightarrow C'D'\perp A'O$, cum $AD'\cap C'D'=\{D'\}\Rightarrow$ distanța de la A' la planul ($(BC'D')$ este $A'O$	
	$A'O=3\sqrt{2}$cm	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Automobilul a parcurs în a treia zi $\frac{3}{5}$ din distanța rămasă după prima zi	**1p**
	În a doua zi a parcurs $\frac{2}{3}$ din 93km, adică 62 km, deci distanța parcursă în a doua zi nu poate să fie egală cu 60 km	**1p**
	b) $\frac{3}{10}x+13$ este distanța parcursă în prima zi, unde x este distanța dintre cele două orașe	**1p**
	$\left(\frac{3}{10}x+13\right)+\frac{2}{5}\left(\frac{7}{10}x-13\right)+93=x$	**1p**
	$x=240\text{km}$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\left(x^2+8x+16\right)+\left(x^2-2x+1\right)-\left(2x^2-9\right)=$	**1p**
	$=x^2+8x+16+x^2-2x+1-2x^2+9=6x+26$, pentru orice număr real x	**1p**

	b) $A-B=\left(E(1)-E(2)\right)+\left(E(3)-E(4)\right)+...+\left(E(9)-E(10)\right)+E(11)=$	**1p**
	$=(-6)\cdot 5+6\cdot 11+26=$	**1p**
	$=62$	**1p**
3.	**a)** $f(3)=-4$	**1p**
	$f(0)=5\Rightarrow f(3)+f(0)=-4+5=1$	**1p**
	b) Abscisa punctului A este 3, deci $A(3,-4)$	**1p**
	$f(x)=5\Rightarrow x=0$, deci $B(0,5)$	**1p**
	$AB=3\sqrt{10}$	**1p**
4.	**a)** $\Delta PDC\sim\Delta PAB\Rightarrow\frac{PD}{PA}=\frac{DC}{AB}$	**1p**
	$\frac{PD}{PA}=\frac{1}{3}$, deci $\frac{PD}{PD+6}=\frac{1}{3}$, de unde obţinem $PD=3$ cm	**1p**
	b) $\mathcal{A}_{ABCD}=8\cdot\mathcal{A}_{\Delta PDC}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta PDC}=p\%\cdot\mathcal{A}_{ABCD}\Rightarrow\frac{p}{100}=\frac{1}{8}$	**1p**
	$p=12,5$	**1p**
5.	**a)** $AD=4k$, $CD=3k$, unde k este număr real pozitiv	**1p**
	Cum $AD^2+CD^2=AC^2\Rightarrow k=8$, deci $AD=32$cm	**1p**
	b) $AD^2=CD\cdot BD\Rightarrow BD=\frac{128}{3}$cm, deci $BC=\frac{200}{3}$ cm	**1p**
	$AB^2=BD\cdot BC$, deci $AB=\frac{160}{3}$ cm	**1p**
	$P_{\Delta ABC}=AC+AB+BC=40+\frac{160}{3}+\frac{200}{3}=160$ cm	**1p**
6.	**a)** $A'D'\perp(C'D'D)$, $D'C\subset(C'D'D)$, deci triunghiul $A'D'C$ este dreptunghic în D' şi cum $\sphericalangle A'CD'=30°$, obţinem $A'C=12$ cm	**1p**
	$D'C=6\sqrt{3}$ cm, deci $DD'=\sqrt{12^2-\left(6\sqrt{3}\right)^2}=6$ cm	**1p**
	b) $D'A'\perp A'B'$, $D'A'\perp AA'$, $A'B'\cap AA'=\{A'\}$, deci $D'A'\perp(A'AB)$	**1p**
	$AM\perp A'B$, unde $M\in A'B$, $A'D'\perp AM$ şi $A'D'\cap A'B=\{A'\}$, deci $AM\perp(A'D'C)$, de unde rezultă $d\left(A,(A'D'C)\right)=AM$	**1p**
	Triunghiul $A'AB$ dreptunghic în A, deci $A'B=6\sqrt{3}$cm şi $AM=\frac{AA'\cdot AB}{A'B}=2\sqrt{6}$cm	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 3

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	a)	**5p**
2.	a)	**5p**
3.	d)	**5p**
4.	d)	**5p**
5.	b)	**5p**
6.	b)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	a)	**5p**
2.	a)	**5p**
3.	c)	**5p**
4.	d)	**5p**
5.	a)	**5p**
6.	d)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Suma rămasă Dinei reprezintă $\frac{2}{3}$ din rest	**1p**
	$\frac{1}{3}$ din rest reprezintă 12 lei $\Rightarrow$ $2\cdot 12=24$ lei este suma de bani pe care o mai are Dina	**1p**
	b) $x=\frac{3}{4}\cdot x+36$, unde x este suma inițială pe care o are Dina	**2p**
	$x=144$ lei	**1p**
2.	**a)** $(x+1)(x-2)=x^2-2x+x-2=$	**1p**
	$=x^2-x-2$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=9x^2-6x+1-7(x^2-x-2)-(x^2+6x+9)=$	**1p**
	$=x^2-5x+6=x^2-2x-3x+6=x(x-2)-3(x-2)=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x	**2p**

3.	**a)** $x=\left(\frac{2}{2\sqrt{3}}+\frac{9}{3\sqrt{3}}+\frac{6}{6\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{1}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{1}=$	**1p**
	$=\frac{5}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{1}=5$	**1p**
	b) $y=5^{18}\cdot\left(5^2\right)^3:\left(5^3\right)^8=5^{18+6-24}=5^0=1$	**2p**
	$P=x\cdot y=5\cdot 1=5$, care este număr natural prim	**1p**
4.	**a)** $P_{ABCD}=4\cdot AB=4\cdot 18=72\,\text{cm}$	**2p**
	b) $ABCD$ este romb, $\{O\}=AC\cap BD\Rightarrow BO\perp AC$, BO înălțime în triunghiul echilateral ABC $\Rightarrow$ BO=$9\sqrt{3}$ cm	**2p**
	O este mijlocul segmentului BD $\Rightarrow$ $BD=2\cdot BO=18\sqrt{3}\,\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** $A_{ABCD}=AB\cdot BC=\ =10\sqrt{2}\cdot 20=200\sqrt{2}\,\text{cm}^2$	**2p**
	b) ΔABE este dreptunghic în $B\Rightarrow AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=10\sqrt{3}\,\text{cm}$ $BE^2=EF\cdot AE\Rightarrow$ $\Rightarrow EF=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,\text{cm}$, deci $EF=\frac{1}{3}\cdot AE\Rightarrow$ F este centrul de greutate a triunghiului ABC	**2p**
	BO este mediană în triunghiul ABC , unde $\{O\}=AC\cap BD$, deci $F\in BO$, de unde rezultă că punctele B, F și D sunt coliniare	**1p**
6.	**a)** $d(M,AB)=6\,\text{cm}$	**1p**
	$A_{\Delta MAB}=\frac{12\cdot 6}{2}=36\,\text{cm}^2$	**1p**
	b) $AM=MB=6\sqrt{2}\,\text{cm}$ și $AB=6\,\text{cm}\Rightarrow\Delta AMB$ este dreptunghic în M, deci $BM\perp MA$, $AA'\perp(ABC)\Rightarrow AA'\perp MB$, dar cum $AA',AM\subset(AA'M)$ și $AA',AM=\{A\}$ $\Rightarrow$ $MB\perp A'M$	**2p**
	$d(A',MB)=A'M=12\,\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE **Testul 4**

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b**)	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d**)	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**d**)	**5p**
6.	**b**)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b**)	**5p**
2.	**d**)	**5p**
3.	**b**)	**5p**
4.	**d**)	**5p**
5.	**c**)	**5p**
6.	**b**)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Împărțind 103 la 12 se obține câtul 8 și restul 7	**1p**
	Împărțind 103 la 18 se obține câtul 5 și restul 13, deci n poate fi egal cu 103	**1p**
	b) $n=12(c_1+1)-5 \Rightarrow 12 \mid n+5$, $n=18(c_2+1)-5 \Rightarrow 18 \mid n+5$	**2p**
	$n+5$ este c.m.m.m.c.$\{12,18\}$ și cum n este cel mai mic număr cu această proprietate $\Rightarrow$ $n=31$	**1p**
2.	**a)** $E(1)=40$, $E(-1)=0$	**1p**
	$E(1)+E(-1)=40+0=40$	**1p**
	b) $E(n)=(3n+4)^2-(2n+1)^2=(3n+4-2n-1)(3n+4+2n+1)=$ $=(n+3)(5n+5)=5(n+3)(n+1)$	**2p**
	$5(n+3)(5n+5) \vdots 5 \Rightarrow E(n)$ este multiplu al lui 5, pentru orice număr natural n	**1p**
3.	**a)** $x=\left(\frac{8}{3\sqrt{2}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}=$	**1p**
	$=\frac{26}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}=\frac{2}{3}$	**1p**

	b) $y=\left(\frac{5}{7\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\frac{14}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{7\sqrt{3}}\cdot\frac{14}{\sqrt{3}}=-\frac{4}{3}$	**2p**
	$N=\left\lvert-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right\rvert=\left\lvert-\frac{6}{3}\right\rvert=2$, care este număr natural	**1p**
4.	**a)** $\frac{AG}{AT}=\frac{2}{3}$, $\{T\}=AG\cap BC$	**1p**
	$MG\parallel BT\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AG}{AT}=\frac{2}{3}$	**1p**
	b) $MP\parallel BC\Rightarrow\frac{AP}{AC}=\frac{AM}{AB}=\frac{2}{3}\Rightarrow AP=8\,\text{cm}$	**2p**
	$PC=AC-AP=4\,\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** $\sphericalangle DCE=\sphericalangle DCB+\sphericalangle BCE=90^\circ+60^\circ=150^\circ$	**1p**
	$DC=BC=CE\Rightarrow\Delta DCE$ isoscel $\Rightarrow\sphericalangle CDE=(180^\circ-150^\circ):2=15^\circ$	**1p**
	b) $\sphericalangle DEC=\sphericalangle CDE=15^\circ\Rightarrow\sphericalangle BED=60^\circ-15^\circ=45^\circ$	**1p**
	$BM\perp DE, M\in DE\Rightarrow d(B,DE)=BM$	**1p**
	ΔBME este dreptunghic isoscel $\Rightarrow BM^2+ME^2=BE^2\ \Rightarrow\ 2BM^2=32\Rightarrow BM=4\,\text{cm}$	**1p**
6.	**a)** În triunghiul VDB, OM este linie mijlocie	**1p**
	$OM\parallel VB, VB\subset(VBC)\Rightarrow OM\parallel(VBC)$	**1p**
	b) $OM\parallel(VBC)\Rightarrow d(M,(VBC))=d\left(O,(VBC)\right)$	**1p**
	$OP\perp BC$, $P\in BC$, $VP\perp BC$ și cum $OP\cap VP=\{P\}\Rightarrow\ BC\perp(VOP)$	**1p**
	$OS\perp VP$, $S\in VP$ și cum $OS\perp BC$, $VP\cap BC=\{P\}\Rightarrow OS\perp(VBC)\Rightarrow\ d\left(O,(VBC)\right)=OS$	
	ΔVPB este dreptunghic în P$\Rightarrow\ VP=\sqrt{VB^2-BP^2}=10\,\text{cm}$	
	ΔVOP este dreptunghic în O, $VO=8\,\text{cm}\Rightarrow OS=\frac{24}{5}$ cm, deci distanța de la punctul M la planul (VBC) este egală cu $\frac{24}{5}$cm	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică

Varianta 4

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** 5 kg de mere și 5 kg de portocale costă $19+21=40$ de lei	**1p**
	10kg de mere și 10kg de portocale costă $40\cdot 2=80$ de lei și, cum $71<80$, obținem că Mihai nu poate cumpăra 10kg de mere și 10kg de portocale cu 71 de lei	**1p**
	b) $3x+2y=19$ și $2x+3y=21$, unde x este prețul unui kg de mere și y este prețul unui kg de portocale	**1p**
	$5x=15$	**1p**
	$x=3$ lei	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\left(\frac{4x^2}{9}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{5x}{3}+\frac{25}{4}\right)-\frac{x^2}{3}-x=$	**1p**
	$=\frac{4x^2}{9}+\frac{2x}{3}+\frac{1}{4}-\frac{x^2}{9}-\frac{5x}{3}-\frac{25}{4}-\frac{x^2}{3}-x=-2x-6$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $-2a-6>-10$	**1p**
	$-2a>-4$, deci $a<2$	**1p**
	Cum a este număr natural, obținem $a=0$ sau $a=1$	**1p**

3.	**a)** $f(1)=1-\sqrt{2}$	**1p**
	$f(1)+\sqrt{2}=1-\sqrt{2}+\sqrt{2}=1$	**1p**
	b) $A\left(\sqrt{2},0\right)$ este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox	**1p**
	$B\left(0,-\sqrt{2}\right)$ este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AOB}=\frac{AO\cdot BO}{2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=1$	**1p**
4.	**a)** $P_{BCEF}=4\cdot BC=$	**1p**
	$=8\cdot AB=24\text{cm}$	**1p**
	b) $FB\perp AC$, deci FB este înălțime în triunghiul AFC	**1p**
	$\sphericalangle MAB=\sphericalangle EBC=45°$, de unde obținem $AM \| \| BE$ și, cum $BE\perp CF$, obținem $AM\perp CF$, deci AM este înălțime în triunghiul AFC	**1p**
	Înălțimile triunghiului AFC se intersectează în punctul M, deci $CM\perp AF$	**1p**
5.	**a)** ΔABD este dreptunghic în A, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=$	**1p**
	$=\sqrt{108+54}=9\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	b) $MB \| \| DC\Rightarrow \Delta FBM\sim\Delta FDC$, unde $CM\cap BD=\{F\}$, deci $\frac{FB}{FD}=\frac{1}{2}$, de unde obținem $FB=3\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	Cum $EF=BE-BF=3\sqrt{2}\text{cm}$, obținem $EF=FB$, deci F este mijlocul segmentului BE	**1p**
	FM este linie mijlocie în ΔABE, de unde $FM \| \| AE$, deci $CM \| \| AE$	**1p**
6.	**a)** $AB'=B'C=AC=6\sqrt{2}\text{cm}$, deci triunghiul $AB'C$ este echilateral	**1p**
	Punctul O este mijlocul segmentului $B'C$, deci AO este înălțime în triunghiul $AB'C$, de unde obținem $AO=3\sqrt{6}\text{cm}$	**1p**
	b) $AO\perp B'C$, $BC'\perp B'C$, $AO\cap BC'=\{O\}$, deci $B'C\perp(ABC')$	**1p**
	$ME\perp AO$, unde $E\in AO$, $ME\perp B'C$ și, cum $AO\cap B'C=\{O\}$, obținem $ME\perp(AB'C)$, deci distanța de la punctul M la planul $(AB'C)$ este ME	**1p**
	$\Delta AME\sim\Delta AOB\Rightarrow\frac{AM}{AO}=\frac{ME}{OB}$, de unde obținem $ME=\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 5

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I şi SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\frac{1}{4}\cdot 100 = 25$ de pagini citite in prima zi din cartea care ar avea 100 de pagini, deci $25+27=52$ de pagini citite în primele două zile $\Rightarrow$ 48 de pagini rămase de citit	**1p**
	Dar cum 48 nu reprezintă jumătatea lui 100, deducem că nu este posibil să aibă 100 de pagini cartea pe care Radu a primit-o de ziua lui de la Andreea.	**1p**
	b) $\frac{x}{4}+27=\frac{x}{2}$, unde x este numărul de pagini al cărții	**2p**
	$x=108$ de pagini	**1p**
2.	**a)** $E(x)=(x-1)^2-(x-2)^2+(x-1)^2-(x-2)^2=2\left((x-1)^2-(x-2)^2\right)=2(2x-3)$	**2p**
	$E(x)=2(2x-3)=4x-6$, pentru orice număr real x.	**1p**

	b) $2-E(x)=-4x+8 \Rightarrow -4x+8\le 0 \Rightarrow$	**1p**
	$\Rightarrow x\ge 2$, deci mulțimea soluțiilor este $S=[2,+\infty)$	**1p**
3.	**a)** $a=\frac{5+3}{15}:\frac{1}{2}=\frac{8}{15}\cdot 2=\frac{16}{15}$	**2p**
	b) $b=\frac{1}{2}\cdot\frac{5-3}{15}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{15}=\frac{1}{15}$	**2p**
	Cum $a,b>0$ și $a=16b$, obținem că a este de 16 ori mai mare decât b	**1p**
4.	**a)** $P_{ABCD}=2(AB+AD)=2(600+400)=2000$ m	**2p**
	b) $AECF$ este paralelogram, deci $\mathcal{A}_{\Delta AEF}=\mathcal{A}_{\Delta CFE}$. Punctul M este mijlocul segmentului CE, deci $\mathcal{A}_{\Delta EMF}=\mathcal{A}_{\Delta CFM}=\frac{1}{2}\mathcal{A}_{\Delta CFE}$	**2p**
	Cum $\mathcal{A}_{AEMF}=\mathcal{A}_{\Delta AEF}+\mathcal{A}_{\Delta EMF}=2\mathcal{A}_{\Delta CFM}+\mathcal{A}_{\Delta CFM}$, obținem că $\mathcal{A}_{AEMF}=3\mathcal{A}_{\Delta CFM}$	**1p**
5.	**a)** ΔABC este dreptunghic în A, $AM\perp BC \Rightarrow AM=\sqrt{CM\cdot MB}=\sqrt{4\cdot 16}=8$cm	**2p**
	b) $AC=\sqrt{CM\cdot CB}=4\sqrt{5}$cm, $AB=\sqrt{BM\cdot BC}=8\sqrt{5}$cm	**1p**
	$P_{\Delta ABC}=(12\sqrt{5}+20)$cm și, cum $12\sqrt{5}>24\Leftrightarrow\sqrt{5}>2$, obținem că triunghiul ABC are perimetrul mai mare decât 44cm	**2p**
6.	**a)** $AC=8\sqrt{2}$ cm	**1p**
	$AC=AA'$ și $ACC'A'$ este dreptunghi, deci $ACC'A'$ este pătrat, de unde $A'C\perp AC'$	**1p**
	b) $B'O'=DO$ și $B'O'\|\|DO$ unde $\{O'\}=A'C'\cap B'D'$, deci $DOB'O'$ este paralelogram	**1p**
	$OB'\|\|DO'$ și $DO'\subset(A'C'D)$, deci $OB'\|\|(A'C'D)$	**2p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 7

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Cum $a+b+c=1$ și $b+c=0,5 \Rightarrow a=0,5$, deci $a=b+c$	**2p**
	b) Cum $\sqrt{5ab}=1$, rezultă $ab=0,2$, deci $b=0,4$ și cum $b+c=0,5$ rezultă că $c=0,1$	**2p**
	$a^2+b^2+c^2=(0,5)^2+(0,4)^2+(0,1)^2=0,42$	**1p**
2.	**a)** $E(0)=\left(\frac{0}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2-0\cdot\left(\frac{0}{2}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 0$	**1p**
	$E(0)=\left(-\sqrt{2}\right)^2=2$	**1p**
	b) $E(x)=\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{x^2}{2}+x\sqrt{2}-x\sqrt{2}+2x=\frac{x^2-4x+4}{2}-\frac{x^2}{2}+2x=2$	**2p**
	$N=E(n)+2\cdot E(2n)+1485=1491$ și, cum $1491=7\cdot 213$, rezultă că N este divizibil cu 7, oricare ar fi numărul întreg n	**1p**

3.	**a)** $x=\frac{3+2-1}{6}\cdot\frac{3}{2}=$	**1p**
	$=\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{2}=1$	**1p**
	b) $y=\left(2^4\right)^2:2^6:2=2^8:2^6:2=2$, deci $x-y=-1$	**2p**
	$(x-y)^{2022}+(x-y)^{2021}=(-1)^{2022}+(-1)^{2021}=1-1=0$	**1p**
4.	**a)** $\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC=$	**1p**
	$=14\cdot 10=140\ \text{cm}^2$	**1p**
	b) $ME\|\|AB\Rightarrow \sphericalangle MEA\equiv\sphericalangle BAE$ și, cum $\sphericalangle BAE\equiv\sphericalangle MAE$, obținem $\sphericalangle MEA\equiv\sphericalangle MAE$, deci ΔMEA este isoscel	**2p**
	$ME=AM$, $AM=AB$ și, cum $ME\|\|AB$, obținem că $AMEB$ romb	**1p**
5.	**a)** $\cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow \sphericalangle C=60^\circ$	**1p**
	Triunghiul ABC este dreptunghic în A, deci $\sphericalangle ABC=90^\circ-60^\circ=30^\circ$	**1p**
	b) $CA=6\text{cm}$, $BA=6\sqrt{3}\text{cm}$ și $AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=3\sqrt{3}\,\text{cm}$ sunt lungimile înălțimilor triunghiului dreptunghic dat, deci distanțele cerute	**2p**
	$CA+BA+AD=6+9\sqrt{3}=6+\sqrt{243}>6+\sqrt{225}=6+15=21\text{cm}$, deci suma distanțelor de la vârfurile triunghiului la laturile opuse este mai mare decât 21cm	**1p**
6.	**a)** VM mediană în triunghiul VBC echilateral, deci VM înălțime	**1p**
	$VM=\frac{6\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\,\text{cm}$, deci apotema piramidei are lungimea de $3\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	b) $OM\|\|AB$, $AB\subset(VAB)\Rightarrow OM\|\|(VAB)\Rightarrow d(M,(VAB))=d(O,(VAB))$	**1p**
	$OE\perp AB$, $E\in AB$, $VE\perp AB$ și cum $VE,OE\subset(VOE)\Rightarrow AB\perp(VOE)$	
	$OQ\perp VE$, $Q\in VE$, $OQ\perp AB$ și cum $AB,VE\subset(VAB)\Rightarrow OQ\perp(VAB)\Rightarrow d(O,(VAB))=OQ$	**1p**
	ΔVOE este dreptunghic în O, $VO=3\sqrt{2}\text{cm}$, $VE=3\sqrt{3}\,\text{cm}$ și $OQ=\frac{VO\cdot OE}{VE}\Rightarrow OQ=\sqrt{6}\,\text{cm}$,	**1p**
	deci $d(O,(VAB))=\sqrt{6}\,\text{cm}$	

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică

Model

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Deoarece, dacă se așază câte doi elevi în bancă, un elev stă singur, numărul elevilor din clasă este impar	**1p**
	Cum 14 nu este număr impar, deducem că nu este posibil ca în clasă să fie 14 elevi	**1p**
	b) $2(x-3)+1=3(x-6)$, unde x este numărul de bănci din clasă	**2p**
	$x=13$	**1p**
2.	**a)** $x^2-7x+10=x^2-2x-5x+10=$	**1p**
	$=x(x-2)-5(x-2)=(x-2)(x-5)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=\dfrac{2x-x^2-1}{2-x}:\dfrac{x\left(x^2-2x+1\right)}{(x-2)(x-5)}=$	**1p**
	$=\dfrac{x^2-2x+1}{x-2}\cdot\dfrac{(x-2)(x-5)}{x\left(x^2-2x+1\right)}=\dfrac{x-5}{x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2,5\}$	**2p**
3.	**a)** $f(6)=0$	**1p**
	$f(0)\cdot f(6)=0$	**1p**

	b) $OA=6$, $OB=6$	**1p**
	$AB=6\sqrt{2}$, deci distanța de la punctul O la dreapta AB este egală cu $\frac{OA\cdot OB}{AB}=3\sqrt{2}$	**2p**
4.	**a)** $\Delta AMP\sim\Delta CDP\Rightarrow\frac{AM}{CD}=\frac{AP}{CP}$	**1p**
	$AP=2\text{cm}$, deci $CD=12\text{cm}$	**1p**
	b) $CM=4\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{AMCD}=\frac{(AM+CD)\cdot CM}{2}=32\sqrt{3}\text{cm}^2$	**2p**
5.	**a)** ΔABC dreptunghic în A, $AE\perp BC$, $E\in BC$, deci $AC^2=EC\cdot BC$	**1p**
	$6^2=4\cdot BC\Rightarrow BC=9\text{cm}$	**1p**
	b) $AB=3\sqrt{5}\text{cm}$	**1p**
	$P_{ABC}=3\left(5+\sqrt{5}\right)\text{cm}$ și, cum $3\sqrt{5}<7$, obținem că $P_{\Delta ABC}<22$ cm	**2p**
6.	**a)** Muchia cubului este $100\text{cm}=1\text{m}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{totală}=6\text{m}^2$, deci pentru a vopsi exteriorul cubului sunt necesari $0,5\cdot 6=3$ litri de vopsea	**1p**
	b) $AQ\perp A'B$, unde Q este mijlocul lui $A'B$, $A'D'\perp(A'AB)\Rightarrow AQ\perp A'D'$ și, cum $A'D'\cap A'B=\{A'\}$ și $A'B\subset(A'D'C)$, obținem că $AQ=d\left(A,(A'D'C)\right)$	**2p**
	$AQ=50\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În a patra zi Oana ar citi $32:2=16$ pagini	**1p**
	În a cincea zi ar avea de citit $16:2=8$ pagini	**1p**
	b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+32=x$, unde x este numărul de pagini ale cărții	**2p**
	$x=256$ de pagini	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\left((x+1)-(x-1)\right)^2-x^2=$	**1p**
	$=4-x^2=(2+x)(2-x)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E\left(\sqrt{2}\right)=E\left(-\sqrt{2}\right)=2$	**1p**
	$A=E\left(\sqrt{2}\right)+E\left(-\sqrt{2}\right)-7=4-7=-3$ și, cum $-\sqrt{10}<-\sqrt{9}<-\sqrt{8}$, rezultă $A\in\left[-\sqrt{10},-2\sqrt{2}\right]$	**2p**

3.	**a)** $a=\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{12}{31}=$	**1p**
	$=\frac{31}{24}\cdot\frac{12}{31}=\frac{1}{2}$	**1p**
	b) $b=\frac{3}{\sqrt{2}}:\left(5\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$	**2p**
	$N=\frac{\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{3}{4}}}{2}=1$, care este număr natural	**1p**
4.	**a)** $MBCD$ este paralelogram, de unde rezultă $DM=BC=6\text{cm}$	**1p**
	$P_{\Delta ADM}=AD+DM+AM=6+6+4=16$ cm	**1p**
	b) $\frac{CP}{CO}=\frac{2}{3}$, unde O este mijlocul segmentului BD și, cum $DN=\frac{2}{3}DM$ și punctul M este mijlocul segmentului AB, obținem N este centrul de greutate în ΔADB, deci $\frac{AN}{AO}=\frac{2}{3}$	**2p**
	$\frac{AN}{AO}=\frac{CP}{CO}\Rightarrow NP\|\|AC$	**1p**
5.	**a)** $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=13\text{cm}$	**1p**
	$\sin\left(\sphericalangle ACB\right)=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$	**1p**
	b) $DC=\frac{3}{4}AC=9\text{cm}$	**1p**
	$\Delta ACB\sim\Delta ECD\Rightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{DE}\Rightarrow DE=\frac{45}{13}\text{cm}$ și, cum $\frac{45}{13}<3,5\Rightarrow DE<3,5\text{cm}$	**2p**
6.	**a)** $\sphericalangle\left(VB,(ABC)\right)=\sphericalangle VBO$, unde $\{O\}=AC\cap BD$	**1p**
	Triunghiul VBD este dreptunghic isoscel $\Rightarrow\sphericalangle\left(VB,(ABC)\right)=45°$	**1p**
	b) $AMCN$ este paralelogram $\Rightarrow AM\|\|CN$	**1p**
	PM este linie mijlocie în $\Delta BCV\Rightarrow PM\|\|CV$ și, cum $CN\|\|MA$, $CN\cap CV=\{C\}$ și $MA\cap MP=\{M\}\Rightarrow\left(NCV\right)\|\|\left(AMP\right)$	**2p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În a patra zi Oana ar citi $32:2=16$ pagini	**1p**
	În a cincea zi ar avea de citit $16:2=8$ pagini	**1p**
	b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+32=x$, unde x este numărul de pagini ale cărții	**2p**
	$x=256$ de pagini	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\left((x+1)-(x-1)\right)^2-x^2=$	**1p**
	$=4-x^2=(2+x)(2-x)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E\left(\sqrt{2}\right)=E\left(-\sqrt{2}\right)=2$	**1p**
	$A=E\left(\sqrt{2}\right)+E\left(-\sqrt{2}\right)-7=4-7=-3$ și, cum $-\sqrt{10}<-\sqrt{9}<-\sqrt{8}$, rezultă $A\in\left[-\sqrt{10},-2\sqrt{2}\right]$	**2p**

3.	**a)** $a=\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\right)\cdot\frac{12}{31}=$	**1p**
	$=\frac{31}{24}\cdot\frac{12}{31}=\frac{1}{2}$	**1p**
	b) $b=\frac{3}{\sqrt{2}}:\left(5\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{3}{4}$	**2p**
	$N=\frac{\sqrt{2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{3}{4}}}{2}=1$, care este număr natural	**1p**
4.	**a)** $MBCD$ este paralelogram, de unde rezultă $DM=BC=6\text{cm}$	**1p**
	$P_{\Delta ADM}=AD+DM+AM=6+6+4=16$ cm	**1p**
	b) $\frac{CP}{CO}=\frac{2}{3}$, unde O este mijlocul segmentului BD și, cum $DN=\frac{2}{3}DM$ și punctul M este mijlocul segmentului AB, obținem N este centrul de greutate în ΔADB, deci $\frac{AN}{AO}=\frac{2}{3}$	**2p**
	$\frac{AN}{AO}=\frac{CP}{CO}\Rightarrow NP\|\|AC$	**1p**
5.	**a)** $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=13\text{cm}$	**1p**
	$\sin\left(\sphericalangle ACB\right)=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$	**1p**
	b) $DC=\frac{3}{4}AC=9\text{cm}$	**1p**
	$\Delta ACB\sim\Delta ECD\Rightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{DE}\Rightarrow DE=\frac{45}{13}\text{cm}$ și, cum $\frac{45}{13}<3,5\Rightarrow DE<3,5\text{cm}$	**2p**
6.	**a)** $\sphericalangle\left(VB,(ABC)\right)=\sphericalangle VBO$, unde $\{O\}=AC\cap BD$	**1p**
	Triunghiul VBD este dreptunghic isoscel $\Rightarrow\sphericalangle\left(VB,(ABC)\right)=45°$	**1p**
	b) $AMCN$ este paralelogram $\Rightarrow AM\|\|CN$	**1p**
	PM este linie mijlocie în $\Delta BCV\Rightarrow PM\|\|CV$ și, cum $CN\|\|MA$, $CN\cap CV=\{C\}$ și $MA\cap MP=\{M\}\Rightarrow\left(NCV\right)\|\|\left(AMP\right)$	**2p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	d)	**5p**
2.	c)	**5p**
3.	c)	**5p**
4.	d)	**5p**
5.	c)	**5p**
6.	b)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	c)	**5p**
2.	d)	**5p**
3.	b)	**5p**
4.	c)	**5p**
5.	c)	**5p**
6.	a)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În 31 de apartamente cu trei camere sunt $3\cdot 31=93$ de camere	**1p**
	Cum numărul total de camere din bloc este egal cu 90, deducem că nu este posibil ca blocul să aibă treizeci și unu de apartamente cu trei camere, deoarece $93>90$	**1p**
	b) $x+y=40$ și $3x+2y=90$, unde x este numărul apartamentelor cu trei camere și y este numărul apartamentelor cu două camere	**1p**
	$x=10$ apartamente cu trei camere	**2p**
2.	**a)** $E(x)=x^2+6x+9-2x^2-6x+x^2+2x+1=$	**1p**
	$=2x+10$, pentru orice x număr real	**1p**
	b) $E(a-2)=2a+6$, $a\in\mathbb{Z}$	**1p**
	$E(a-2)+a=0\Leftrightarrow 2a+6+a=0$, deci $3a+6=0$, de unde rezultă $a=-2\in\mathbb{Z}$	**2p**
3.	**a)** $a=5\sqrt{7}-7\sqrt{2}-3\sqrt{7}+15\sqrt{2}=2\sqrt{7}+8\sqrt{2}$	**2p**

	b) $b=2\sqrt{7}-4\sqrt{7}+9\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\ =-2\sqrt{7}+8\sqrt{2}$	**2p**
	$a\cdot b=(8\sqrt{2}+2\sqrt{7})(8\sqrt{2}-2\sqrt{7})=100$, deci $m_g=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{100}=10$	**1p**
4.	**a)** ΔADC este dreptunghic în D, deci $AC^2=AD^2+DC^2$, de unde obținem $AC=50\text{cm}$	**1p**
	$P_{\Delta ADC}=AD+DC+AC=120\text{cm}$	**1p**
	b) ΔADC este dreptunghic în D, $DO\perp AC$, deci $DO=\dfrac{AD\cdot DC}{AC}=24\text{cm}$ În ΔADB dreptunghic în A, $AD^2=DO\cdot DB\Rightarrow DB=\dfrac{200}{3}\text{cm}$	**2p**
	$\mathcal{A}_{ABCD}=\mathcal{A}_{ABD}+\mathcal{A}_{BCD}=\dfrac{DB(AO+OC)}{2}=\dfrac{DB\cdot AC}{2}=\dfrac{\frac{200}{3}\cdot 50}{2}=\dfrac{5000}{3}\text{cm}^2$	**1p**
5.	**a)** ΔABD este dreptunghic în D, $\sphericalangle ABD=30^\circ\Rightarrow AB=4\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	ΔABE este dreptunghic în A, $\sphericalangle BEA=30^\circ\Rightarrow EB=8\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	b) ΔABC este dreptunghic în A, $\cos B=\dfrac{AB}{BC}$, de unde obținem $BC=8\text{cm}$	**1p**
	ΔEBC este dreptunghic în B, deci $EC^2=EB^2+BC^2$, de unde obținem $EC=16\text{cm}$, deci $P_{\Delta BCE}=\left(8\sqrt{3}+8+16\right)=\left(8\sqrt{3}+24\right)\text{cm}$ și, cum $8\sqrt{3}<14\Leftrightarrow\sqrt{192}<\sqrt{196}$, obținem că triunghiul BCE are perimetrul mai mic decât 38cm	**2p**
6.	**a)** $VO\perp(ABC)$, $AC\subset(ABC)\Rightarrow VO\perp AC\Rightarrow$ ΔVOA este dreptunghic în O, deci	**1p**
	$AO^2=VA^2-VO^2$, de unde obținem $AO=4\sqrt{2}\text{cm}\Rightarrow AC=8\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	b) $ABCD$ este pătrat, $AC\cap BD=\{O\}\Rightarrow\Delta BOC$ este isoscel, N mijlocul laturii $BC\Rightarrow$ $ON\perp BC$. Cum $\Delta MOB\equiv\Delta MOC\Rightarrow$ $MB\equiv MC$, deci ΔMBC este isoscel, N este mijlocul laturii $BC\Rightarrow MN\perp BC$ și, cum $(ABC)\cap(MBC)=BC$; $ON\perp BC$, $ON\subset(ABC)$; $MN\perp BC$ $MN\subset(MBC)\Rightarrow$ $\sphericalangle\big((ABC),(MBC)\big)=\sphericalangle(ON,MN)=\sphericalangle ONM$	**2p**
	$MO=4\text{cm}$, $ON=4\text{cm}\Rightarrow\Delta MON$ este dreptunghic isoscel, de unde rezultă $\sphericalangle ONM=45^o$, deci măsura unghiului determinat de planele (ABC) și (MBC) este de 45°	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2020-2021

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 8

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I şi SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dublul lui 8 este 16, jumătatea lui 8 este 4	**1p**
	Cum $4+6=10\neq 16$, rezultă că nu este posibil ca n să fie egal cu 8	**1p**
	b) $2n=\frac{n}{2}+6$, deci $n=4$, de unde $m^2=4$	**2p**
	Cum $m\in\mathbb{N}$, convine $m=2$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=2x^2+12x+18-x^2+4-10x-14-7=x^2+2x+1=(x+1)^2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$E(\sqrt{3}-1)=(\sqrt{3}-1+1)^2=(\sqrt{3})^2=3$	**1p**

	b) $E(-1)=(-1+1)^2=0^2=0$	**1p**
	$E(-1)\cdot E(0)\cdot E(1)\cdot E(2)\cdot ...\cdot E(2021)=0\cdot E(0)\cdot E(1)\cdot E(2)\cdot ...\cdot E(2021)=0$	**1p**
3.	**a)** $f\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)=\sqrt{3}+\frac{3}{2}-3$	**1p**
	Cum $f\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2}\right)=\sqrt{3}+\frac{3-6}{2}=\sqrt{3}-\frac{3}{2}$, rezultă că punctul $A\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2},\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f	**1p**
	b) $OA=3$, unde $A(3,0)$ este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox, iar $OB=3$, unde $B(0,-3)$ este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Oy	**2p**
	ΔAOB este dreptunghic isoscel de bază AB, astfel mediana corespunzătoare bazei este și înălțime, deci dreapta ce trece prin O și prin mijlocul ipotenuzei este perpendiculară pe AB	**1p**
4.	**a)** ΔAEB este isoscel, $EN\perp AB$, deci EN este mediană, de unde rezultă că $AN=\frac{AB}{2}=12\text{cm}$	**1p**
	ΔAMD este dreptunghic în M, $AM=\frac{AB-DC}{2}=8\text{cm}$, deci $DM=\sqrt{AD^2-AM^2}=6\text{cm}$	**1p**
	$\Delta AMD\sim\Delta ANE$, deci $\frac{DM}{EN}=\frac{AM}{AN}$, de unde obținem că $EN=9\text{cm}$	**1p**
	b) $\Delta MNG\equiv\Delta CTG$, unde $\{T\}=EN\cap DC$, și cum $TN=DM=6\text{cm}$, rezultă $GN=\frac{DM}{2}=3\text{cm}$, $GN=GT$	**1p**
	EN este înălțime în triunghiul isoscel AEB de bază AB, deci și mediană, iar $EN=3GN$, rezultă că G este centrul de greutate al triunghiului AEB	**1p**
5.	**a)** ΔABC dreptunghic în A în care $\sphericalangle B=30°$, deci $BC=2AC=24\text{cm}$ și $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=12\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	$A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=72\sqrt{3}\text{cm}^2$	**1p**
	b) În triunghiul ABC dreptunghic în A, $\sphericalangle ABC=30°$, deci $\sphericalangle ACB=60°$, dar $\sphericalangle ACB\equiv\sphericalangle DCP$, deci $\sphericalangle DCP=60°$, $DP\perp BC, P\in BC$	**1p**
	În triunghiul DPC dreptunghic în P, $\sin C=\frac{DP}{DC}$, de unde obținem $DP=12\cdot\sin 60°=6\sqrt{3}\text{cm}$, deci distanța de la punctul D la dreapta BC este $DP=6\sqrt{3}\text{cm}$	**2p**
6.	**a)** Suma lungimilor tuturor muchiilor prismei este $S=6AB+3AA'$	**1p**
	Obținem $S=6\cdot 12+3\cdot 12\sqrt{3}=72+36\sqrt{3}=36\left(2+\sqrt{3}\right)\text{cm}$	**1p**
	b) $BC\subset(MBC)$, $B'C'\subset(MB'C')$, $BC\parallel B'C'\parallel MN$, unde $MN=(MBC)\cap(MB'C')$, $\{N\}=A'C\cap AC'$, și considerând P mijlocul lui MN rezultă $AP\perp MN$, $AP\subset(MB'C')$ și $A'P\perp MN$, $A'P\subset(MBC)$, deci $\sphericalangle((MBC),(MB'C'))=\sphericalangle(AP,A'P)$	**1p**
	$AQRA'$ dreptunghi, unde Q mijlocul lui BC și R mijlocul lui $B'C'$, și cum $AQ=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}=\frac{AA'}{2}$, deci $AA'>AQ$, rezultă că $\sphericalangle(AP,A'P)=\sphericalangle APQ$ ca unghi ascuțit	**1p**

	În triunghiul $A'AQ$ dreptunghic în A, mediana $AP=\frac{A'Q}{2}=3\sqrt{15}$ cm, iar înălțimea $AS=\frac{AA'\cdot AQ}{A'Q}=\frac{12\sqrt{3}\cdot 6\sqrt{3}}{6\sqrt{15}}=\frac{36\sqrt{15}}{15}=\frac{12\sqrt{15}}{5}$ cm, unde $AS\perp A'Q$, $S\in A'Q$, obținem din triunghiul ASP dreptunghic în S că $\sin\measuredangle(APQ)=\frac{AS}{AP}=\frac{4}{5}$, deci sinusul unghiului dintre planele (MBC) și $(MB'C')$ este $\frac{4}{5}$	**1p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ŞI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 1

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $20-2\cdot 10$ este numărul:

a) 0
b) 1
c) 8
d) 18

5p **2.** Numărul care reprezintă $\frac{1}{3}$ din 60 este:

a) 10
b) 15
c) 20
d) 30

5p **3.** Patru elevi, Radu, Gabriel, Alexandru și Mihail, au calculat media aritmetică a numerelor $x=\sqrt{3}+1$ și $y=\sqrt{3}-1$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Radu	Gabriel	Alexandru	Mihail
1	0	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

Dintre cei patru elevi, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Radu
b) Gabriel
c) Alexandru
d) Mihail

5p **4.** Dintre următoarele secvențe de numere, cea care conține numai numere divizibile cu 5 este:

a) $0, 5, 10, 15$
b) $0, 2, 5, 10$
c) $0, 2, 4, 6$
d) $5, 6, 10, 15$

5p **5.** Se consideră mulțimea $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\, 2\le x<6\right\}$. Dintre următoarele mulțimi, cea care reprezintă scrierea mulțimii B prin enumerarea elementelor sale este:

a) $\{3,4,5\}$
b) $\{2,3,4,5\}$
c) $\{3,4,5,6\}$
d) $\{4,5,6\}$

5p **6.** În tabelul de mai jos este prezentată situația statistică a notelor obținute de elevii unei clase a VIII-a la un test de matematică din semestrul I.

Nota la test	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	0	0	0	2	5	4	5	3	4	3

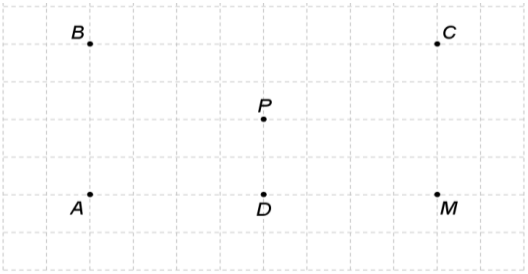
Conform tabelului, numărul elevilor care au obținut note mai mari decât 8 la testul de matematică, este:

a) 7
b) 9
c) 10
d) 11

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D, M și P. Simetricul punctului A față de punctul P este punctul:

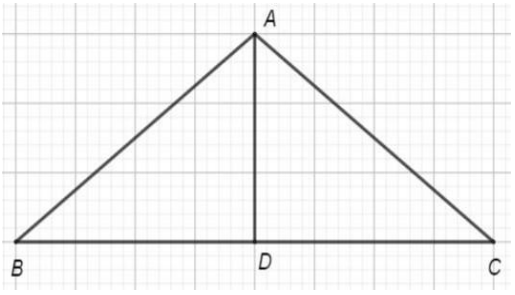


a) A
b) B
c) C
d) D

5p **2.** În figura alăturată punctul M este mijlocul segmentului AC cu $AC = 6\text{cm}$. Lungimea segmentului AM este:

a) 3cm
b) $3{,}5\text{cm}$
c) $4{,}5\text{cm}$
d) 6cm

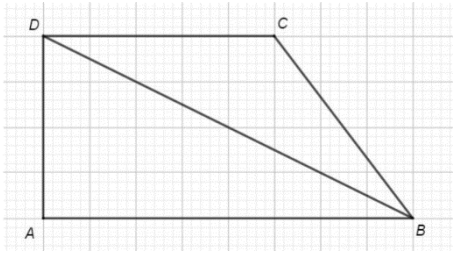
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu baza BC. Punctul D este mijlocul segmentului BC, $AB = 5\text{cm}$ și $BD = 4\text{cm}$.



Perimetrul triunghiului ABC este:

a) 9 cm
b) 14 cm
c) 18 cm
d) 30 cm

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un teren în formă de trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AD \perp AB$ și $AB \| CD$. Semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC, $AB = 160$ m și $CD = 100$ m. Aria terenului este:



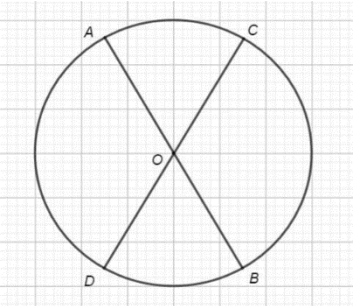
a) $8000\ \text{m}^2$

b) $10400\ \text{m}^2$

c) $13000\ \text{m}^2$

d) $16000\ \text{m}^2$

5p **5.** În figura alăturată AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, iar măsura arcului mic BD este de $60°$. Măsura unghiului AOC este de:



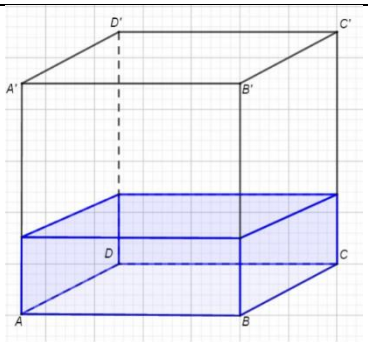
a) $30°$

b) $60°$

c) $90°$

d) $120°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un acvariu în formă de cub $ABCDA'B'C'D'$, $AB = 30\text{cm}$. Pentru umplerea acvariului, care are inițial 9 litri de apă, Andrei va trebui să adauge:



a) 10 litri de apă
b) 18 litri de apă
c) 27 litri de apă
d) 30 litri de apă

SUBIECTUL al III-lea ***Scrieți rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

5p **1.** În urmă cu 8 ani tatăl era de șapte ori mai în vârstă decât fiul său. În prezent, tatăl are 36 ani.

(3p) a) Verifică, dacă în prezent, vârsta fiului este de trei ori mai mică decât vârsta tatălui.

(2p) b) Peste câți ani vârsta tatălui va fi egală cu dublul vârstei fiului?

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=(x+1)^2+2(x+1)(x-2)+(x-2)^2$.

(2p) a) Arată că $E(x)=(2x-1)^2$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină numărul natural a pentru care $E(\sqrt{2})+a\sqrt{2}$ reprezintă un număr natural.

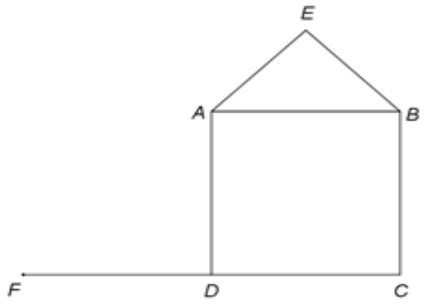
5p

3. Se consideră numerele $x=\left(\frac{8}{\sqrt{18}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}$ și $y=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{5}{\sqrt{147}}\right):\frac{\sqrt{3}}{14}$

(2p) a) Arată că $x=\frac{2}{3}$.

(3p) b) Arată că suma numerelor x și y este număr natural.

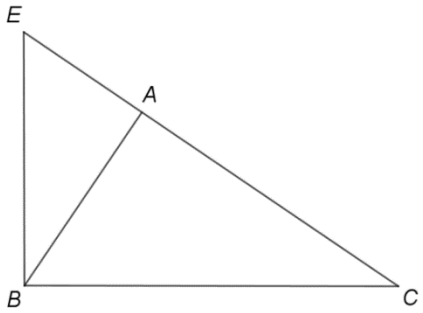
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ și un triunghi dreptunghic isoscel AEB dreptunghic în E şi $AE = 4\sqrt{2}$ cm. Punctul F este simetricul punctului C faţă de punctul D.



(2p) a) Demonstează că punctele E, A şi F sunt coliniare.

(3p) b) Arată că, dacă P este punctul de intersecţie a dreptelor AC şi DE, atunci P este mijlocul segmentului DE.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul EBC, dreptunghic în B. Proiecția punctului B pe dreapta EC este punctul A care determină pe EC segmentele $AC = 8\text{cm}$ și $AE = 2\text{cm}$.

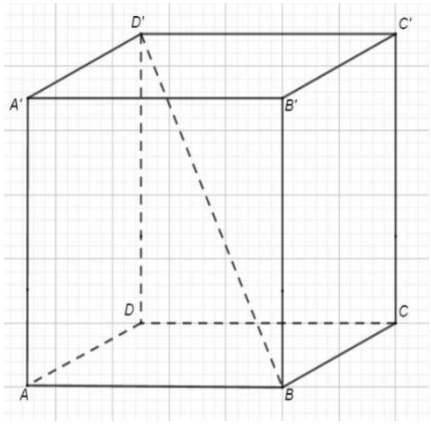


(**2p) a)** Arată $BA = 4\text{cm}$.

(3p) b) Arată că perimetrul triunghiului BCE este mai mic decât 28 cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6\text{cm}$.

(2p) a) Arată că valoarea cosinusului unghiului dintre dreapta BD' și planul (ADC) este $\frac{\sqrt{6}}{3}$.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul A' la planul $(BC'D')$.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI
ŞI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 2

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Suma divizorilor naturali ai lui 10 este numărul:

a) 7
b) 8
c) 10
d) 18

5p **2.** În tabelul următor este prezentată situația cheltuielilor și a veniturilor unei societăți comerciale.

Anul	Cheltuieli (lei)	Venituri (lei)
2017	90000	110000
2018	150000	250000
2019	150000	180000
2020	190000	200000

Raportul dintre cheltuielile și veniturile înregistrate de către societatea comercială este egal cu $\frac{5}{6}$ în anul :

a) 2017
b) 2018
c) 2019
d) 2020

5p **3.** Rezultatul calculului $5-(2\cdot 3-7)-6$ este numărul:

a) -4
b) -2
c) 0
d) 1

5p **4.** Într-un depozit sunt 2700 kg de fructe: mere, père, gutui și struguri, după cum este prezentat în tabelul următor:

mere	900 kg
pere	500 kg
gutui	490 kg
struguri	810 kg

Dintre fructele de mai sus, categoria care reprezintă 30% din cantitatea de fructe din acest depozit este :

a) mere
b) pere
c) gutui
d) struguri

5p **5.** Dacă $a=\sqrt{10^2-8^2}$, atunci a este egal cu:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 36

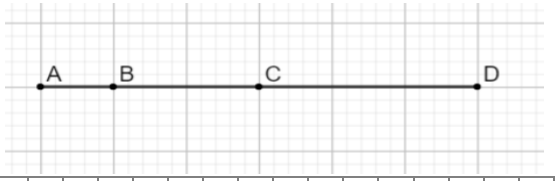
5p **6.** Un biciclist se deplasează cu viteza de 40 km pe oră. Alexandru, afirmă că biciclistul, păstrând viteza de deplasare, a parcurs 60 km în 60 de minute. Afirmația lui Alexandru este :

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

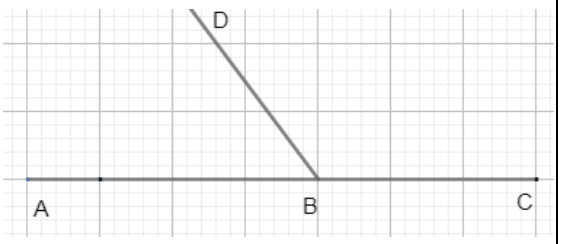
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C și D asfel încât $AB=1\text{cm}$, $BC=2\text{cm}$ și $CD=3\text{cm}$. Dintre aceste puncte, cel care reprezintă mijlocul unui segment din figură, este punctul:



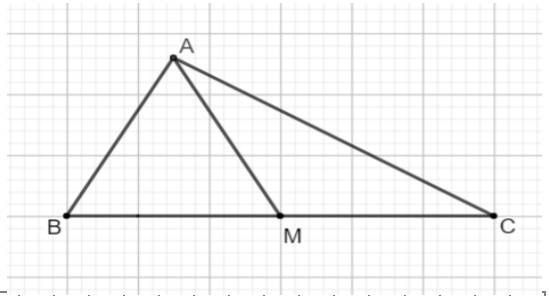
a) A
b) B
c) C
d) D

5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate două unghiuri adiacente suplementare astfel încât măsura ughiului ascuțit să fie $70°$. Care dintre următoarele valori reprezintă măsura celuilalt unghi?



a) $20°$
b) $35°$
c) $70°$
d) $110°$

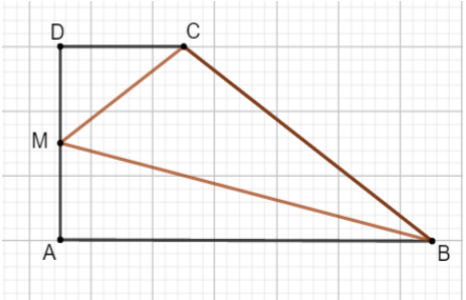
5p **3.** În grădina casei Teodorei există patru tufe de trandafiri poziționate pe figura alăturată în punctele A, B, C și M. Măsura unghiului BAC este de $90°$, punctul M aparține lui BC, $AM\equiv\text{MC}$, $\sphericalangle\text{MA}C=30°$ și $BM=6\text{m}$. Teodora vrea să amenajeze o alee din punctul M care să fie perpendiculară pe latura AC a grădinii. Aleea amenajată de Teodora de la punctul M la latura AC are o lungime egală cu:



a) 2m
b) 3m
c) 4m
d) 6m

5p **4.** Figura alăturată reprezintă schița unui teren în formă de trapez dreptunghic $ABCD$ cu baza mare $AB=120\,\text{m}$, baza mică $CD=40\,\text{m}$ și înălțimea $AD=60\,\text{m}$. Terenul este împărțit în trei parcele pe care s-au plantat lalele, zambile și narcise. Cele trei parcele sunt ABM, BMC și CMD, unde M este mijlocul segmentului AD. Precizăm că lalelele s-au plantat pe suprafața triunghiului ABM, zambilele pe suprafața triunghiului BMC, iar narcisele pe suprafața triunghiului CMD.

Aria suprafeței pe care s-au plantat zambilele este:



a) $600\,\text{m}^2$

b) $1800\,\text{m}^2$

c) $2400\,\text{m}^2$

d) $4800\,\text{m}^2$

5p **5.** Triunghiul ABC este înscris în cercul de centru O și rază 6cm. Știind că latura BC a triunghiului ABC are 12cm, atunci măsura unghiului BAC este :

a) $30°$

b) $60°$

c) $90°$

d) $150°$

5p **6.** O față a unui dulap în formă de paralelipiped dreptunghic are dimensiunile de 2m și $0,5\text{m}$. Suma lungimilor tuturor muchiilor paralelipipedului este de 14m. Volumul dulapului este egal cu:

a) 1m^3

b) 4m^3

c) 14m^3

d) $16,5\text{m}^3$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Într-un bloc sunt 40 de apartamente cu câte două respectiv trei camere. În aceste apartamente sunt în total 90 de camere.

(2p) a) Este posibil ca în bloc să fie 31 apartamente cu trei camere? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină câte apartamente cu trei camere sunt în acest bloc.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=(x+3)^2-2(x^2+3x)+(x+1)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=2x+10$, pentru orice x număr real.

(3p) b) Determină numărul întreg a pentru care $E(a-2)+a=0$.

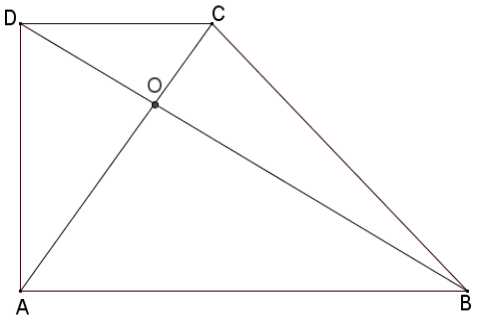
5p

3. Fie numerele $a=\sqrt{175}-\sqrt{98}-\sqrt{63}+3\sqrt{50}$ și $b=\sqrt{28}-\sqrt{112}+\sqrt{162}+\sqrt{2}-\sqrt{8}$.

(2p) a) Arată că $a=2\sqrt{7}+8\sqrt{2}$.

(3p) b) Calculează media geometrică a numerelor a și b .

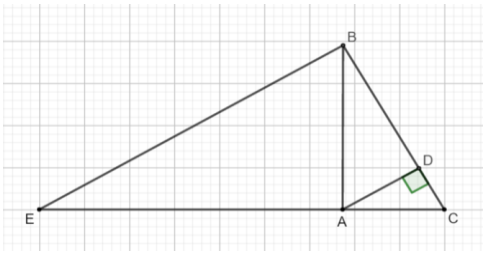
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $\sphericalangle DAB = 90^o$, $AD = 40\text{cm}$ și $CD = 30\text{cm}$. Diagonalele trapezului sunt perpendiculare și O este punctul lor de intersecție.



(**2p) a)** Arată că perimetrul triunghiului ADC este egal cu 120cm .

(3p) b) Calculează aria trapezului $ABCD$.

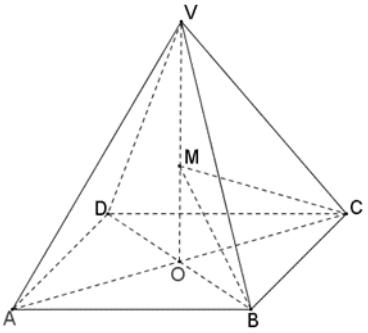
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, $\sphericalangle ABC = 30°$. Perpendiculara din A pe BC intersectează dreapta BC în punctul D $AD = 2\sqrt{3}\text{cm}$. Paralela prin B la AD intersectează dreapta AC în punctul E.



2p) a) Demonstrează că $BE = 8\sqrt{3}\text{cm}$.

(3p) b Demonstrează că perimetrul triunghiului BCE este mai mic decât 38cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ și $VA = 4\sqrt{11}\text{cm}$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD, dreapta VO este perpendiculară pe planul (ABC), $VO = 12\text{cm}$ și punctul M este situat pe segmentul VO astfel încât $\frac{VM}{VO} = \frac{2}{3}$.



(2p) a) Arată că lungimea segmentului AC este egală cu $8\sqrt{2}\text{cm}$.

(3p) b) Calculează măsura unghiului determinat de planele (ABC) și (MBC).

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ŞI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dintre numerele 12 , 13 ,14 și 15 , numărul divizibil cu 6 este:

a) 12
b) 13
c) 14
d) 15

5p **2.** Dacă $\frac{a}{4}=\frac{5}{b}$, $b\neq 0$, atunci valoarea produsului $a\cdot b$ este:

a) 20
b) 9
c) $\frac{5}{4}$
d) $\frac{4}{5}$

5p **3.** Luni, temperatura înregistrată la ora 10 la o stație meteo a fost de $-3^{\circ}\mathrm{C}$, iar marți, la aceeași oră, au fost înregistrate $3^{\circ}\mathrm{C}$. Temperatura înregistrată marți este mai mare decât temperatura înregistrată luni cu:

a) $-3^{\circ}\mathrm{C}$
b) $0^{\circ}\mathrm{C}$
c) $3^{\circ}\mathrm{C}$
d) $6^{\circ}\mathrm{C}$

5p **4.** Dintre numerele $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ și $\frac{4}{5}$ cel mai mare este:

a) $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** $\frac{4}{5}$

5p **5.** Patru elevi, Lara, Patrick, Tudor și Sofia, au calculat produsul numerelor $-4\sqrt{2}$ și $8\sqrt{2}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Lara	Patrick	Tudor	Sofia
-128	-64	64	128

Dintre cei patru elevi, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Lara
b) Patrick
c) Tudor
d) Sofia

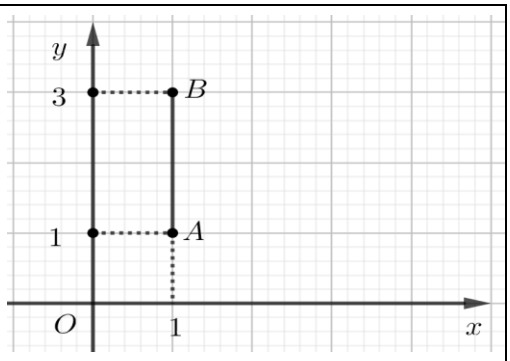
5p **6.** Se consideră intervalele $A=(-1,5)$ și $B=[2,9]$. Un număr care aparține mulțimii $A\cap B$ este:

a) -1
b) 2
c) 5
d) 9

SUBIECTUL al II-lea

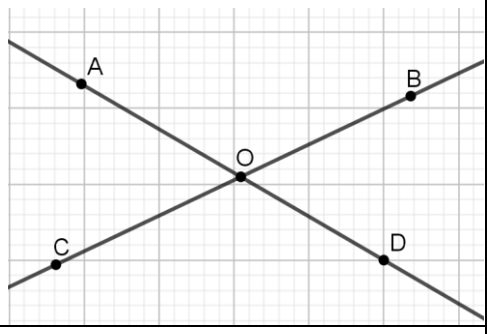
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(1,3)$, reprezentate într-un sistem de axe ortogonale xOy. Coordonatele punctului de intersecție a mediatoarei segmentului AB cu axa Oy sunt:



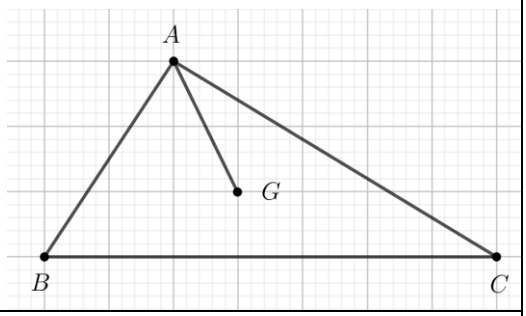
a) $(0,2)$
b) $(2,0)$
c) $(1,\ 2)$
d) $(2,\ 1)$

5p **2.** În figura alăturată, unghiurile AOB și COD sunt opuse la vârf. Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor AOC și BOD este egală cu:



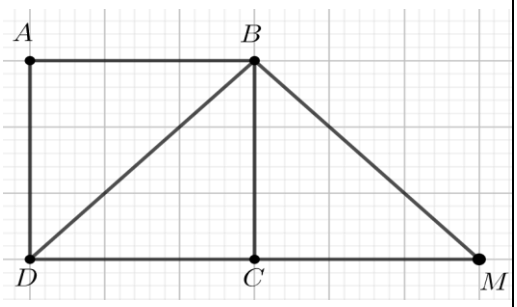
a) 180°
b) 90°
c) 89°
d) 0°

5p **3.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC și punctul G, centrul de greutate al triunghiului. Dacă lungimea ipotenuzei BC este de 12cm, atunci lungimea segmentului AG este egală cu:



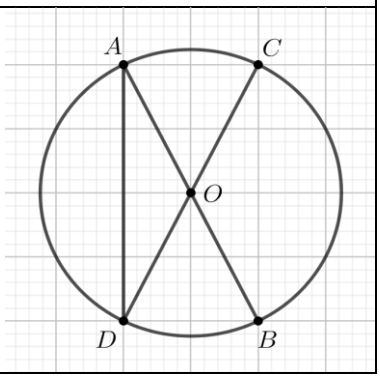
a) 2cm
b) 3cm
c) 4cm
d) 6cm

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$, cu $AB = 6\text{cm}$. Dacă dreptele BD și BM sunt perpendiculare și punctele D, C, și M coliniare, atunci lungimea segmentului DM este egal cu:



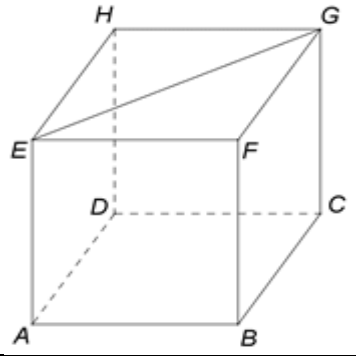
a) 6cm
b) 8cm
c) 10cm
d) 12cm

5p **5.** În figura alăturată AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, iar măsura arcului mic BD este de $60°$. Măsura unghiului CDA este de:



a) 30°
b) 60°
c) 90°
d) 120°

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDEFGH$. Diagonala bazei EG are lungimea egală cu $4\sqrt{2}$cm. Aria totală a cubului este egală cu:



a) 32cm^2

b) 48cm^2

c) 64cm^2

d) 96cm^2

SUBIECTUL al III-lea ***Scrieți rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

5p **1.** Dina are o sumă de bani. În prima zi cheltuiește $\frac{3}{4}$ din sumă, iar în a doua zi $\frac{1}{3}$ din rest, adică 12 lei.

(3p) a) Ce sumă de bani mai are Dina după cele două zile?

(2p) b) Determină suma de bani avută inițial de Dina.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(3x-1)^2-7(x+1)(x-2)-(x+3)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $(x+1)(x-2)=x^2-x-2$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Demonstrează că $E(x)=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x.

5p

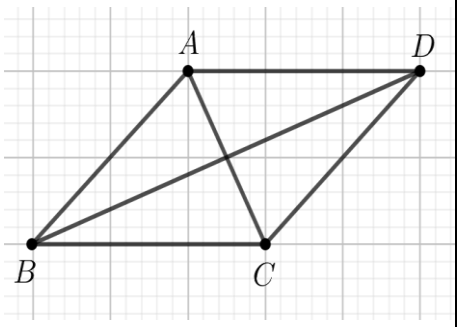
3. Se consideră numerele reale $x=\left(\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{9}{\sqrt{27}}+\frac{6}{\sqrt{108}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1}$ și $y=\left(5^6\right)^3\cdot 25^3:125^8$.

(2p) a) Arată că $x=5$.

(3p) b) Arată că produsul numerelor x și y este un număr natural prim.

5p **4.** Se consideră rombul $ABCD$, cu $AB = 18\text{cm}$ și $\sphericalangle ABC = 60°$.

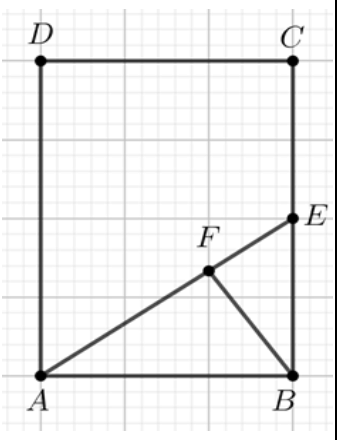
(2p) a) Arată că perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu 72cm.



(3p) b) Arată că lungimea diagonalei BD este egală cu $18\sqrt{3}\text{cm}$.

5p **5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10\sqrt{2}\text{cm}$ și $BC = 20\text{cm}$. Punctul E este mijlocul laturii BC și punctul F este situat pe segmentul AE, astfel încât $BF \perp AE$.

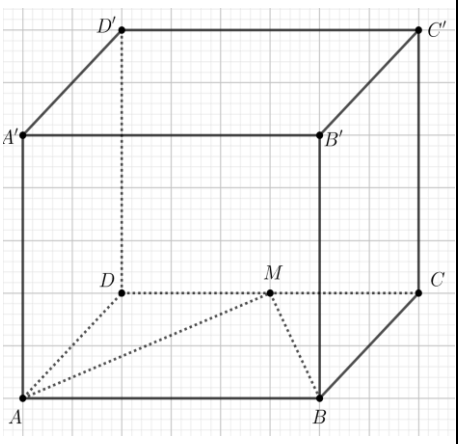
(**2p) a)** Arată că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu $200\sqrt{2}\text{cm}^2$.



(3p) b) Demonstrați că punctele B, F și D sunt coliniare.

5p

6. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=12\text{cm}$, $BC=6\text{cm}$ și $AA'=6\sqrt{2}\text{cm}$. Punctul M este mijlocul muchiei CD.



(2p) a) Arată că aria triunghiului AMB este egală cu 36cm^2.

(3p) b) Determină distanța de la punctul A' la dreapta MB.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII
CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ŞI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 4

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dintre numerele 0, 2, 4 și 15, numărul prim este:

a) 0
b) 2
c) 4
d) 15

5p **2.** În tabelul de mai jos este prezentat numărul manualelor de matematică pentru gimnaziu, pe an de studiu, din biblioteca unei școli:

Tipul manualului	**Numărul de manuale**
Mate_V	280
Mate_VI	200
Mate_VII	250
Mate_VIII	270

Tipul manualului care reprezintă un sfert din totalul manualelor de matematică pentru gimnaziu din biblioteca școlii, este:

a) Mate_V **b)** Mate_VI **c)** Mate_VII **d)** Mate_VIII

5p **3.** După o scumpire cu 20%, prețul unui produs a crescut cu 12 lei. Prețul inițial al produsului este:

a) 240 lei
b) 120 lei
c) 72 lei
d) 60 lei

5p **4.** Dintre numerele $\frac{1}{2^4}$, $\frac{1}{2^7}$, $\frac{1}{2^3}$ și $\frac{1}{2^8}$, cel mai mare este:

a) $\frac{1}{2^8}$ **b)** $\frac{1}{2^7}$ **c)** $\frac{1}{2^4}$ **d)** $\frac{1}{2^3}$

5p **5.** Patru elevi, Cătălin, Nicolae, Anastasia și Ana, au calculat suma numerelor a și b, știind că $a^2-b^2=12$ și $a-b=4$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Cătălin	Nicolae	Anastasia	Ana
48	16	4	3

Dintre cei patru elevi, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Cătălin
b) Nicolae
c) Anastasia
d) Ana

5p **6.** Suma numerelor întregi din intervalul $[-2,3]$ este egală cu:

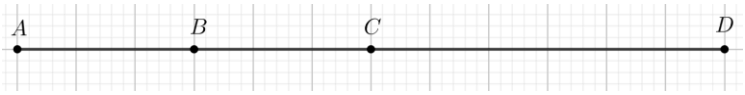
a) 0
b) 3
c) 5
d) 9

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

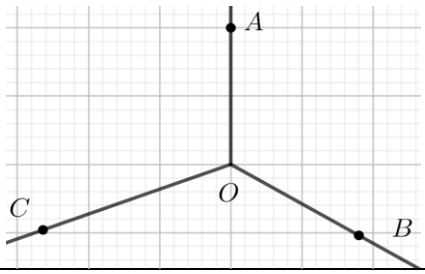
5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C și D, în această ordine, sunt coliniare. Dacă punctul B este mijlocul segmentului AC, punctul C este mijlocul segmentului AD și $BC = 3\text{cm}$, atunci lungimea segmentului AD este egală cu:

a) 15cm
b) 12cm
c) 6cm
d) 3cm



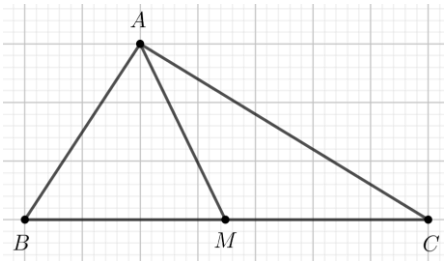
5p **2.** În figura alăturată, unghiurile AOB, BOC și COA sunt unghiuri în jurul punctului O, măsura unghiului AOB este de 120° și măsura unghiului BOC este de 130°.
Măsura unghiului AOC este de:

a) 140°
b) 130°
c) 120°
d) 110°



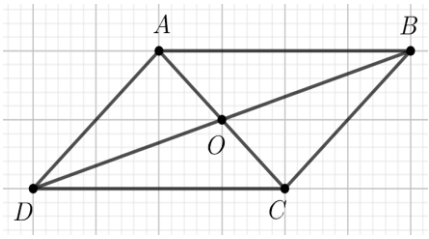
5p **3.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC, punctul M este mijlocul ipotenuzei BC, $AB = 4\text{cm}$ și măsura unghiului ACB este de 30°. Lungimea segmentului AM este egală cu:

a) 2cm
b) 4cm
c) 8cm
d) 12cm



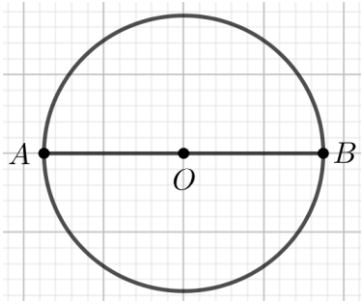
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un paralelogram $ABCD$, punctul O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD, iar $AO + DO = 8\text{cm}$. Suma lungimilor segmentelor AC și BD este egală cu:

a) 4cm
b) 8cm
c) 12cm
d) 16cm

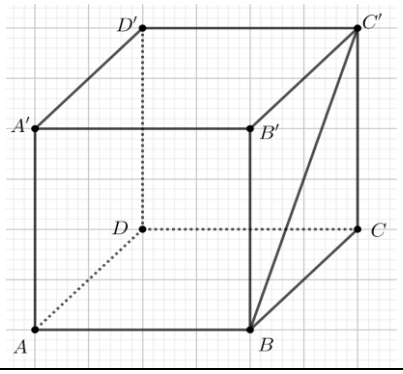


5p **5.** În figura alăturată, AB este diametru în cercul de centru O, $AB = 8\text{cm}$. Lungimea cercului este egală cu:

a) $64\pi\text{cm}$
b) $16\pi\text{cm}$
c) $8\pi\text{cm}$
d) $4\pi\text{cm}$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului dintre dreptele BC' și DD' este de:



a) 30°

b) 45°

c) 60°

d) 90°

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Împărțind, pe rând, numărul natural n la 12 și la 18, se obțin resturile 7, respectiv 13.

(2p) a) Numărul natural n poate fi egal cu 103? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Arată că cel mai mic număr natural n cu această proprietate este 31.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(3x+4)^2-(2x+1)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(1)+E(-1)=40$.

(3p) b) Demonstrează că $E(n)$ este multiplu al lui 5, pentru orice număr natural n.

5p

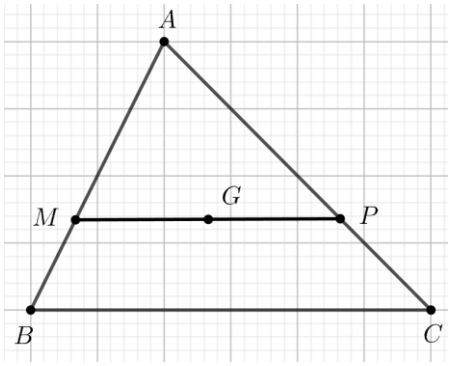
3. Se consideră numerele reale $x=\left(\frac{8}{\sqrt{18}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}$ și $y=\left(\frac{5}{\sqrt{147}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right):\frac{\sqrt{3}}{14}$.

(2p) a) Arată că $x=\frac{2}{3}$.

(3p) b) Arată că numărul $N=|y-x|$ este natural.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, $MP \| BC$, $G \in MP$, $M \in AB$ și $P \in AC$.

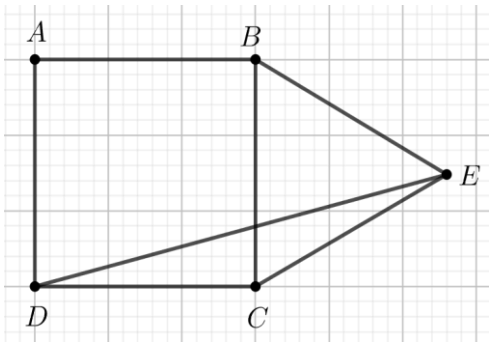
(2p) a) Arată că $\frac{AM}{AB} = \frac{2}{3}$.



(3p) b) Dacă $AC = 12$ cm, atunci determină lungimea segmentului PC.

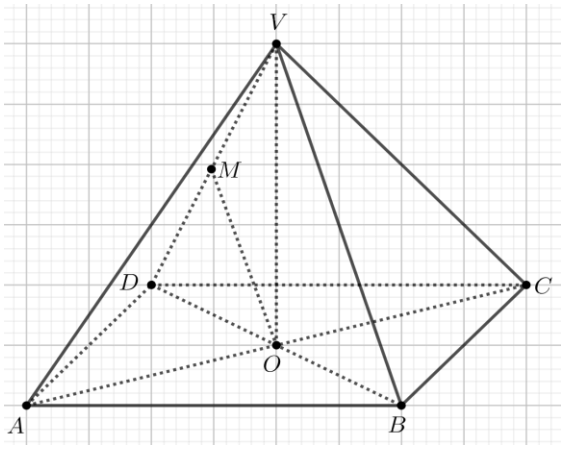
5p **5.** În figura alăturată sunt reprezentate pătratul $ABCD$ cu $AB = 4\sqrt{2}$ cm și triunghiul echilateral BCE.

(**2p) a)** Arată că măsura unghiului CDE este egală cu 15°.



(3p) b) Demonstrează că distanța de la punctul B la dreapta DE este egală cu 4 cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $AB=12\,\text{cm}$ și $VA=2\sqrt{34}\,\text{cm}$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD iar punctul M este mijlocul muchiei VD.



(2p) a) Arată că dreapta OM este paralelă cu planul (VBC).

(3p) b) Determină distanța de la punctul M la planul (VBC).

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI
ŞI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 5

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $2+3\cdot(4+5)$ este egal cu:

a) 19
b) 20
c) 29
d) 45

5p **2.** Știind că $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$, atunci rezultatul calculului $3x-2y$ este egal cu:

a) 0
b) 1
c) 5
d) 12

5p **3.** Suma numerelor întregi negative din intervalul $(-5;4]$ este egală cu:

a) -15
b) -10
c) 0
d) 10

5p **4.** Dintre numerele $\frac{2018}{2019}$, $\frac{2019}{2020}$, $\frac{2020}{2021}$ și $\frac{2021}{2022}$ cel mai mare este:

a) $\frac{2018}{2019}$ **b)** $\frac{2019}{2020}$ **c)** $\frac{2020}{2021}$ **d)** $\frac{2021}{2022}$.

5p **5.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $4\sqrt{2}$ și $2\sqrt{2}$ și au obținut rezultatele înregistrate în tabelul de mai jos.

Ana	4
Andrei	$3\sqrt{2}$
Anca	8
Alin	16

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică este:

a) Ana
b) Andrei
c) Anca
d) Alin

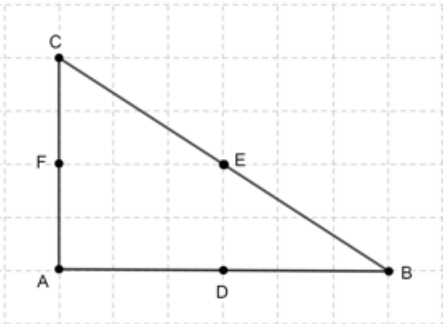
5p **6.** Ana are 14 ani, iar fratele ei are 10 ani. Ana afirmă că: „ Peste trei ani, suma dintre vârsta mea și a fratelui meu va fi egală cu 27 de ani ”. Afirmația Anei este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

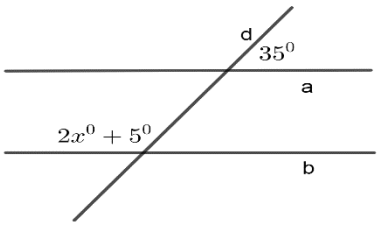
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC dreptunghic în A, iar punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Proiecția punctului E pe AC este punctul:



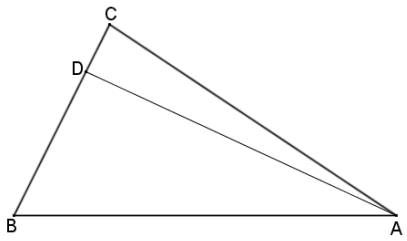
a) A
b) C
c) D
d) F

5p **2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt intersectate de secanta d, fiind evidențiate măsurile a două unghiuri de $35°$ și de $2x°+5°$. Valoarea lui x este de:



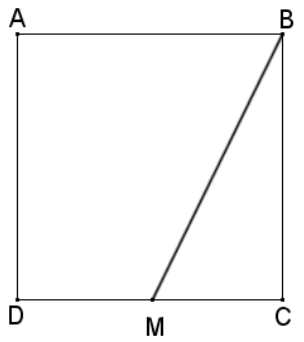
a) $15°$
b) $25°$
c) $70°$
d) $75°$

5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $\sphericalangle ABC = 60°$ și $\sphericalangle BAC = 40°$. Punctul D aparține dreptei BC, astfel încât distanța dintre punctul A și punctul D să fie minimă. Măsura unghiului $\sphericalangle DAC$ este de:



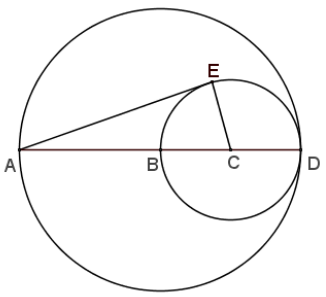
a) 10°
b) 30°
c) 80°
d) 90°

5p **4.** În figura alăturată este reprezentată schița unei foi de tablă în formă de pătrat $ABCD$, cu $AB = 2\,\text{m}$. Un tinichigiu vrea să taie din tablă o bucată în forma triunghiului BMC, unde punctul M aparține dreptei DC, astfel încât aria triunghiului BMC să fie un sfert din aria pătratului $ABCD$. Lungimea segmentului CM este egală cu:



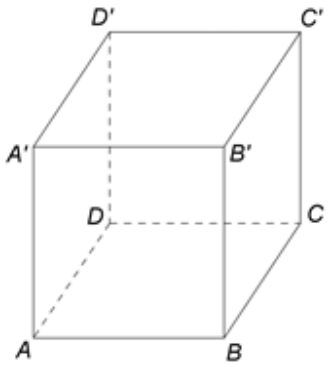
a) $0,25\,\text{m}$
b) $0,5\,\text{m}$
c) $1\,\text{m}$
d) $1,5\,\text{m}$

5p **5.** În figura alăturată, BD este raza cercului mare de centru B, $CD = 2\,\text{cm}$ este raza cercului mic de centru C, punctele A, B, C, D sunt coliniare și punctul E aparține cercului mic, astfel încât dreapta CE este perpendiculară pe dreapta AE. Distanța dintre punctele A și E este egală cu:



a) $4\,\text{cm}$
b) $4\sqrt{2}\,\text{cm}$
c) $4\sqrt{3}\,\text{cm}$
d) $6\,\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o cutie în formă de cub $ABCDEFGH$ care are suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu $60\,\text{cm}$. Volumul cutiei este egal cu:



a) $25\,\text{cm}^3$

b) $100\,\text{cm}^3$

c) $125\,\text{cm}^3$

d) $150\,\text{cm}^3$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Radu a citit în prima zi $\frac{1}{4}$ din cartea pe care a primit-o de ziua lui de la Andreea. A doua zi citește 27 de pagini și constată că a citit jumătate din paginile cărții.

(2p) a) Este posibil să aibă 100 de pagini cartea pe care a primit-o Radu de ziua lui de la Andreea? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul de pagini din cartea lui Radu.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=(x-1)^2-(x-2)^2+(1-x)^2-(2-x)^2$, unde x este număr real.

(3p) a) Arată că $E(x)=4x-6$, pentru orice număr real x.

(2p) b) Rezolvă în mulțimea numerelor reale inecuația: $2-E(x)\leq 0$.

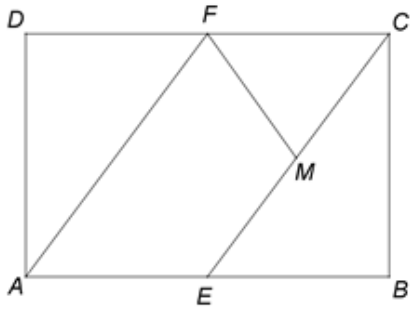
5p

3. Se consideră numerele reale $a=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right):\frac{1}{2}$ și $b=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$.

(2p) a) Arată că $a=\frac{16}{15}$.

(3p) b) Arată că numărul a este de 16 ori mai mare decât numărul b.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentată schița unui teren agricol în formă de dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 600\,\text{m}$ și $AD = 400\,\text{m}$. Punctul E este mijlocul laturii AB, punctul F este mijlocul laturii CD și punctul M este mijlocul segmentului CE.

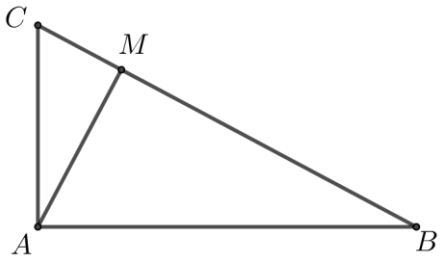


(2p) a) Arată că perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu $2000\,\text{m}$.

(3p) b) Arată că aria patrulaterului $AEMF$ este de trei ori mai mare decât aria triunghiului CFM.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, iar punctul M este proiecția punctului A pe BC. Lungimea segmentului BM este de 16cm, iar lungimea segmentului CM este de 4cm.

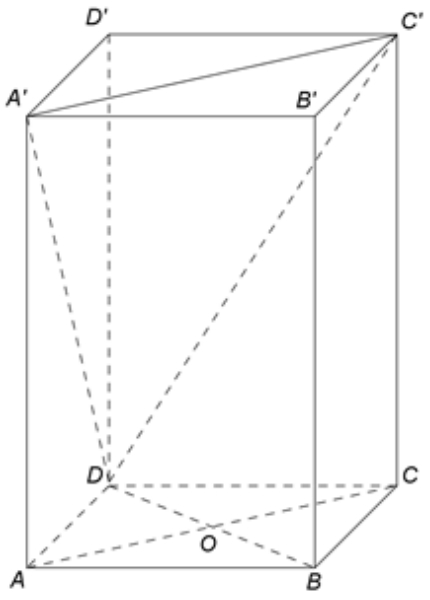
(2p) a) Arată că $AM = 8\text{cm}$.



(3p) b) Demonstrează că perimetrul triunghiului ABC este mai mare decât 44cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$. Punctul O este intersecția dreptelor AC și BD, $AB = 8\text{cm}$ și $AA' = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$.

(2p) a) Demonstrează că dreptele $A'C$ și AC' sunt perpendiculare.



(3p) b) Demonstrează că dreapta OB' este paralelă cu planul $(A'C'D)$.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 6

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $44-4\cdot 4$ este egal cu:

a) 0
b) 28
c) 60
d) 160

5p **2.** Dacă $\frac{3}{x+1}=\frac{1}{674}$, atunci numărul real x este egal cu:

a) 3
b) 674
c) 2021
d) 2022

5p **3.** Produsul numerelor -18 și 3 este egal cu:

a) -54
b) -21
c) -15
d) -6

5p **4.** În tabelul de mai jos este prezentată oferta cu reduceri de prețuri pentru două produse, în funcție de numărul de produse cumpărate.

Produse	Preț la cumpărarea unei bucăți	Reducerea acordată la cumpărarea a 4 bucăți	Reducerea acordată la cumpărarea a 8 bucăți
Săpun	$2,5$ lei	10%	12%
Pastă de dinți	8 lei	20%	25%

Știind că un cumpărător a achiziționat 8 bucăți de săpun și 4 bucăți de pastă de dinți, prețul total plătit de acesta în urma aplicării reducerilor este:

a) $49,6$ lei
b) $45,6$ lei
c) $43,2$ lei
d) 32 lei

5p **5.** Maria scrie mulțimea formată din literele comune următoarelor trei cuvinte: *matematică*, *gramatică*, *informatică*. Numărul elementelor mulțimii scrise de Maria este egal cu:

a) 11
b) 10
c) 9
d) 6

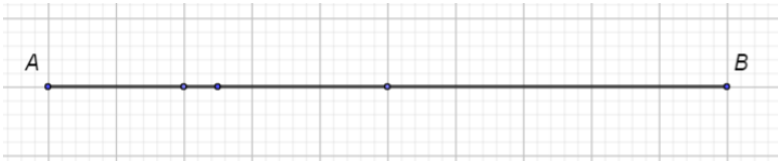
5p **6.** Dintre următoarele secvențe de numere, cea care reprezintă o enumerare în ordine crescătoare este:

a) $-\sqrt{2},\ -2,\ 2,\ \sqrt{2}$
b) $-\sqrt{2},\ -2,\ \sqrt{2},\ 2$
c) $-2,\ -\sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{2}$
d) $-2,\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2$

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele distincte A și B. Andrei trebuie să poziționeze pe segmentul AB punctele C, D și E astfel încât $AB = 2 \cdot AC = 4 \cdot AD = 5 \cdot AE$. Ordinea pe dreapta AB a celor 5 puncte este:

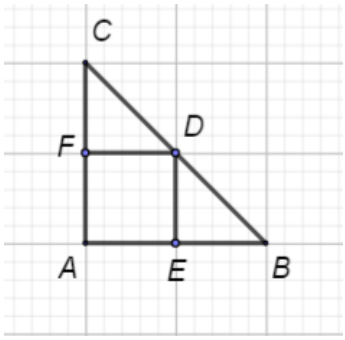


a) $A-C-D-E-B$
b) $A-E-D-C-B$
c) $A-C-E-D-B$
d) $A-E-C-D-B$

5p **2.** Unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare, iar măsura unghiului BOC este de $30°$. Măsura unghiului AOB este egală cu:

a) $15°$
b) $30°$
c) $45°$
d) $60°$

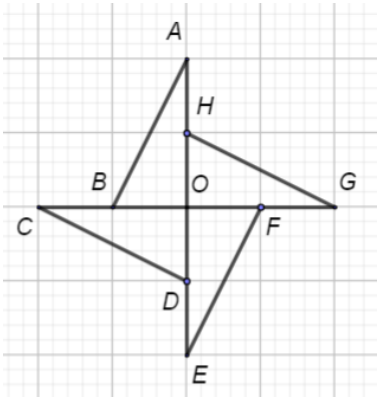
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic isoscel ABC cu ipotenuza BC. Punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor BC, AB, respectiv AC.



Perimetrul patrulaterului $AEDF$ este:

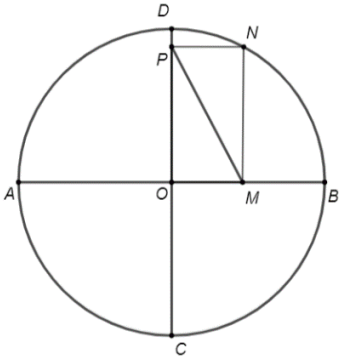
a) egal cu suma lungimilor laturilor AB și AC
b) mai mare decât suma lungimilor laturilor AB și AC
c) mai mic decât suma lungimilor laturilor AB și AC
d) mai mic decât lungimea laturii BC

5p **4.** În figura alăturată este reprezentată o morișcă despre care știm că este compusă din patru triunghiuri dreptunghice, congruente, AOB, COD, EOF și GOH, dispuse astfel încât punctele B, D, F și H sunt mijloacele segmentelor OC, OE, OG, respectiv OA. Știind că $AH = 10\,\text{cm}$ și că cele patru triunghiuri au fost decupate dintr-un carton, fără pierderi de material, aria suprafeței cartonului era egală cu:



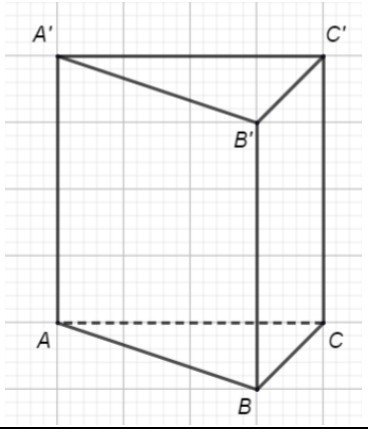
a) 1dm^2
b) 4dm^2
c) 10dm^2
d) 40dm^2

5p **5.** Segmentele AB și CD sunt două diametre perpendiculare în cercul de centru O din figura alăturată. Punctul N aparține acestui cerc, iar punctele M și P aparțin segmentelor OB, respectiv OD, astfel încât patrulaterul $OMNP$ să fie dreptunghi. Dacă lungimea coardei AC este $\sqrt{2}\,\text{cm}$, atunci lungimea segmentului MP este:



a) 2 cm
b) 1 cm
c) 0,5 cm
d) $\sqrt{2}$ cm

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, de baze ABC și $A'B'C'$, cu muchiile AB și AA' egale. Știind că aria laterală a prismei reprezentate este egală cu $27\,\text{cm}^2$, volumul aceleiași prisme este egal cu:



a) 3cm^3

b) 9cm^3

c) $\frac{27\sqrt{3}}{4}\text{cm}^3$

d) 27cm^3

SUBIECTUL al III-lea ***Scrieți rezolvările complete.*** **(30 de puncte)**

5p **1.** Pe un lot cu suprafața de $48\,\text{m}^2$, un agricultor a cultivat cartofi. Întreaga recoltă obținută o vinde la piață cu $1{,}85\,\text{lei}$ kilogramul și încasează $266{,}40$ lei.

(2p) a) Verifică dacă întreaga recoltă este de $150\,\text{kg}$ de cartofi.

(3p) b) Află câte kilograme de cartofi au fost recoltate de pe un metru pătrat. (*Se consideră că producția este aceeași pe fiecare metru pătrat al lotului.*)

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=2(x+3)^2-(2+x)(x-2)-2(5x+7)$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(-2)-8=0$.

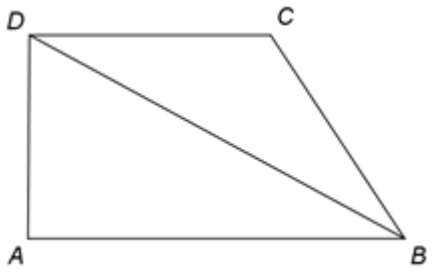
(3p) b) Demonstrează că $E(x) \geq 7$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Se consideră numărul întreg $a = 2^{2048} - 2048^2$.

(2p) a) Arată că la împărțirea numărului 2048 cu 64 câtul este egal cu 2^5.

(3p) b) Arată că numărul a este un număr natural.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AD \perp AB$ și $AB \parallel CD$. Semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC, $AB = 16\,\text{cm}$ și $CD = 10\,\text{cm}$.

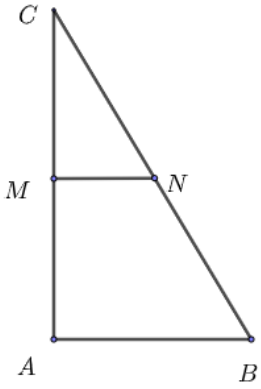


(2p) a) Știind că $E \in AB$ astfel încât $CE \perp AB$, demonstrează că $BE = 6\,\text{cm}$.

(3p) b) Știind că P este punctul de intersecție a laturii AB cu perpendiculara din C pe dreapta BD, demonstrează că $DP \parallel BC$.

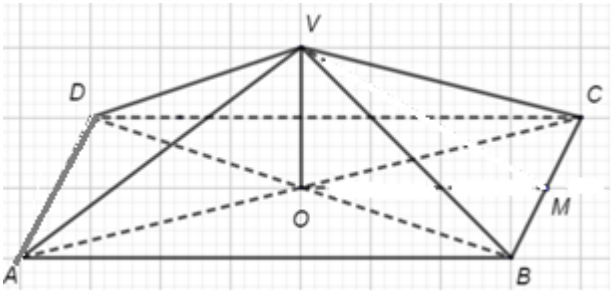
5p **5.** În figura alăturată punctele M și N sunt mijloacele laturilor AC, respectiv BC ale unui triunghi ABC dreptunghic în A, cu $BC = 24\,\text{cm}$ și măsura unghiului C egală cu $30°$.

(**2p) a)** Determină lungimea segmentului MN.



(3p) b) Calculează raportul dintre perimetrul triunghiului AMN și perimetrul triunghiului ABC.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat acoperișul unei case sub forma suprafeței laterale a piramidei patrulatere regulate $VABCD$, de înălțime $VO = 3\,\text{m}$, în care unghiul de înclinație a acoperișului, adică unghiul dintre planul unei fețe laterale și planul bazei are măsura egală cu $30°$. Punctul M este mijlocul muchiei BC.



(2p) a) Arată că $AB = 6\sqrt{3}\,\text{m}$.

(3p) b) Știind că acoperișul este realizat din tablă și că proprietarul casei dorește să-l vopsească într-un singur strat cu vopsea specială pentru tablă care se vinde la bidon de 3 litri care costă 125 de lei și care, conform specificațiilor producătorului, acoperă 12m^2 la utilizarea unui litru, determină prețul minim pe care trebuie să-l achite proprietarul pentru cumpărarea cantității de vopsea necesară la bidon de 3 litri. (*Pentru justificare, se poate folosi inegalitatea* $1,73<\sqrt{3}<1,74$.)

MINISTERUL EDUCAȚIEI

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ȘI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 7

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Câtul împărțirii numărului 62 la 12 este numărul:

a) 2
b) 5
c) 12
d) 62

5p **2.** Dacă $3a=2b$ și $b\neq 0$, atunci $\frac{a}{b}$ este egal cu:

a) $\frac{3}{1}$ **b)** $\frac{2}{1}$ **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** $\frac{2}{3}$

5p **3.** Numărul a este un element din mulțimea $\{-8,-5,0,1\}$. Cea mai mică valoare pe care o poate avea expresia $|a+3|$ este egală cu:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5

5p **4.** Diferența dintre numerele $\frac{3}{2}$ și $0,25$, în această ordine, este egală cu:

a) -1 **b)** 1 **c)** $\frac{5}{4}$ **d)** $\frac{7}{4}$

5p **5.** Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\leq 2\}$ este egală cu:

a) $[2,+\infty)$
b) $(-\infty,2]$
c) $(-\infty,-2]$
d) $[-2,2]$

5p **6.** Andra, Sorin, Teo și Bogdan aleg câte un număr real, alegerile fiind evidențiate în tabelul de mai jos:

Andra	Sorin	Teo	Bogdan
$\sqrt{7}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{3}$

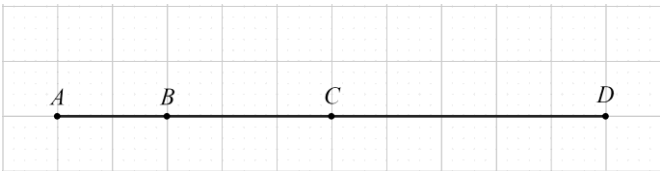
Toți cei care au ales număr mai mare decât 2 sunt:

a) Andra, Sorin și Teo
b) Sorin, Teo și Bogdan
c) Andra, Sorin și Bogdan
d) Andra, Teo și Bogdan

SUBIECTUL al II-lea

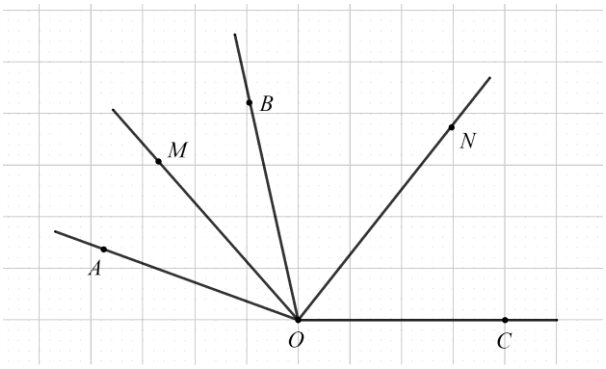
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare, distincte, A, B, C și D, în această ordine. Punctul D este simetricul punctului A față de punctul C, $AB=2\text{cm}$ și $BC=3\text{cm}$. Lungimea segmentului AD este egală cu:



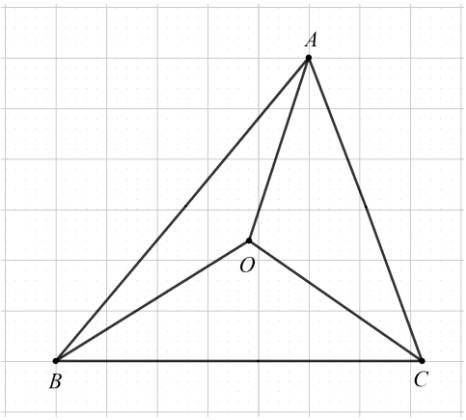
a) 4cm
b) 5cm
c) 8cm
d) 10cm

5p **2.** În figura alăturată semidreptele OM și ON sunt bisectoarele unghiurilor adiacente AOB, respectiv BOC, iar suma măsurilor unghiurilor AOB și BOC este egală cu 160°. Măsura unghiului MON este egală cu:



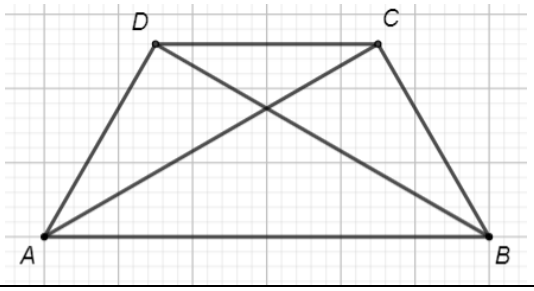
a) 40°
b) 80°
c) 90°
d) 100°

5p **3.** În figura alăturată punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, măsura unghiului AOB este de 140° și măsura unghiului BOC este de 120°. Măsura unghiului ABC este:



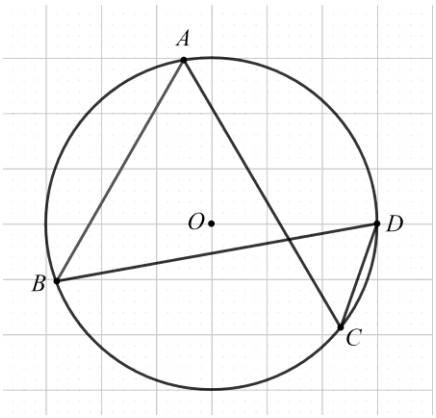
a) 50°
b) 60°
c) 70°
d) 80°

5p **4.** Trapezul isoscel $ABCD$ din figura alăturată reprezintă schița unui parc, $AB\|\|CD$, $AB=2,5\text{km}$, $BD=2\text{km}$ și $BC=1,5\text{km}$. Segmentele AD, BC, AC, BD și AB reprezintă piste pentru biciclete. Tudor pornește din punctul A și parcurge, o singură dată, traseul format din segmentele AB, BC și CA, ajungând, la final, tot în punctul A. Lungimea traseului parcurs de Tudor este egală cu:



a) 4km
b) $5,5\text{km}$
c) 6km
d) $6,5\text{km}$

5p **5.** În figura alăturată punctele distincte A, B, C și D aparțin cercului de centru O, astfel încât punctele A și D sunt de aceeași parte a dreptei BC. Unghiul BAC are măsura de $60°$. Măsura unghiului BDC este de:



a) $30°$
b) $60°$
c) $90°$
d) $120°$

5p **6.** Un acvariu este plin cu apă. În acvariu se scufundă complet 8 cuburi de piatră cu muchia de $0,5\text{dm}$. Din acvariu se varsă o cantitate de apă egală cu:

a) $0,5\text{litri}$
b) 1litru
c) $1,25\text{litri}$
d) 8litri

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât suma lor este egală cu 1, iar media aritmetică a numerelor b și c este egală cu $0,25$.

(2p) a) Arată că numărul a este egal cu suma dintre b și c.

(3p) b) Știind, în plus, că media geometrică a lui a și $5b$ este 1, determină suma pătratelor numerelor a, b și c, exprimând rezultatul sub formă de fracție zecimală.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2-x\left(\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(1-\sqrt{2}\right)x$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(0)=2$.

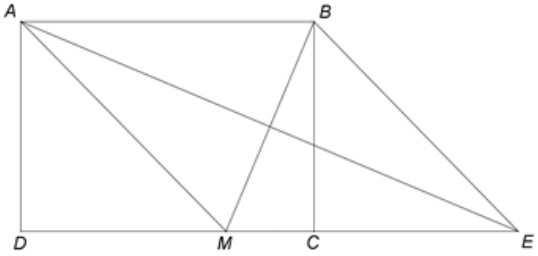
(3p) b) Arată că numărul $N=E(n)+2\cdot E(2n)+1485$ este divizibil cu 7, pentru orice număr întreg n.

5p **3.** Se consideră numerele $x=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{3}{2}$ și $y=16^2:\left(2^2\right)^3:2$.

(2p) a) Arată că $x=1$.

(3p) b) Arată că $(x-y)^{2022}+(x-y)^{2021}=0$.

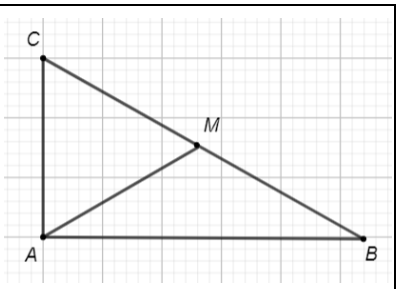
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB=14\text{cm}$ şi $AD=10\text{cm}$. Punctul M este situat pe latura CD astfel încât $AM=AB$. Bisectoarea unghiului BAM intersectează dreapta CD în punctul E.



(2p) a) Arată că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 140cm^2.

(3p) b) Demonstrează că patrulaterul $AMEB$ este romb.

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A. Punctul M este mijlocul ipotenuzei BC, $AM = 6\,\text{cm}$ și $\cos C = \frac{1}{2}$.

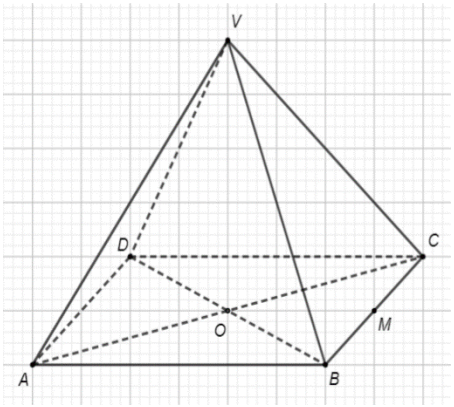


(**2p) a)** Determină măsura unghiului ABC.

3p) b) Arată că suma distanțelor de la vârfurile triunghiului ABC la laturile opuse acestora este mai mare decât 21.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $AB = VA = 6\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul muchiei BC.

(2p) a) Arată că apotema piramidei $VABCD$ are lungimea de $3\sqrt{3}\,\text{cm}$.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul M la planul (VAB).

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

Testul 8

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $20-20:4$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 4 **c)** 15 **d)** 20
5p	**2.** Dacă $\frac{30}{100}\cdot x=3$, atunci x este egal cu: **a)** $0,9$ **b)** 10 **c)** 30 **d)** 100
5p	**3.** Suma dintre cel mai mare element și cel mai mic element ale mulțimii $A=\{-5;-4;-2;0;8;9;12\}$ este egală cu: **a)** -17 **b)** -7 **c)** 7 **d)** 17
5p	**4.** Dintre numerele $18,09$; $18,1$; $18,099$ și $18,0999$, cel mai mare este: **a)** $18,09$ **b)** $18,1$ **c)** $18,099$ **d)** $18,0999$
5p	**5.** Se consideră mulțimea $B=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle\|\,\left\|x-2\right\|\le 1\right\}$. Dintre următoarele mulțimi, cea care reprezintă scrierea mulțimii B prin enumerarea elementelor sale este: **a)** $\{1,2,3\}$ **b)** $\{0,1,2,3\}$ **c)** $\{0,1,2\}$ **d)** $\{1,2\}$
5p	**6.** Pentru a organiza festivitățile pentru ziua școlii, se hotărăște ca orele de curs să dureze câte 40 de minute, iar pauzele dintre ore câte 5 minute. Programul începe la ora 8,00, iar clasa a VIII-a are șase ore de curs. Astfel, afirmația „Elevii clasei a VIII-a vor termina cele șase ore de curs la ora 12 și 25 de minute.” este: **a)** adevărată **b)** falsă

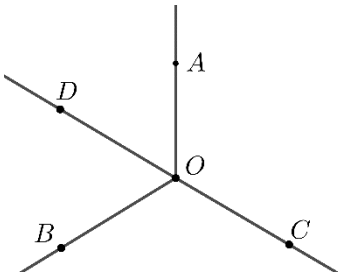
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E, care sunt coliniare în această ordine, astfel încât $AB=1\text{cm}$, $BC=2\text{cm}$, $CD=3\text{cm}$ și $DE=4\text{cm}$. Punctul C este mijlocul segmentului:

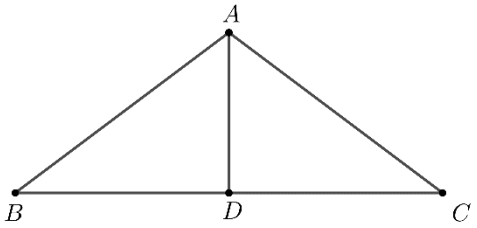
a) AD
b) AE
c) BD
d) BE

5p **2.** În figura alăturată unghiurile AOB, BOC și COA, formate în jurul punctului O, au măsurile egale, iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOB. Măsura unghiului COD este egală cu:



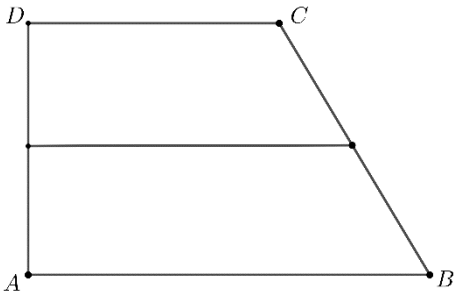
a) 60°
b) 90°
c) 120°
d) 180°

5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu baza BC. Punctul D este mijlocul segmentului BC, $AD=3\text{cm}$ și $BD=4\text{cm}$. Aria triunghiului ABC este egală cu:



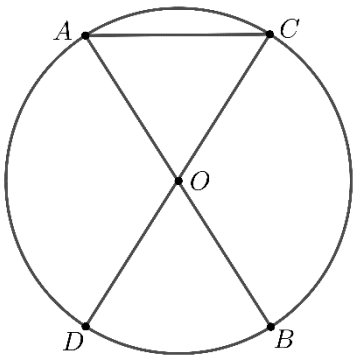
a) 6cm^2
b) 12cm^2
c) 24cm^2
d) 30cm^2

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic $ABCD$ cu $AD\perp AB$, $AB\|CD$, $AB=160\text{cm}$ și $CD=100\text{cm}$. Linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu:



a) 100cm
b) 130cm
c) 160cm
d) 260cm

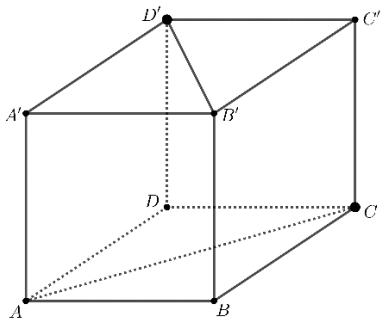
5p **5.** În figura alăturată AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, măsura arcului mic AC este de $60°$, iar lungimea coardei AC este egală cu 6cm. Aria cercului de centru O și rază OA este egală cu:



a) $6\pi\text{cm}^2$
b) $16\pi\text{cm}^2$
c) $18\pi\text{cm}^2$
d) $36\pi\text{cm}^2$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului dreptelor $B'D'$ și AC este egală cu:

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dublul unui număr întreg n este cu 6 mai mare decât jumătatea acestui număr.

(2p) a) Este posibil ca n să fie egal cu 8 ? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul natural m al cărui pătrat este n.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=2(x+3)^2-(2+x)(x-2)-2(5x+7)-7$, unde x este număr real.

(3p) a) Arată că $E(\sqrt{3}-1)=3$.

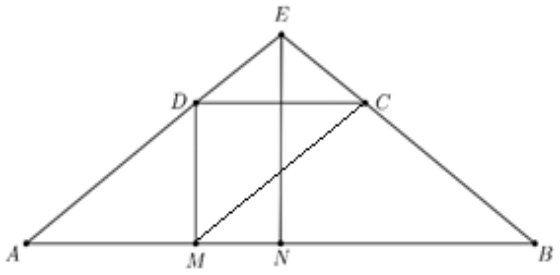
(2p) b) Demonstrează că $E(-1)\cdot E(0)\cdot E(1)\cdot E(2)\cdot ...\cdot E(2021)=0$.

5p **3.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

(2p) a) Arată că punctul $A\left(\sqrt{3}+\frac{3}{2},\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f în sistemul de coordonate xOy.

(3p) b) Demonstrează că dreapta ce trece prin originea sistemului de coordonate xOy și prin mijlocul segmentului cu capetele în punctele de intersecție ale reprezentării geometrice a graficului funcției f cu axele de coordonate este perpendiculară pe acest segment.

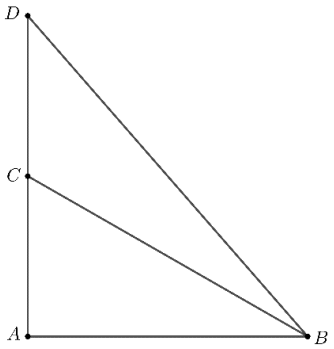
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB = 24\text{cm}$, $CD = 8\text{cm}$ şi $AD = 10\text{cm}$. Dreptele AD și BC se intersectează în punctul E, iar punctele M și N sunt situate pe dreapta AB astfel încât $DM \perp AB$ și $EN \perp AB$.



(2p) a) Arată că segmentul EN este de lungime 9cm.

(3p) b) Știind că G este punctul de intersecție a dreptelor EN și MC, demonstrează că G este centrul de greutate al triunghiului ABE.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în A, în care măsura unghiului B este de $30°$ și $AC=12\text{cm}$. Punctul D este simetricul punctului A față de punctul C.

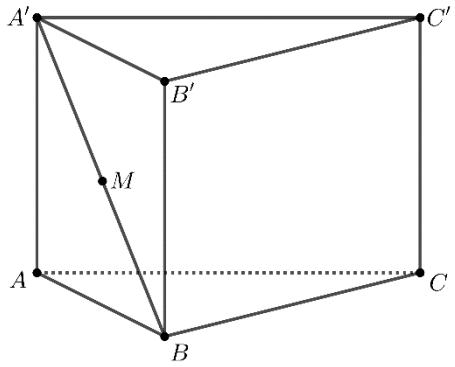


(**2p) a)** Arată că aria triunghiului ABC este egală cu $72\sqrt{3}\text{cm}^2$.

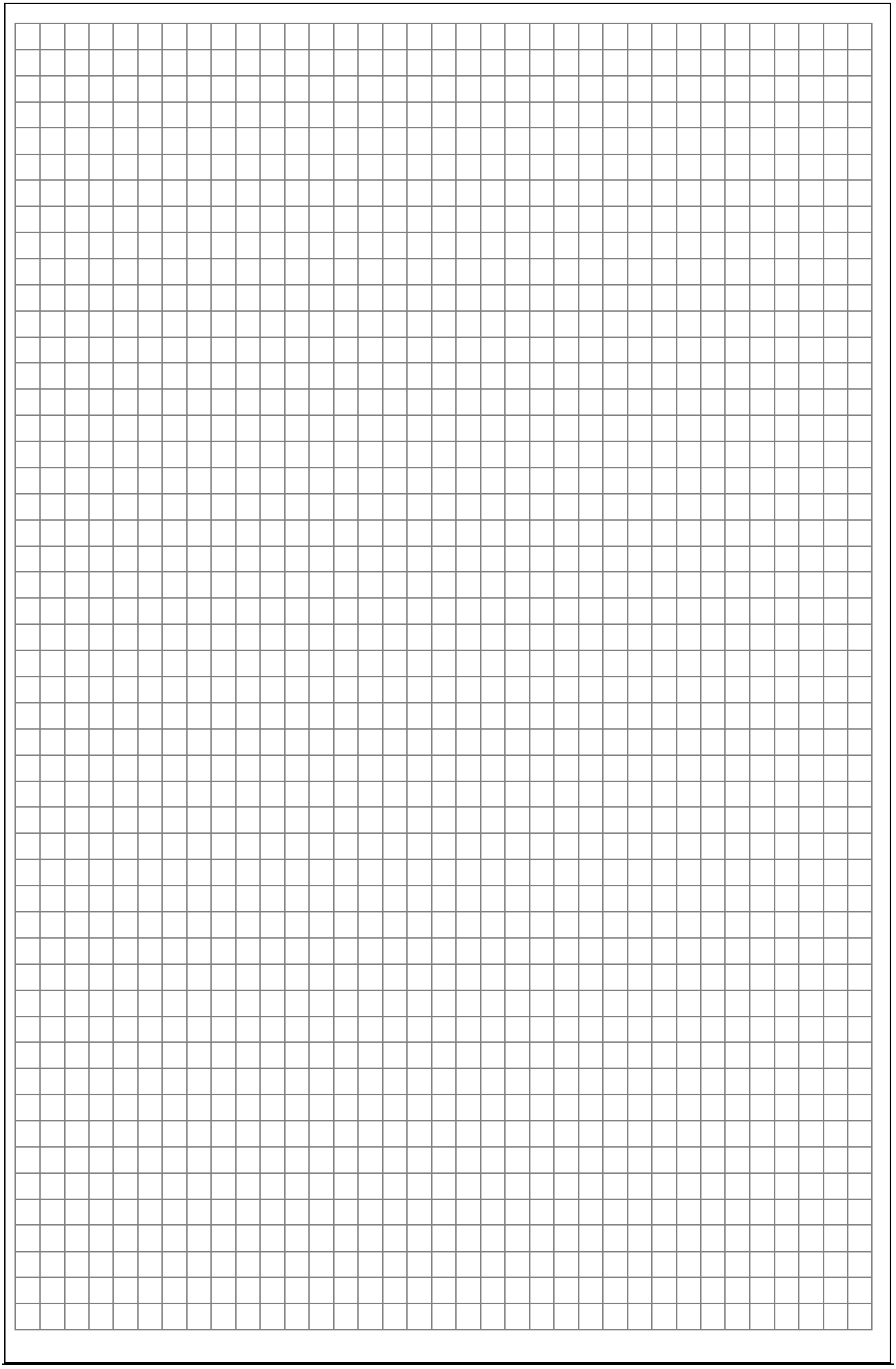
3p) b) Calculează distanța de la punctul D la dreapta BC.

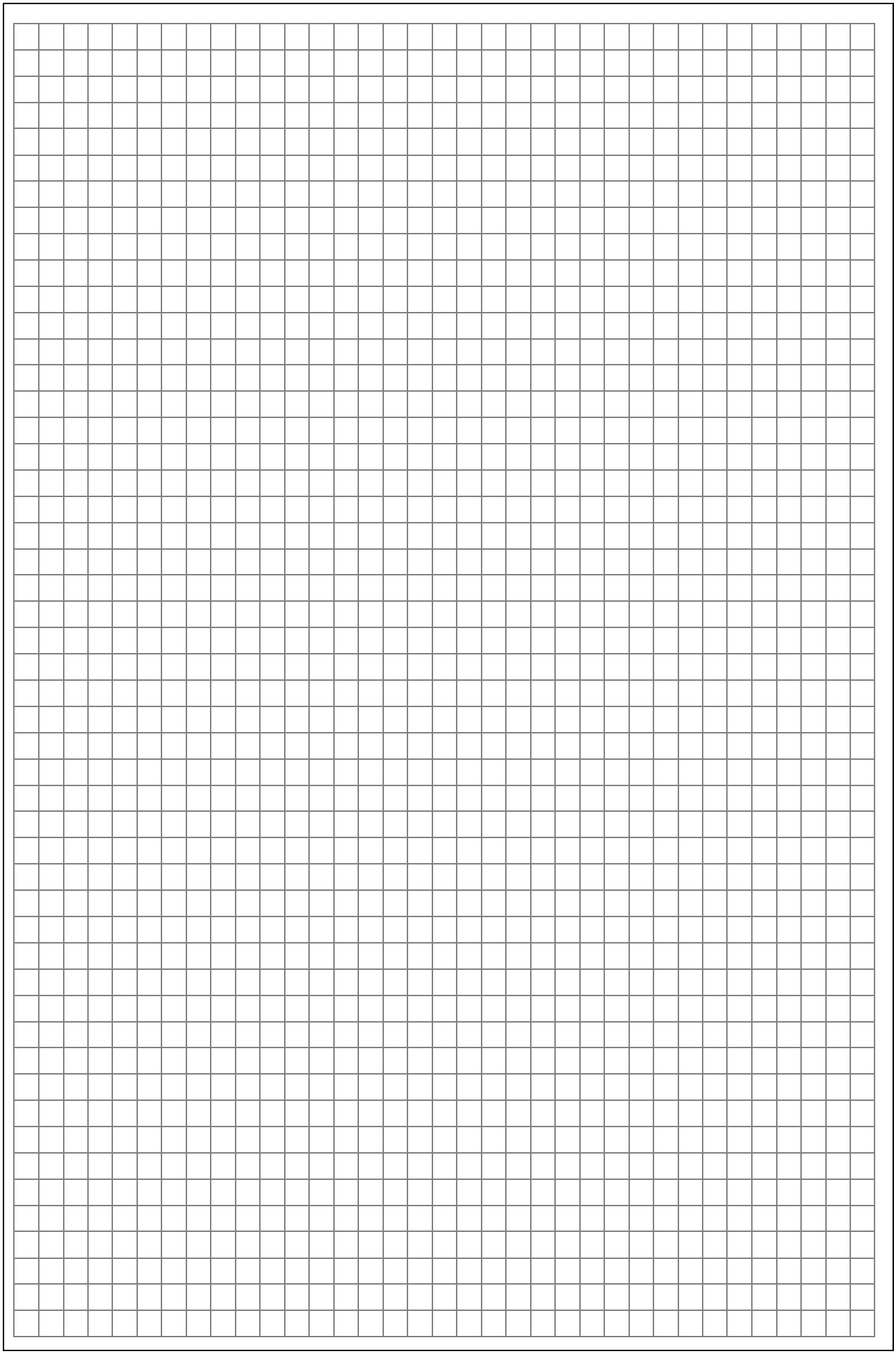
5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, $AB=12\,\text{cm}$, $AA'=12\sqrt{3}\,\text{cm}$ și punctul M este mijlocul segmentului $A'B$.

(2p) a) Arată că suma lungimilor tuturor muchiilor prismei date este egală cu $36\left(2+\sqrt{3}\right)\text{cm}$.



(3p) b) Determină sinusul unghiului dintre planele (MBC) și $(MB'C')$.





Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……..……..……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2020 – 2021

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Cel mai mare număr natural de două cifre, multiplu al numărului 20, este egal cu:
a) 20
b) 80
c) 99
d) 100

5p **2.** Dacă $\frac{x}{4}=\frac{5}{2}$, atunci x este egal cu:
a) 2
b) 5
c) 10
d) 20

5p **3.** Rezultatul calculului $8+2\cdot 4$ este egal cu:
a) 40
b) 16
c) 14
d) 0

5p **4.** Într-o școală, 400 de elevi au ales culoarea favorită, prin intermediul unui chestionar. Opțiunile tuturor elevilor au fost înregistrate, în raport procentual din numărul total, în tabelul de mai jos.

Culoarea aleasă	albastru	roșu	galben	verde	altele
Raport procentual	25%	35%	14%	$x\%$	20%

Conform informațiilor din tabel, numărul elevilor care au ales culoarea verde este egal cu:
a) 6
b) 16
c) 24
d) 80

5p **5.** Patru elevi, Alina, Bianca, George și Iosif, adună numărul $a=3+5\sqrt{2}$ cu numărul $b=5-5\sqrt{2}$ și obțin următoarele rezultate:

Alina	$8-10\sqrt{2}$
Bianca	4
George	8
Iosif	$8+10\sqrt{2}$

Dintre cei patru elevi, cel care a efectuat corect adunarea este:
a) Alina
b) Bianca
c) George
d) Iosif

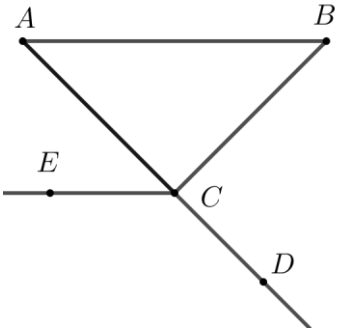
5p **6.** Se consideră intervalul de numere reale $I=(3,4]$. Mircea afirmă că: „Numărul $3\sqrt{2}$ aparține intervalului I.”. Afirmația lui Mircea este:
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

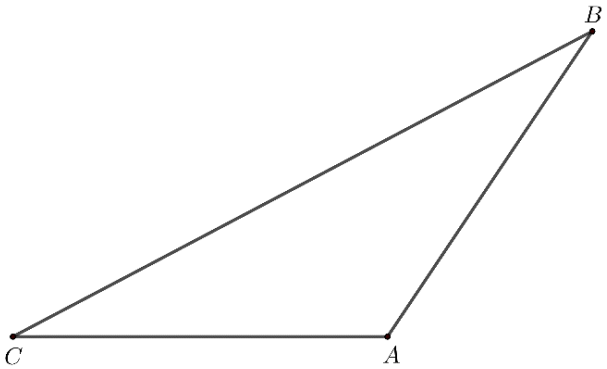
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $AC=4$ cm și $BD=8$ cm. Punctul B este mijlocul segmentului AC. Lungimea segmentului CD este egală cu:
a) 4 cm
b) 6 cm
c) 10 cm
d) 12 cm

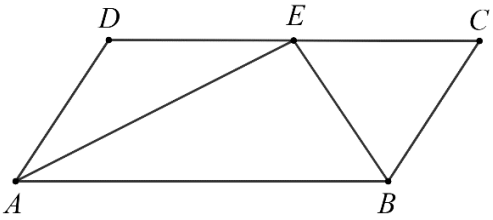
5p **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, cu măsura unghiului B de 45°. Punctele A, C și D sunt coliniare în această ordine. Dreptele EC și AB sunt paralele și măsura unghiului ECD este egală cu 135°. Măsura unghiului ACB este egală cu:
a) 45°
b) 80°
c) 90°
d) 100°



5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC. Măsura unghiului BAC este egală cu 120° și $AC=6$cm. Lungimea laturii BC este egală cu:
a) $3\sqrt{3}$cm
b) 3 cm
c) 6 cm
d) $6\sqrt{3}$cm

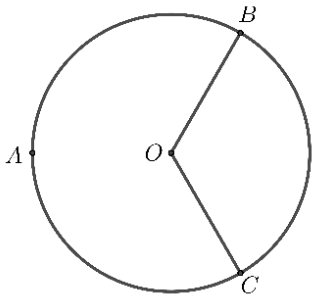


5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu $AD = 3\text{cm}$, în care punctul E se află pe latura DC astfel încât AE este bisectoarea unghiului DAB și BE este bisectoarea unghiului ABC. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu:



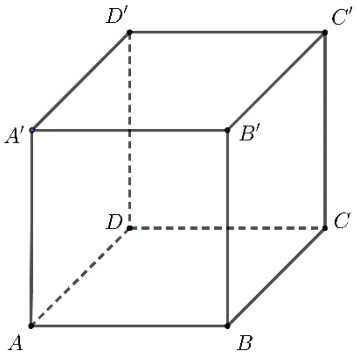
a) 18 cm
b) 15 cm
c) 12 cm
d) 9 cm

5p **5.** În figura alăturată, punctele A, B și C sunt situate pe cercul de centru O, astfel încât arcele mici AB, BC și CA sunt congruente. Măsura unghiului BOC este egală cu:



a) 120°
b) 90°
c) 60°
d) 30°

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Suma lungimilor tuturor muchiilor cubului este egală cu 120 cm. Aria totală a cubului este egală cu:



a) 100 cm^2
b) 400 cm^2
c) 600 cm^2
d) 1000 cm^2

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un automobil a parcurs distanța dintre două orașe în trei zile. În prima zi a parcurs $\frac{3}{10}$ din distanță și încă 13 km. În a doua zi a parcurs $\frac{2}{5}$ din distanța rămasă după prima zi. În a treia zi a parcurs restul distanței, adică 93 de km.

(2p) a) Este posibil ca distanța parcursă a doua zi să fie egală cu 60 km? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină distanța dintre cele două orașe.

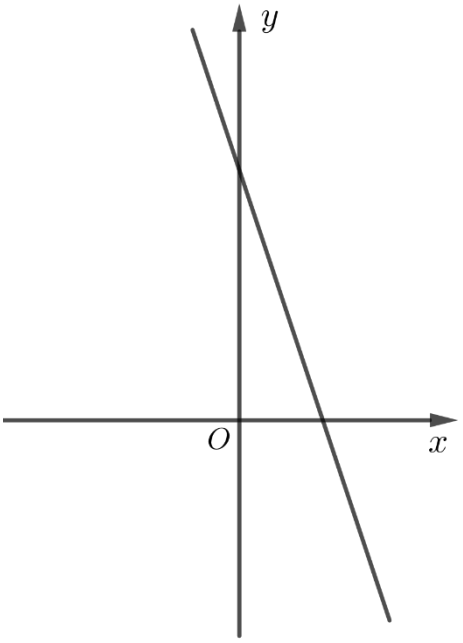
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(x+4)^2+(x-1)^2-\left(\sqrt{2}x+3\right)\left(\sqrt{2}x-3\right)$, unde x este număr real.

(2p) a) Demonstrează că $E(x)=6x+26$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Calculează $A-B$, unde $A=E(1)+E(3)+...+E(11)$ și $B=E(2)+E(4)+...+E(10)$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+5$.

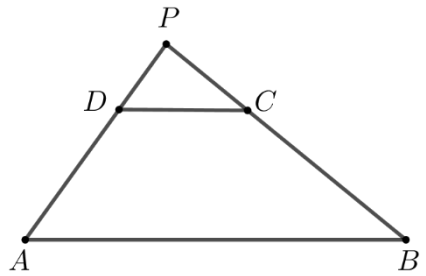
(2p) a) Arată că $f(3)+f(0)=1$.



(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctele A și B situate pe reprezentarea geometrică a graficului funcției f. Știind că punctul A are abscisa 3 și punctul B are ordonata 5, determină distanța dintre punctele A și B.

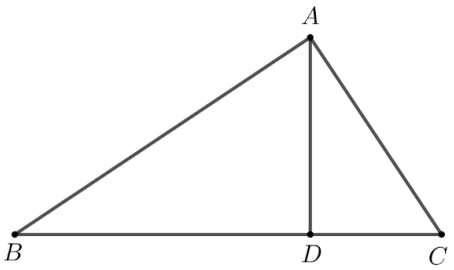
5p **4.** Se consideră trapezul $ABCD$, cu $AB \| CD$, $AB = 15$ cm, $CD = 5$ cm, $BC = 8$ cm și $AD = 6$ cm. Dreptele AD și BC se intersectează în punctul P.

(2p) a) Arată că lungimea segmentului PD este egală cu 3 cm.



(3p) b) Determină cât la sută reprezintă aria triunghiului PCD din aria trapezului $ABCD$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AC = 40$ cm. Dreptele AD și BC sunt perpendiculare, punctul D aparține dreptei BC și $\frac{CD}{AD} = \frac{3}{4}$.

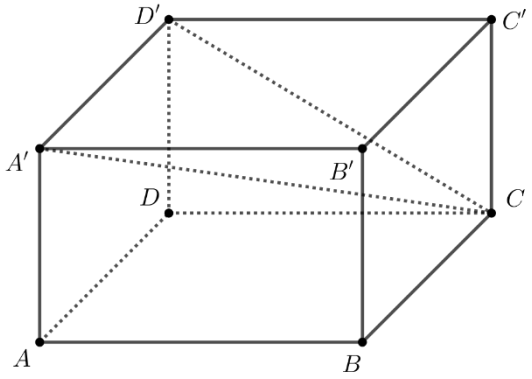


(2p) a) Arată că $AD = 32\,\text{cm}$.

(3p) b) Calculează perimetrul triunghiului ABC.

5p **6**. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $BC = 6$ cm și măsura unghiului $D'CA'$ egală cu $30°$.

(2p) a) Arată că $DD' = 6$ cm.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul A la planul $(A'D'C)$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……..……..……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2020 – 2021

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dintre numerele 15, 17, 25 și 30, numărul divizibil cu 10 este:

a) 15
b) 17
c) 25
d) 30

5p **2.** Un obiect costă 100 de lei. După o scumpire cu 10%, noul preț al obiectului este egal cu:

a) 10 lei
b) 90 de lei
c) 100 de lei
d) 110 lei

5p **3.** Temperaturile aerului măsurate de Maria, într-o zi, la ora $8:00$ și la ora $12:00$, sunt înregistrate în tabelul de mai jos.

Ora	$8:00$	$12:00$
Temperatura	$-3^\circ C$	$5^\circ C$

Conform informațiilor din tabel, temperatura măsurată la ora $12:00$ este mai mare decât temperatura măsurată la ora $8:00$ cu:

a) $8^\circ C$
b) $2^\circ C$
c) $-2^\circ C$
d) $-8^\circ C$

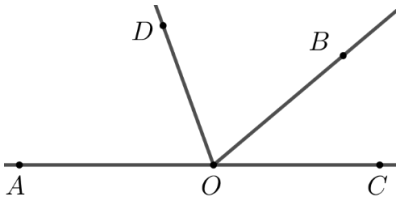
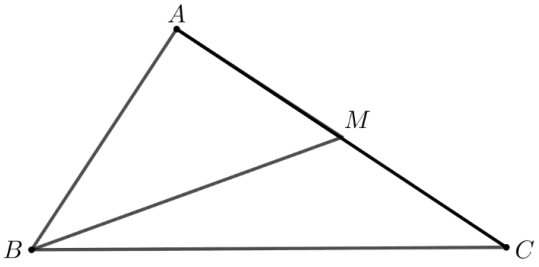
5p **4.** Fracția subunitară din mulțimea $A=\left\{\frac{44}{10}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, 4\right\}$ este:

a) $\frac{4}{5}$ **b)** $\frac{5}{4}$ **c)** 4 **d)** $\frac{44}{10}$

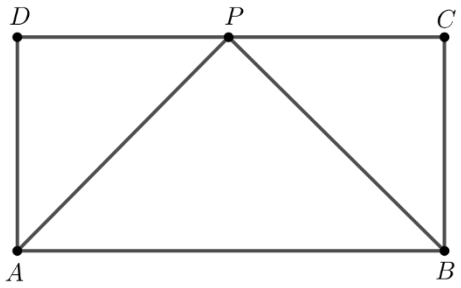
5p	**5.** Rezultatul calculului $2\sqrt{2}-6\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ este egal cu: **a)** $11\sqrt{2}$ **b)** $-4\sqrt{2}$ **c)** $-\sqrt{6}$ **d)** $-\sqrt{2}$
5p	**6.** Bunica lui Andrei are în curte 10 găini și de două ori mai multe rațe. Andrei afirmă că: „Bunica are în curte 10 găini și 20 de rațe.”. Afirmația lui Andrei este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

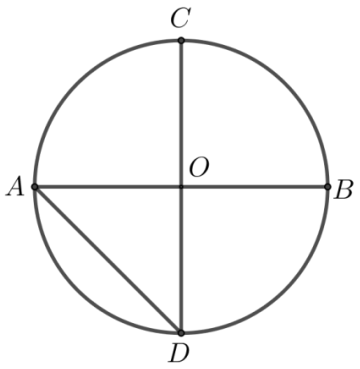
5p	**1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele distincte A, B, C și D. Punctul B este mijlocul segmentului AC și punctul C este mijlocul segmentului AD. Valoarea raportului $\frac{BD}{AB}$ este egală cu: **a)** 3 **b)** 2 **c)** $0,75$ **d)** $0,50$
5p	**2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile AOB și BOC, adiacente suplementare, semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOB și măsura unghiului BOC este de $40°$. Măsura unghiului BOD este egală cu: **a)** $70°$ **b)** $60°$ **c)** $40°$ **d)** $30°$ 
5p	**3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB=4$ cm și $AC=6$ cm. Punctul M este mijlocul laturii AC. Lungimea segmentului BM este egală cu: **a)** 3 cm **b)** 4 cm **c)** 5 cm **d)** 6 cm 

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 6\text{ cm}$ și $BC = 3\text{ cm}$. Bisectoarea unghiului BAD intersectează latura DC în punctul P. Măsura unghiului APB este egală cu:



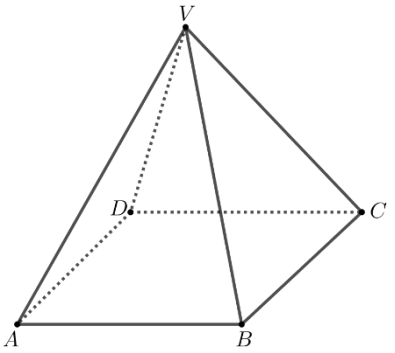
a) $135°$
b) $90°$
c) $60°$
d) $45°$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și raza de 2 cm, unde AB și CD sunt diametre perpendiculare. Distanța de la punctul C la dreapta AD este egală cu:



a) 2 cm
b) $2\sqrt{2}\text{ cm}$
c) $2\sqrt{3}\text{ cm}$
d) 4 cm

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu baza $ABCD$ și $VA = AB = 4\text{ cm}$. Aria laterală a piramidei $VABCD$ este egală cu:



a) 16 cm^2
b) $16\sqrt{2}\text{ cm}^2$
c) $16\sqrt{3}\text{ cm}^2$
d) 32 cm^2

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un turist a parcurs un traseu în trei zile. În a doua zi a parcurs cu 6 km mai puțin decât în prima zi, iar în a treia zi 50% din distanța parcursă în primele două zile.

(2p) a) Este posibil ca distanța parcursă de turist în primele două zile să reprezinte 50% din lungimea întregului traseu? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Știind că turistul a parcurs în a treia zi $9\ \text{km}$, determină lungimea traseului parcurs în prima zi.

5p

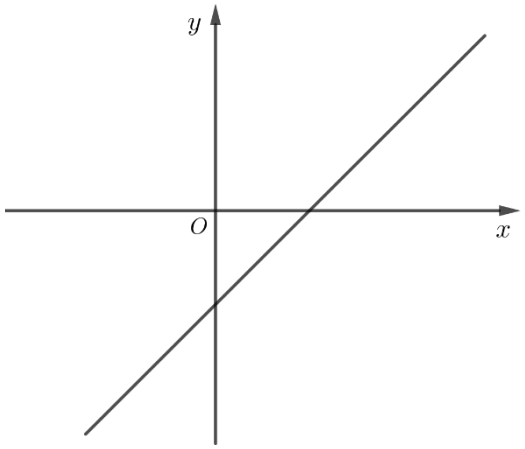
2. Se consideră expresia $E(x)=(2x-1)^2-(2x-4)(x+2)+(x+3)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=3x^2+2x+18$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Demonstrează că numărul natural $A=E(n)+n$ este multiplu de 6, pentru orice număr natural n.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

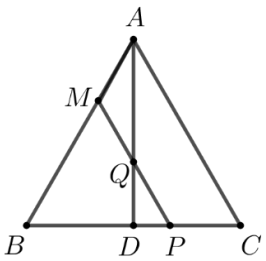
(2p) a) Arată că $f(3)-f(-3)=6$.



(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy, determină distanța de la punctul $C(-2,0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

5p

4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB=3$ cm și înălțimea AD, unde punctul D se află pe latura BC. Punctul M aparține laturii AB, astfel încât $AM=1$ cm. Paralela prin punctul M la dreapta AC intersectează dreapta AD în punctul Q și dreapta BC în punctul P.

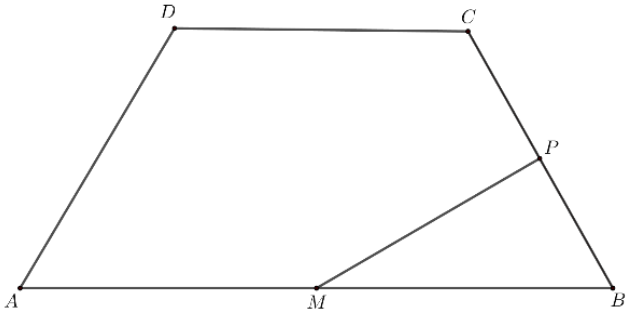


(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului BMP este egal cu 6 cm.

(3p) b) Determină lungimea segmentului PQ.

5p

5. Se consideră trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \| CD$, măsura unghiului ADC este egală cu $120°$ și $AD = DC = 6$ cm. Dreapta MP este mediatoarea segmentului BC, unde punctul M aparține dreptei AB și punctul P aparține dreptei BC.

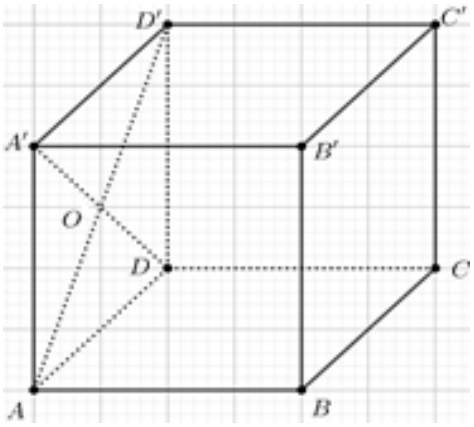


(**2p) a)** Arată că $AB = 12$ cm.

(3p) b) Demonstrează că dreptele DM și MP sunt perpendiculare.

5p **6.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$.

(2p) a) Arată că volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$ este egal cu $432\sqrt{2}\,\text{cm}^3$.



(3p) b) Determină distanța de la punctul O la planul (BDD'), unde O este punctul de intersecție a dreptelor AD' și $A'D$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……..……..……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

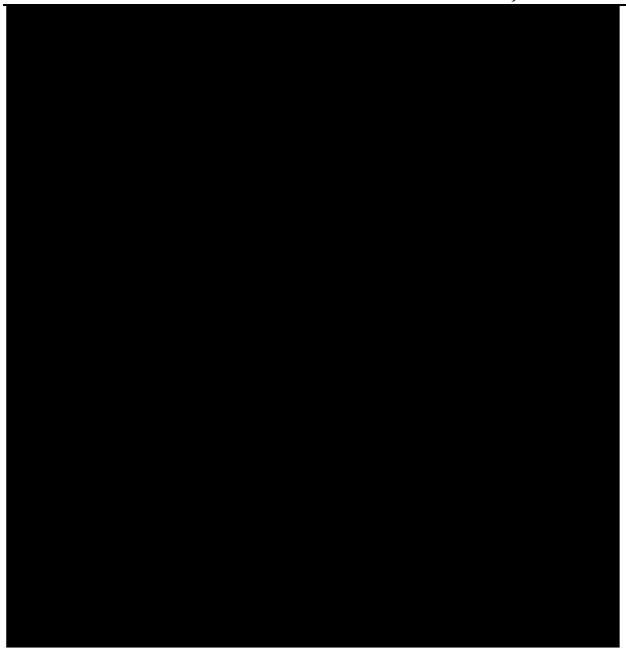
Anul școlar 2020 – 2021

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului 2^5 este egal cu: **a)** 10 **b)** 16 **c)** 25 **d)** 32
5p	**2.** Dacă $\frac{a}{2}=1,5$, atunci numărul a este egal cu: **a)** 2,10 **b)** 3 **c)** 3,10 **d)** 0,75
5p	**3.** Opusul numărului 5 este egal cu: **a)** -5 **b)** $-\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** 5
5p	**4.** Dintre numerele $0,123$; $0,1(23)$; $0,12(3)$ și $0,(123)$, cel mai mare este: **a)** 0,123 **b)** 0,(123) **c)** 0,1(23) **d)** 0,12(3)

5p **5.** Patru elevi, Laura, Petru, Tudor și Sofia, au calculat numărul $\sqrt{10^2-6^2}$ și rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Laura	Petru	Tudor	Sofia
$2\sqrt{2}$	4	$3\sqrt{2}$	8

Conform informațiilor din tabel, dintre cei patru elevi, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Laura
b) Petru
c) Tudor
d) Sofia

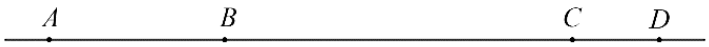
5p **6.** Se consideră intervalul $I=[-3,5)$. Andrei afirmă că: „Intervalul I conține 5 numere naturale.”. Afirmația lui Andrei este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

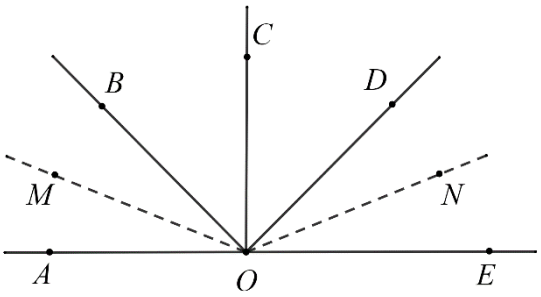
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate, în această ordine, punctele coliniare A, B, C și D. Știind că $AB=2$ cm, $BC=4$ cm și $CD=1$ cm, lungimea segmentului AD este egală cu:



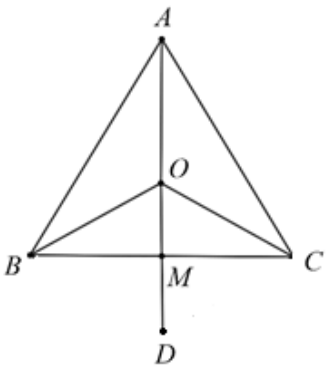
a) 2 cm
b) 5 cm
c) 6 cm
d) 7 cm

5p **2.** În figura alăturată, punctele A, O și E sunt coliniare și unghiurile AOB, BOC, COD și DOE sunt congruente. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și semidreapta ON este bisectoarea unghiului DOE. Măsura unghiului MON este egală cu:



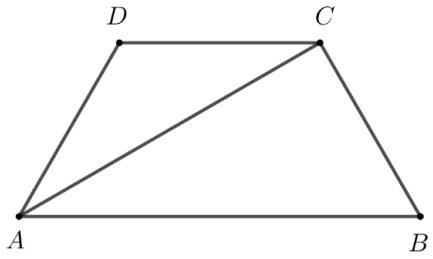
a) 45°
b) 90°
c) 120°
d) 135°

5p **3.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral ABC. Punctul O, din interiorul triunghiului, se află la distanțe egale cu 4 cm de fiecare dintre cele trei vârfuri ale triunghiului. Punctul M este mijlocul segmentului BC și punctul D este simetricul punctului O față de punctul M. Lungimea segmentului OD este egală cu:



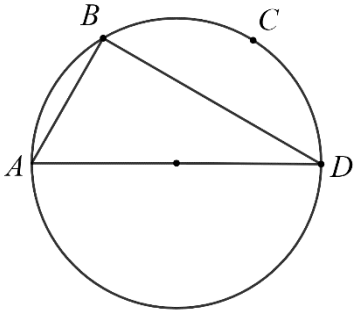
a) 2cm
b) 4cm
c) 6cm
d) 8 cm

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \| CD$. Diagonala AC este perpendiculară pe latura BC, $AB = 18\text{cm}$, iar măsura unghiului ADC este egală cu $120°$. Lungimea segmentului BC este egală cu:



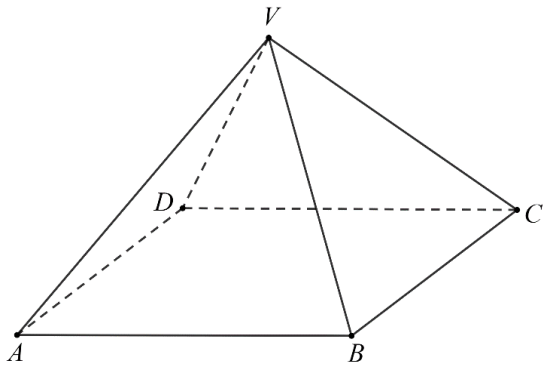
a) 6cm
b) 9cm
c) $6\sqrt{3}\text{cm}$
d) $9\sqrt{3}\text{cm}$

5p **5.** În figura alăturată, punctele distincte A, B, C și D sunt situate pe un cerc cu raza de 6cm, astfel încât punctele A și D sunt diametral opuse și arcele AB, BC și CD sunt congruente. Aria triunghiului ABD este egală cu:



a) $6\sqrt{3}\text{cm}^2$
b) $12\sqrt{3}\text{cm}^2$
c) $18\sqrt{3}\text{cm}^2$
d) $36\sqrt{3}\text{cm}^2$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$, cu muchia laterală VA de 5 dm și muchia bazei AB de 6 dm. Toate fețele laterale ale piramidei se vopsesc. Aria suprafeței vopsite este egală cu:



a) 12 dm^2
b) 36 dm^2
c) 48 dm^2
d) 84 dm^2

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Ioana cumpără 3 kg de mere și 2 kg de portocale și plătește 19 lei. Maria cumpără 2 kg de mere și 3 kg de portocale, de aceeași calitate, pentru care plătește 21 de lei.

(2p) a) Cu 71 de lei poate cumpăra Mihai 10 kg de mere și 10 kg de portocale, de aceeași calitate cu cele cumpărate de Ioana și Maria? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină cât a plătit Ioana pe un kilogram de mere.

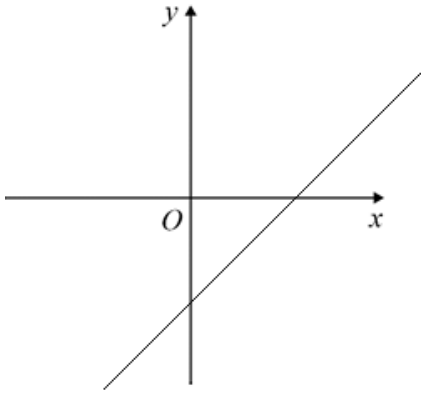
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2x}{3}+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{x}{3}+\frac{5}{2}\right)^2-x\left(\frac{x}{3}+1\right)$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=-2x-6$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină numerele naturale a pentru care $E(a)>-10$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{2}$.

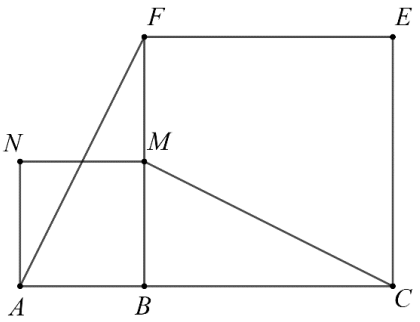
(2p) a) Arată că $f(1)+\sqrt{2}=1$.



(3p) b) Determină aria triunghiului delimitat de reprezentarea grafică a funcției f și de axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy.

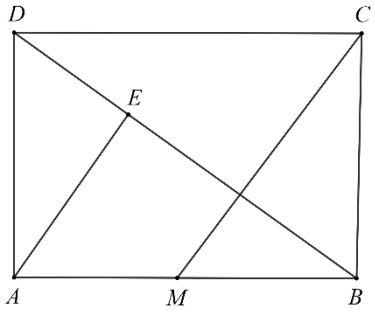
5p **4.** În figura alăturată sunt reprezentate pătratele $ABMN$ și $BCEF$, cu $AB = 3\,\text{cm}$ și $BC = 2 \cdot AB$. Punctul B aparține segmentului AC.

(2p) a) Arată că perimetrul pătratului $BCEF$ este egal cu $24\,\text{cm}$.



(3p) b) Demonstrează că dreptele AF și CM sunt perpendiculare.

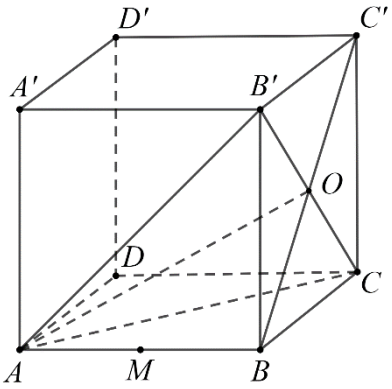
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 6\sqrt{3}\,\text{cm}$ și $BC = 3\sqrt{6}\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB, punctul E aparține diagonalei BD și $DE = 3\sqrt{2}\,\text{cm}$.



(**2p) a)** Arată că $BD = 9\sqrt{2}\,\text{cm}$.

(3p) b) Demonstrează că dreptele AE și CM sunt paralele.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6$ cm. Intersecția dreptelor BC' și $B'C$ este punctul O și punctul M este mijlocul segmentului AB.



(2p) a) Arată că $AO = 3\sqrt{6}$ cm.

(3p) b) Determină distanța de la punctul M la planul $(AB'C)$.

MINISTERUL EDUCAȚIEI ŞI CERCETĂRII

CENTRUL NAȚIONAL DE POLITICI ŞI EVALUARE ÎN EDUCAȚIE

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul şcolar 2020 - 2021

Matematică

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Cel mai mare divizor prim al numărului 154 este numărul:

a) 2
b) 7
c) 11
d) 77

5p **2.** Se consideră numerele naturale $a=5$ și $b=11$. Raportul dintre numerele a și b are aceeași valoare cu raportul:

a) $\frac{10}{11}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{10}{22}$
d) $\frac{5}{22}$

5p **3.** Luni, temperatura măsurată la ora 10, la o stație meteo a fost de $-5°C$, iar marți, la aceeași oră, au fost înregistrate $-7°C$. Diferența dintre temperatura înregistrată marți și cea înregistrată luni este egală cu:

a) $-9°C$
b) $-2°C$
c) $6°C$
d) $9°C$

5p **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine crescătoare este:

a) $\frac{1}{18}, \frac{1}{3}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}$

b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{18}, \frac{5}{6}, \frac{8}{9}$

c) $\frac{8}{9}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{18}$

d) $\frac{1}{3}, \frac{8}{9}, \frac{5}{6}, \frac{1}{18}$

5p **5.** Bogdan, Ana, Cătălin și Laura înmulțesc numărul $n=\sqrt{2}-\sqrt{8}+\sqrt{18}$ cu $\sqrt{2}$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul următor.

Bogdan	-4
Ana	$2\sqrt{2}$
Cătălin	0
Laura	4

Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect al înmulțirii este:

a) Bogdan
b) Ana
c) Cătălin
d) Laura

5p **6.** În tabelul următor sunt înregistrate punctajele obținute de elevii unei clase la un test de cultură generală:

Punctaj	40	50	60	70	80	90	100
Număr de elevi	2	4	5	2	4	2	1

Media aritmetică a punctajelor obținute de elevii participanți la test este:

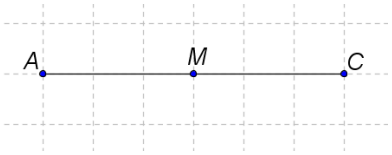
a) 60,9
b) 66
c) 69,5
d) 69

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

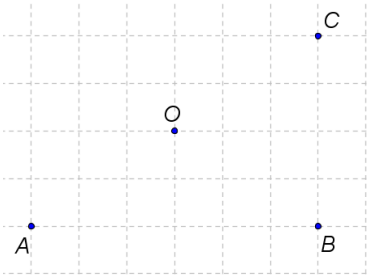
5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, M și C. Punctul C este simetricul punctului A față de punctul M. Dacă $AM=3\text{cm}$, atunci segmentul CM are lungimea egală cu:

a) 3cm
b) 4cm
c) 6cm
d) 9cm



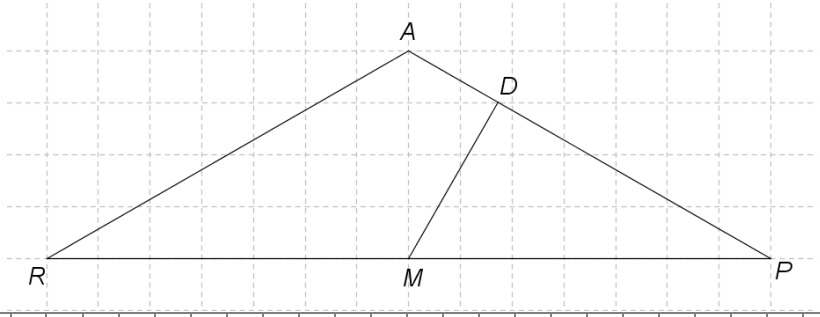
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C și O, astfel încât A, B și C sunt situate la distanțe egale față de punctul O, iar punctele A, O și C sunt coliniare. Măsura unghiului ABC este egală cu:

a) 120°
b) 90°
c) 60°
d) 30°



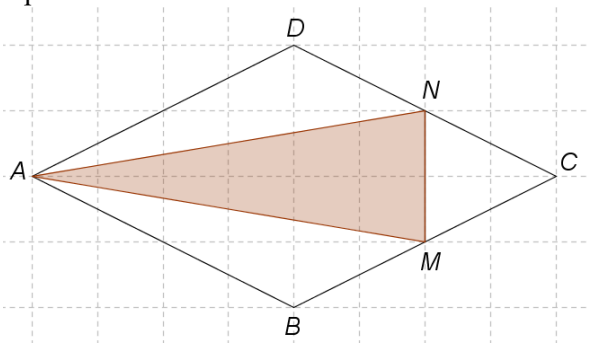
5p **3.** Locuința Alinei, marcată pe schiță cu punctul A, este situată la distanțe egale față de locuințele celor doi colegi de clasă, Radu și Paul, marcate pe schiță cu punctele R, respectiv P. Radu pornește de acasă, spre Paul, pe drumul cel mai scurt. La jumătatea distanței, adică în punctul M, se hotărăște să se îndrepte spre șoseaua AP, parcurgând distanța cea mai scurtă. Ajuns la șosea, în punctul D, Radu află că până la locuința Alinei sunt $400\,\text{m}$. La ce distanță se află locuința lui Paul față de punctul D, în care s-a oprit Radu, dacă măsura unghiului RAP este de $120°$?

a) $400\,\text{m}$
b) $800\,\text{m}$
c) $1200\,\text{m}$
d) $1600\,\text{m}$

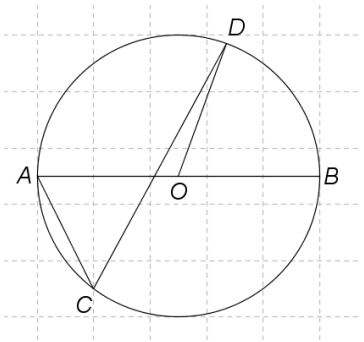


5p **4.** În figura alăturată este reprezentată schița unei grădini de plante aromatice, în formă de romb $ABCD$. Suprafața hașurată, corespunzătoare triunghiului AMN, unde M și N sunt mijloacele laturilor BC, respectiv CD, este acoperită cu cimbru, iar restul suprafeței grădinii este acoperită cu lavandă. Din aria totală a grădinii, aria suprafeței acoperite cu cimbru reprezintă:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{3}{8}$
d) $\frac{1}{5}$

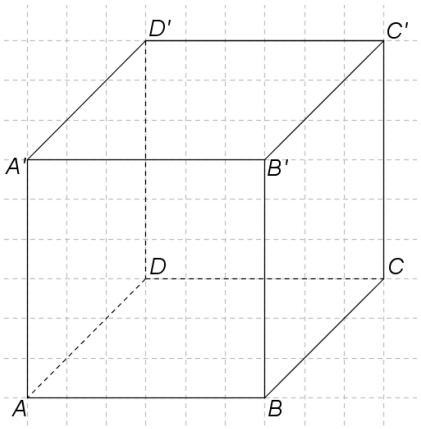


5p **5.** Punctele A, B, C și D sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A și B sunt diametral opuse și măsura unghiului ACD este de $55°$. Măsura unghiului DOB este egală cu:



a) $55°$
b) $70°$
c) $110°$
d) $180°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ care are muchia egală cu $12\,\text{cm}$. Secționăm cubul $ABCDA'B'C'D'$ în 27 de cubulețe cu volume egale. Lungimea muchiei unui cubuleț este egală cu:



a) 1cm
b) 2cm
c) 4cm
d) 6cm

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dacă într-o clasă se așază câte doi elevi într-o bancă, atunci un elev rămâne singur în bancă, iar două bănci rămân libere. Dacă elevii se așază câte trei în bancă, atunci șase bănci rămân libere, iar celelalte bănci sunt ocupate complet.

(2p) a) Este posibil ca în clasă să fie 14 elevi? Justifică răspunsul dat.

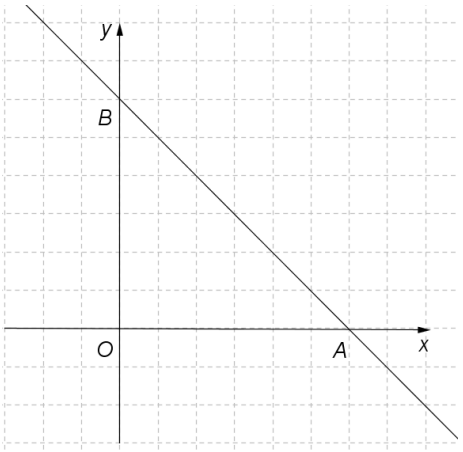
(3p) b) Determină numărul de bănci din clasă.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(x-\dfrac{1}{2-x}\right):\dfrac{x^3-2x^2+x}{x^2-7x+10}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2,5\}$.

(2p) a) Arată că $x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Demonstrează că $E(x)=\dfrac{x-5}{x}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2,5\}$.

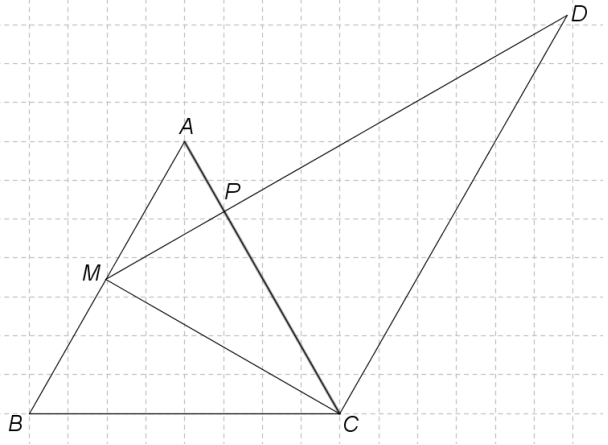
5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+6$.



(2p) a) Calculează $f(0)\cdot f(6)$.

(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Determină distanța de la punctul O la dreapta AB.

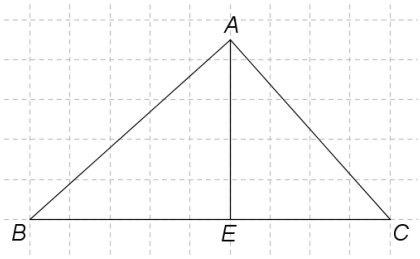
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB=8\text{cm}$. Notăm cu M mijlocul laturii AB și construim din M perpendiculara pe AC, care intersectează pe AC în P și paralela prin C la AB în D.



(2p) a) Arată că $CD=12\text{cm}$.

(3p) b) Calculează aria trapezului $AMCD$.

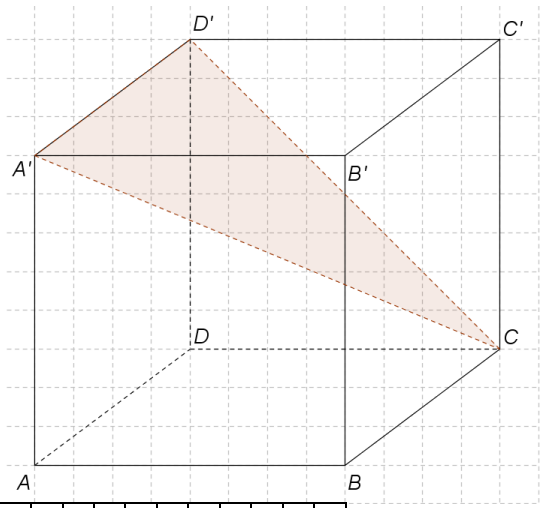
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A. Notăm cu E proiecția punctului A pe dreapta BC. Lungimea laturii AC este de 6cm, iar lungimea segmentului EC este de 4cm.



(2p) a) Arată că $BC = 9\text{cm}$.

(3p) b) Demonstrează că perimetrul triunghiului ABC este mai mic decât 22 cm.

5p **6**. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Distanţa de la mijlocul unei diagonale a cubului la mijlocul unei diagonale a unei feţe laterale este de 50cm.



(2p) a) Câţi litri de vopsea sunt necesari pentru a vopsi exteriorul cubului, ştiind că pentru a vopsi un metru pătrat este nevoie de 0,5 litri de vopsea?

(3p) b) Calculează distanţa de la punctul A la planul $(A'D'C)$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2020 – 2021

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $45:5+4$ este egal cu: **a)** 4 **b)** 5 **c)** 9 **d)** 13
5p	**2.** Numărul care reprezintă 40% din 50 este egal cu: **a)** 20 **b)** 25 **c)** 40 **d)** 50
5p	**3.** Suma numerelor -2, -1, 0, 1, 2 și 3 este egală cu: **a)** -9 **b)** -3 **c)** 3 **d)** 9
5p	**4.** Fracția $\frac{14}{21}$ este echivalentă cu: **a)** $\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{21}{14}$ **d)** $\frac{7}{3}$
5p	**5.** Se consideră mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,-2\le x<2\right\}$. Dintre următoarele mulțimi, cea care reprezintă scrierea mulțimii A prin enumerarea elementelor sale este: **a)** $\{-2,-1,0,1,2\}$ **b)** $\{-2,-1,0,1\}$ **c)** $\{0,1,2\}$ **d)** $\{-1,0,1,2\}$

5p **6.** La alegerile pentru stabilirea responsabilului unei clase, elevii candidați au fost: Andrei, Vali, Sanda și Dana. După ce toți elevii clasei au votat, procentele obținute de candidați au fost următoarele:

Andrei	Vali	Sanda	Dana
15%	25%	35%	x%

Dana a fost votată de:

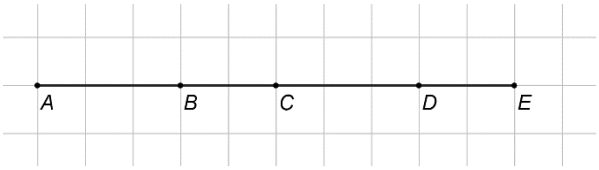
a) 45% din elevii clasei
b) 35% din elevii clasei
c) 25% din elevii clasei
d) 15% din elevii clasei

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

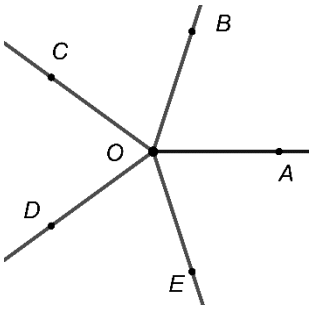
5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C, D și E, în această ordine, sunt coliniare, astfel încât $AB \neq BC$. Dacă segmentul AB este congruent cu segmentul CD și segmentul BC este congruent cu segmentul DE atunci:

a) punctul B este mijlocul segmentului AC
b) punctul C este mijlocul segmentului CD
c) punctul D este mijlocul segmentului CE
d) punctul C este mijlocul segmentului AE



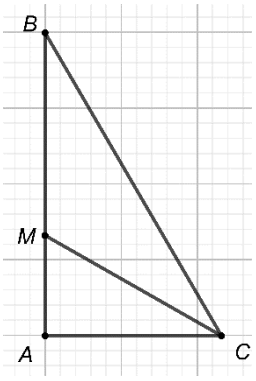
5p **2.** Unghiurile congruente AOB, BOC, COD, DOE și EOA sunt unghiuri formate în jurul punctului O. Măsura unghiului AOC este egală cu:

a) 144°
b) 120°
c) 72°
d) 36°

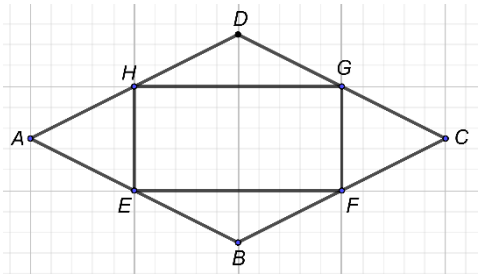


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, cu măsura unghiului ABC de $30°$. Bisectoarea unghiului ACB intersectează dreapta AB în punctul M și $AM = 3\text{cm}$. Lungimea catetei AB este egală cu:

a) 3cm
b) 6cm
c) 9cm
d) 12cm

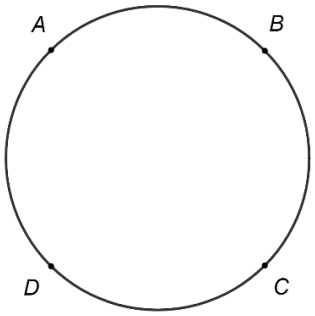


5p **4.** În figura alăturată este reprezentat rombul $ABCD$. Punctele E, F, G și H sunt mijloacele segmentelor AB, BC, CD, respectiv AD. Raportul dintre aria patrulaterului $EFGH$ și aria rombului $ABCD$ este egal cu:



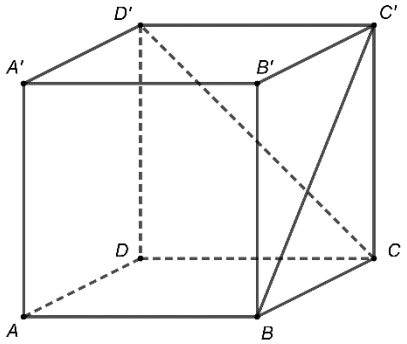
a) $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{3}{4}$

5p **5.** În figura alăturată punctele distincte A, B, C și D sunt situate pe cerc, astfel încât arcele AB, BC, CD și AD sunt congruente. Dacă $AC=12\text{cm}$, atunci lungimea cercului este egală cu:



a) $3\pi\text{cm}$
b) $4\pi\text{cm}$
c) $6\pi\text{cm}$
d) $12\pi\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Măsura unghiului dreptelor BC' și $D'C$ este egală cu:



a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Oana începe să citească o carte. În prima zi citește jumătate din numărul paginilor cărții, în a doua zi jumătate din rest, iar în a treia zi citește jumătate din numărul paginilor rămase și constată că mai are de citit 32 de pagini.

(2p) a) Dacă ar continua să citească zilnic jumătate din numărul de pagini rămase, câte pagini ar avea de citit în cea de-a cincea zi?

(3p) b) Determină numărul de pagini ale cărții.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=(x+1)^2-2\left(x^2-1\right)+(x-1)^2-x^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=(2+x)(2-x)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arată că numărul $A=E\left(\sqrt{2}\right)+E\left(-\sqrt{2}\right)-7$ aparține intervalului $\left[-\sqrt{10},-2\sqrt{2}\right]$.

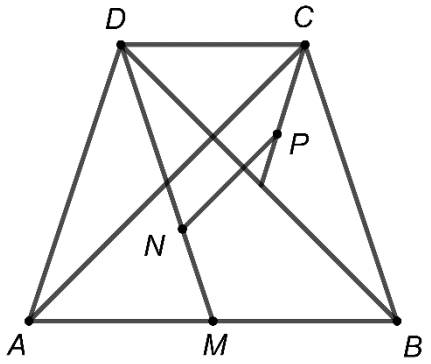
5p **3.** Se consideră numerele reale $a=\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\right):\frac{31}{12}$ și $b=\frac{3}{\sqrt{2}}:\left(5\sqrt{2}-3a\sqrt{8}\right)$.

(2p) a) Arată că $a=\frac{1}{2}$.

(3p) b) Arată că numărul $N=\frac{\sqrt{2a+4b}}{2}$ este natural.

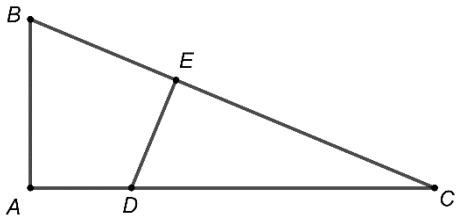
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AD = BC = 6\text{cm}$ și $AB = 2CD = 8\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB.

(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ADM este egal cu 16cm.



(3p) b) Știind că punctul N aparține segmentului DM astfel încât $DN = 4\text{cm}$ și punctul P este centrul de greutate al triunghiului BCD, demonstrează că dreptele NP și AC sunt paralele.

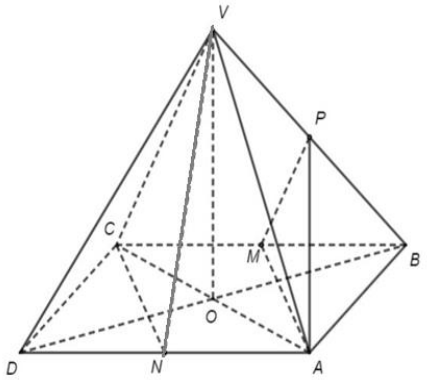
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, $AB=5\text{cm}$ și $AC=12\text{cm}$. Punctul D aparține segmentului AC astfel încât $DC=3AD$. Perpendiculara din punctul D pe dreapta BC intersectează latura BC în punctul E.



(2p) a) Arată că sinusul unghiului ACB este egal cu $\frac{5}{13}$.

(3p) b) Arată că lungimea segmentului DE este mai mică decât $3,5\text{cm}$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $AB=VA=6\text{cm}$. Punctele M, N și P sunt mijloacele muchiilor BC, AD, respectiv VB.



(2p) a) Arată că unghiul dintre dreapta VB și planul (ABC) are măsura de $45°$.

(3p) b) Arată că planele (NCV) și (AMP) sunt paralele.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2021-2022

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

Testul 1

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă suma obținută din vânzarea cireșelor ar fi egală cu suma obținută din vânzarea merelor, fiecare dintre aceste sume ar fi de $4620:2=2310$ lei. Cantitatea de cireșe vândute ar fi de $2310:15=154$ kg, iar cea de mere ar fi de $2310:7=330$ kg	**1p**
	Cum $154+330=484\neq 500$, deducem că suma obținută din vânzarea cireșelor nu poate fi egală cu suma obținută din vânzarea merelor	**1p**
	b) Notăm cu x numărul kilogramelor de mere vândute, deci numărul kilogramelor de cireșe vândute este $500-x$	**1p**
	$15(500-x)+7x=4620$	**1p**
	$x=360$	**1p**
2.	**a)** $E(-3)=(-9)^2+(-10)\cdot(-9)+(-5)^2$	**1p**
	$=196=14^2$, deci este pătratul unui număr natural	**1p**

	b) $E(x)=25x^2+10x+1$	**1p**
	$\sqrt{E(n)}=5n+1$	**1p**
	$5n+1\le 3 \Leftrightarrow n\le\frac{2}{5}$ și, cum n este număr natural, rezultă $n=0$	**1p**
3.	**a)** $x=12+6\sqrt{2}-3$	**1p**
	$=9+6\sqrt{2}$	**1p**
	b) $y=8-2\sqrt{15}-6\sqrt{2}+8+2\sqrt{15}-7=9-6\sqrt{2}$	**1p**
	$xy=\left(9+6\sqrt{2}\right)\left(9-6\sqrt{2}\right)=9^2-\left(6\sqrt{2}\right)^2=$	**1p**
	$=81-72=9$, care este număr natural	**1p**
4.	**a)** Construim $CE\perp AB$, unde $E\in AB$ și cum $\sphericalangle A=\sphericalangle D=\sphericalangle E=90°$, rezultă că $AECD$ este dreptunghi, deci $AE=CD=8\text{cm}$, de unde $EB=4\text{cm}$	**1p**
	Triunghiul CEB este dreptunghic în E, deci $CE=4\sqrt{3}\text{cm}$ și cum $AD=CE$, obținem că $AD=4\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	b) $CD\|\|AB$, deci $\Delta MDC\sim\Delta MAB$, de unde rezultă că $\frac{MD}{MA}=\frac{DC}{AB}$	**1p**
	$MA=12\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABM}=\frac{MA\cdot AB}{2}=72\sqrt{3}\text{ cm}^2$	**1p**
5.	**a)** $DN=NM=MC=20\text{ cm}$	**1p**
	$AN=20\sqrt{5}\text{cm}$, $BM=20\sqrt{5}\text{cm}$, deci $\mathcal{P}_{ABMN}=40\left(2+\sqrt{5}\right)\text{cm}$	**1p**
	b) $\Delta OMN\sim\Delta OAB\Rightarrow\frac{d(O,MN)}{d(O,AB)}=\frac{MN}{AB}=\frac{1}{3}$	**1p**
	$d(O,MN)+d(O,AB)=40\text{ cm}$, de unde $d(O,MN)=10\text{ cm}$, $d(O,AB)=30\text{ cm}$, deci $\mathcal{A}_{\Delta OMN}=\frac{1}{2}\cdot MN\cdot d(O,MN)=100\text{ cm}^2$ și $\mathcal{A}_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot d(O,AB)=900\text{ cm}^2$	**1p**
	$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC=2400\text{cm}^2$, deci raportul căutat este $\frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{\mathcal{A}_{ABCD}-\left(\mathcal{A}_{\Delta OMN}+\mathcal{A}_{\Delta OAB}\right)}=\frac{12}{7}$	**1p**
6.	**a)** $ABCD$ pătrat, $OB=\frac{BD}{2}=4\sqrt{2}\text{ cm}$	**1p**
	În triunghiul dreptunghic VOB, $VB^2=VO^2+OB^2$, de unde $VB=8\text{cm}$	**1p**
	b) PQ este linie mijlocie în triunghiul $VBC\Rightarrow PQ\|\|BC$ și $PQ=\frac{BC}{2}$, deci $PQ\|\|AD$ și	**1p**
	$PQ=\frac{AD}{2}$, de unde rezultă PQ este linie mijlocie în triunghiul (MAD)	**1p**
	Q este mijlocul segmentelor MD și CV, $VMCD$ este paralelogram, de unde obținem $VM\|\|CD$, deci $\sphericalangle(VM,BC)=\sphericalangle(CD,BC)=90°\Rightarrow VM\perp BC$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2021 - 2022
Matematică

Varianta 1

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În a doua zi excursionistul a parcurs $\frac{1}{3}\cdot\frac{60}{100}x=\frac{x}{5}$, unde x reprezintă lungimea traseului	**1p**
	Cum $\frac{x}{5}\neq\frac{x}{4}$, obținem că nu este posibil ca lungimea parcursă de excursionist în a doua zi să reprezinte o pătrime din lungimea traseului	**1p**
	b) $\frac{60x}{100}+\frac{x}{5}+64=x$	**1p**
	$4x+320=5x$	**1p**
	$x=320\,\text{km}$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=3\left(x^2+4x+4\right)-2\left(4x-3-x^2\right)+21x+14-2=$	**1p**
	$=3x^2+12x+12+2x^2-8x+6+21x+12=5x^2+25x+30$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(n)=5\left(n^2+5n+6\right)$, pentru orice număr natural n	**1p**
	$n^2+5n+6=n(n+5)+6$ și, cum n și $n+5$ au paritățidiferite, obținem că $n(n+5)+6$ este număr natural par, pentru orice număr natural n	**1p**

	Ultima cifră a lui $E(n)$ este 0, de unde obținem că $E(n)$ este divizibil cu 10	**1p**
3.	**a)** $f(2)=0$	**1p**
	$f(3)=1 \Rightarrow f(2)+f(3)=0+1=1$	**1p**
	b) $A(2,0)$ și $B(0,-2)$ sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy	**1p**
	Dacă $MC \perp Ox$, $C \in Ox$, atunci ΔMCA și ΔAOB sunt dreptunghice isoscele, deci $\sphericalangle MAC = 45°$ și $\sphericalangle OAB = 45°$	**1p**
	$\sphericalangle MAB = \sphericalangle MAC + \sphericalangle CAB = 45° + 45° = 90° \Rightarrow \Delta AMB$ este dreptunghic în A	**1p**
4.	**a)** ΔDAB dreptunghic în $A \Rightarrow AB = \sqrt{BD^2 - AD^2} = 8\text{cm}$	**1p**
	$P_{\Delta DAB} = AB + BD + DA = 24\text{cm}$	**1p**
	b) În triunghiul DAB dreptunghic în $A \Rightarrow AB^2 = BO \cdot BD$, deci $BO = 6,4\text{cm}$	**1p**
	$\Delta DOC \sim \Delta BOA \Rightarrow \frac{DC}{BA} = \frac{DO}{BO}$	**1p**
	$DC = 4,5\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** $AC = \sqrt{6^2 + 6^2} =$	**1p**
	$= 6\sqrt{2}$ cm	**1p**
	b) În triunghiul echilateral BPQ, $\sphericalangle BCP = 90° \Rightarrow BC$ este înălțime	**1p**
	$PQ = 4\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$\mathcal{A}_{ABQP} = \frac{(AB+PQ)\cdot BC}{2} = \frac{\left(6+4\sqrt{3}\right)\cdot 6}{2} = 6\left(3+2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$	**1p**
6.	**a)** $BD = \sqrt{3^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2} = 3\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	În triunghiul $D'DB$ dreptunghic în $D \Rightarrow BD' = \sqrt{\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = 6\text{cm}$	**1p**
	b) $(AD'B) \cap (A'BC') = BC'$, $A'O \perp BC'$, $A'O \subset (A'BC')$, $OO' \perp BC'$, $OO' \subset (AD'B)$, deci $\sphericalangle((AD'B),(A'BC')) = \sphericalangle(A'O, OO') = \sphericalangle A'OO'$, unde O și O' sunt mijloacele segmentelor BC', respectiv AD'	**1p**
	$A'O' = \frac{3\sqrt{2}}{2}\text{cm}$, $OO' = 3\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	În triunghiul $A'OO'$ dreptunghic în O', $\text{tg}(\sphericalangle A'OO') = \frac{A'O'}{OO'} = \frac{1}{2}$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI A VIII-A
Anul şcolar 2021-2022

Probă scrisă
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă Ana ar avea 132 de timbre, atunci Maria ar avea $132-25=107$ timbre și Vlad ar avea $132+16=148$ de timbre	**1p**
	Deoarece $132+107+148=387\neq 396$, deducem că nu este posibil ca Ana să aibă 132 de timbre	**1p**
	b) $x-16$ și $x-41$ reprezintă numărul de timbre pe care le are Ana, respectiv Maria, unde x este numărul de timbre pe care le are Vlad	**1p**
	$x+x-16+x-41=396$	**1p**
	$x=151$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=x^2+2x+1+2\left(x^2-2x+1\right)-3\left(x^2-1\right)=$	**1p**
	$=x^2+2x+1+2x^2-4x+2-3x^2+3=6-2x$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $6-2x<x$	**1p**
	$3x>6$	**1p**
	$x>2$, deci $x\in(2,+\infty)$	**1p**

3.	**a)** $f(0)=-1$	**1p**
	$f(1)=0$, deci $f(0)+f(1)=-1$	**1p**
	b) $A(1,0)$ și $B(0,-1)$ sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AOB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta BOC}=\dfrac{\mathcal{A}_{\Delta AOB}}{2}=\dfrac{1}{4}$	**1p**
4.	**a)** $\sphericalangle CAD=30^\circ$, deci $d(C,AD)=\dfrac{AC}{2}=4\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta CAD}=\dfrac{10\cdot 4}{2}=20\,\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BAC+\sphericalangle CAD$, $\sphericalangle CAE=\sphericalangle CAD+\sphericalangle DAE$, deci $\sphericalangle BAD=\sphericalangle CAE$	**1p**
	$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{1}{2}$, $\sphericalangle BAD=\sphericalangle CAE\Rightarrow \Delta BAD\sim\Delta CAE$	**1p**
	$\dfrac{BD}{CE}=\dfrac{1}{2}$, de unde obținem $CE=2\cdot BD$	**1p**
5.	**a)** $CD\parallel AB$ și $DR\parallel CB\ \Rightarrow\ BCDR$ este paralelogram $\Rightarrow BR=CD=10\,\text{cm}$	**1p**
	$\sphericalangle DAR=90^\circ$, $\sphericalangle ARD=45^\circ$, de unde obținem că triunghiul ADR este dreptunghic isoscel cu $AD=AR=10\text{cm}\Rightarrow AR=RB$, deci punctul R este mijlocul segmentului AB	**1p**
	b) $CD\parallel AB$, $CD=\dfrac{AB}{2}\Rightarrow CD$ este linie mijlocie în triunghiul TAB, deci punctul C este mijlocul laturii TB și punctul D este mijlocul laturii TA	**1p**
	Triunghiul TAR dreptunghic în $A\Rightarrow TR=\sqrt{20^2+10^2}=10\sqrt{5}\,\text{cm}$	**1p**
	Punctul O este centrul de greutate al triunghiului TAB, deci $TO=\dfrac{2}{3}\cdot TR=\dfrac{20\sqrt{5}}{3}\,\text{cm}$	**1p**
6.	**a)** $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=25\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**1p**
	$V_{ABCDEF}=\mathcal{A}_{\Delta ABC}\cdot AD=250\sqrt{3}\,\text{cm}^3$	**1p**
	b) $BP\perp EM$, unde $P\in EM$	**1p**
	$CM\perp AB$, $CM\perp AD$, $AB\cap AD=\{A\}\Rightarrow CM\perp(BAD)$ de unde obținem $BP\perp CM$ și, cum $CM\cap EM=\{M\}\Rightarrow BP\perp(EMC)$	**1p**
	$d\big(B,(EMC)\big)=BP=\dfrac{MB\cdot BE}{EM}=2\sqrt{5}\,\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2021 - 2022
Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Testul 2

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $38=15\cdot 2+8$	**1p**
	Cum $8\neq 2$, deducem că nu este posibil ca numărul natural n să fie egal cu 38	**1p**
	b) $n=3\cdot c_1+2=9\cdot c_2+2=15\cdot c_3+2$ unde c_1, c_2 și c_3 sunt numere naturale	**1p**
	Cel mai mic multiplu comun al numerelor 3, 9 și 15 este 45, deci $n-2$ este multiplu de 45	**1p**
	$n=92$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=4x^2+4x+1+4x^2-4x+1-8x^2-12x=$	**1p**
	$=2-12x$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(a)=2-12a \Rightarrow -10a+2-E(a)=2a$	**1p**
	$2a\leq 2\sqrt{3} \Rightarrow a\leq\sqrt{3}$	**1p**
	Cum a este număr natural, obținem că $a=0$ sau $a=1$	**1p**
3.	**a)** $f\left(-\frac{1}{2}\right)=3$	**1p**
	$f\left(\frac{1}{2}\right)=5 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$	**1p**
	b) Punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox și Oy sunt $A(-2,0)$ și $B(0,4)$	**1p**
	$AB=2\sqrt{5}$	**1p**

	$d(O,\ AB)=\dfrac{4\cdot 2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$	**1p**
4.	**a)** Punctul E este mijlocul segmentului $CD \Rightarrow CE=2$ cm	**1p**
	Triunghiul BCE este dreptunghic în C, $BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\sqrt{13}$ cm	**1p**
	b) $\Delta ABF \sim \Delta CEF$, $\dfrac{BF}{EF}=\dfrac{AB}{CE}=2 \Rightarrow F$ este centrul de greutate al triunghiului BCD	**1p**
	Triunghiul PCD este dreptunghic în D, $DP=\sqrt{DC^2+CP^2}=\dfrac{\sqrt{73}}{2}$ cm	**1p**
	$FP=\dfrac{1}{3}\cdot DP=\dfrac{\sqrt{73}}{6}$ cm	**1p**
5.	**a)** Triunghiul ABC este dreptunghic în A, $AB=\sqrt{BC^2-AC^2}=6$ cm	**1p**
	$AM=AB-MB=4$ cm	**1p**
	b) Triunghiul AMC este dreptunghic în A, $CM=\sqrt{AC^2+AM^2}=4\sqrt{5}$ cm	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\mathcal{A}_{\Delta AMC}+\mathcal{A}_{\Delta MBC}=\dfrac{CM}{2}\cdot\left(d(A,\ CM)+d(B,\ CM)\right)=24$ cm^2	**1p**
	$d(A,\ CM)+d(B,\ CM)=\dfrac{48}{CM}>\dfrac{48}{9}=\dfrac{16}{3}$ cm, deoarece $CM=4\sqrt{5}=\sqrt{80}<\sqrt{81}=9$	**1p**
6.	**a)** $OM=\dfrac{AB}{2}=3$ cm, triunghiul VOM este dreptnghic în $O \Rightarrow VM=\sqrt{OM^2+VO^2}=5$ cm unde M este mijlocul segmentului AD	**1p**
	$\mathcal{A}_l=\dfrac{24\cdot 5}{2}\text{cm}^2=60\text{cm}^2$	**1p**
	b) $OS \perp VM$, $S \in VM$, $VM \perp AD$, $OM \perp AD$, $VM \cap OM=\{M\}$, deci $AD \perp (VOM)$ și, cum $OS \subset (VOM) \Rightarrow OS \perp AD$ și, cum VM, $AD \subset (VAD)$, rezultă $OS \perp (VAD)$	**1p**
	$QT \perp (VAD)$, $T \in (VAD)$, de unde obținem că punctele A, S și T sunt coliniare și $OS \parallel QT$	**1p**
	$\Delta AOS \sim \Delta AQT \Rightarrow \dfrac{OS}{QT}=\dfrac{AO}{AQ}=\dfrac{2}{3}$, $OS=\dfrac{VO\cdot OM}{VM}=\dfrac{12}{5}$cm, deci $QT=\dfrac{18}{5}$cm$=d(Q,(VAD))$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2021 - 2022
Matematică

Testul 3

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă prețul unui bilet pentru copii este 25 de lei , obținem că prețul unui bilet pentru adulți este 50 de lei	**1p**
	Dar $3\cdot 50+6\cdot 25=300$ de lei, cum $300\neq 420$, obținem că nu este posibil ca prețul unui bilet pentru copii să fie 25 de lei	**1p**
	b) Notăm cu x prețul unui bilet pentru adulți, deci prețul unui bilet pentru copii este $\frac{x}{2}$	**1p**
	$3x+6\cdot\frac{x}{2}=420$	**1p**
	$x=70$ de lei, deci prețul unui bilet pentru adulți este 70 de lei	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\left(x^2+4x+4\right)-\left(x^2-4x+4\right)=$	**1p**
	$=x^2+4x+4-x^2+4x-4=8x$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $A=8n^2+8n=$	**1p**
	$=8n(n+1)$, pentru orice număr natural n	**1p**

	Pentru $n=2k$, $n\cdot(n+1)=2k(2k+1)$ care este divizibil cu 2, pentru orice număr natural k Pentru $n=2k+1$, $n\cdot(n+1)=(2k+1)(2k+2)=2(2k+1)(k+1)$ care este divizibil cu 2, pentru orice număr natural k $8n(n+1)$ este multiplu al lui 16 pentru orice număr natural n, deci numărul natural A este multiplu al lui 16 pentru orice număr natural n	**1p**
3.	**a)** Determinarea a două puncte care aparțin graficului funcției f	**1p**
	Reprezentarea punctelor si trasarea graficului funcției f	**1p**
	b) $1-(a-4)\leq 0$	**1p**
	$a\geq 5$, pentru orice a număr real	**1p**
	Deci, mulțimea soluțiilor inecuației este $[5,\infty)$	**1p**
4.	**a)** $P_{\Delta ABC}=3\cdot AB=$	**1p**
	$=3\cdot 12=36\text{cm}$	**1p**
	b) AS mediană în triunghiul echilateral $ABC \Rightarrow AS$ înălțime $\Rightarrow AS=6\sqrt{3}$ cm	**1p**
	Triunghiul ABC echilateral, $BD\perp AC \Rightarrow BO$ mediană, unde $\{O\}=AC\cap BD$ și cum $BO=OD$ obținem că $ABCD$ este paralelogram, deci $AS\perp AD \Rightarrow SD=6\sqrt{7}$ cm	**1p**
	$SC\parallel AD\Rightarrow \Delta QSC\sim\Delta QDA\Rightarrow \frac{SC}{DA}=\frac{SQ}{QD}\Rightarrow QD=4\sqrt{7}$ cm	**1p**
5.	**a)** În triunghiul ABD dreptunghic în A, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=25$ cm	**1p**
	$\sin(\sphericalangle ABD)=\frac{AD}{BD}=\frac{3}{5}$	**1p**
	b) $DF=EC=5+10=15\text{cm} \Rightarrow$ triunghiul ADF și triunghiul BCE sunt dreptunghice isoscele $\Rightarrow \sphericalangle IFE=\sphericalangle IEF=45^\circ\Rightarrow$ triunghiul EIF este dreptunghic isoscel	**1p**
	În triunghiul isoscel COD, $OS\perp CD$, $S\in CD \Rightarrow$ punctul S este mijlocul segmentului CD, respectiv EF și, cum $IS\perp CD \Rightarrow O$, I și S sunt puncte coliniare	**1p**
	OS este linie mijlocie în triunghiul $DBC\Rightarrow OS=\frac{BC}{2}=7{,}5$ cm, IS este mediană în triunghiul dreptunghic $EIF\Rightarrow IS=\frac{EF}{2}=5$ cm și, cum $OS=OI+IS$, obținem că $OI=2{,}5$ cm	**1p**
6.	**a)** $AC'=AB\sqrt{3}=6\sqrt{3}\Rightarrow AB=6$ cm	**1p**
	$A_l=4\cdot AB^2=144\text{cm}^2$	**1p**
	b) Patrulaterul $A'B'CD$ este paralelogram $\Rightarrow CB'\parallel DA'$	**1p**
	$\sphericalangle(B'C,OB)=\sphericalangle(DA',OB)=\sphericalangle BOD$	**1p**
	$BA\perp(ADA')$, $AO\perp DA'$, $AO,DA'\subset(ADA')$, $AO\cap DA'=\{O\}\Rightarrow OB\perp OD$, deci măsura unghiului dreptelor $B'C$ și OB este egală cu 90°	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2021 - 2022
Matematică

Testul 4

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În 20 de apartamente cu 2 camere și 20 de apartamente cu 3 camere sunt în total 100 de camere	**1p**
	Cum $100 \neq 110$, deducem că nu este posibil ca în acest bloc, numărul apartamentelor cu 2 camere să fie egal cu numărul apartamentelor cu 3 camere	**1p**
	b) $x+y=40$, $2x+3y=110$, unde x este numărul apartamentelor cu 2 camere, iar y este numărul apartamentelor cu 3 camere	**1p**
	$2x+3\cdot(40-x)=110$	**1p**
	$x=10$	**1p**
2.	**a)** $E(-1)=0$	**1p**
	$E(0)=0 \Rightarrow E(-1)=E(0)$	**1p**
	b) $E(x)=x^2-2x^3+x^4+4x^3=x^4+2x^3+x^2=\left(x^2+x\right)^2$	**1p**
	$\sqrt{E(n)}=n^2+n=n(n+1)$, pentru orice număr natural n	**1p**
	$\frac{1}{\sqrt{E(1)}}+\frac{1}{\sqrt{E(2)}}+\frac{1}{\sqrt{E(3)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{E(n)}}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}\Rightarrow n=2021$	**1p**

3.	**a)** $f(0)=2$	**1p**
	$f(2)=0 \Rightarrow \dfrac{f(0)-f(2)}{2}=1$	**1p**
	b) Punctele de intersecție ale reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy sunt $A(2,0)$ și $B(0,2)$	**1p**
	M mijlocul segmentului AB, $ME \parallel OB$, $E \in Ox \Rightarrow ME=\dfrac{OB}{2}=1$	**1p**
	$CM=\sqrt{CE^2+EM^2}=\sqrt{26}$ cm	**1p**
4.	**a)** În triunghiul ABD dreptunghic în A, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=10$ cm	**1p**
	Perimetrul triunghiului ABD este 24 cm	**1p**
	b) $\Delta MND \sim \Delta BCD \Rightarrow \dfrac{\mathcal{A}_{\Delta MND}}{\mathcal{A}_{\Delta BCD}}=\left(\dfrac{DM}{BD}\right)^2=\dfrac{4}{25} \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta MND}=\dfrac{4}{25}\mathcal{A}_{\Delta BCD}$	**1p**
	$A_{\Delta BCD}=24\,\text{cm}^2$, M este mijlocul segmentului $CD \Rightarrow \mathcal{A}_{\Delta CMN}=\mathcal{A}_{\Delta MND}=\dfrac{96}{25}\,\text{cm}^2=3{,}84\,\text{cm}^2$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta BCN}=\mathcal{A}_{\Delta BCD}-2\mathcal{A}_{\Delta MND}=24-7{,}68=16{,}32\,\text{cm}^2$	**1p**
5.	**a)** Triunghiul BMP este dreptunghic cu $\sphericalangle BPM=90°$, $\sphericalangle BMP=30°$	**1p**
	$BP=\dfrac{BM}{2}=2$ cm	**1p**
	b) $MN=\dfrac{AB}{2}=4$ cm, $MP=\sqrt{BM^2-BP^2}=2\sqrt{3}$ cm	**1p**
	Măsura unghiului PMN este egală cu $180°-(30°+60°)=90°$, deci triunghiul PMN este dreptunghic în M, $PN=\sqrt{PM^2+MN^2}=2\sqrt{7}$ cm	**1p**
	$2\sqrt{7}>3\sqrt{3} \Leftrightarrow 28>27 \Rightarrow PN>3\sqrt{3}$ cm	**1p**
6.	**a)** $V_{cub}=216\,\text{cm}^3$	**1p**
	$V_{cub}=0{,}216\,\text{dm}^3=0{,}216\,l>0{,}2\,l$	**1p**
	b) $A'D' \subset (A'BC)$ și $A'D' \perp (ABB')$, deci $(A'BC) \perp (ABB')$ și $AM \perp (A'BC)$, unde M este mijlocul segmentului $A'B$	**1p**
	$Q \in AD'$, deci $\sphericalangle(AQ,(A'BC))=\sphericalangle(AD',MD')=\sphericalangle AD'M$	**1p**
	Triunghiul $AD'M$ dreptunghic în M, $AD'=2AM$, deci $\sphericalangle AD'M=30°$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2021 - 2022
Matematică

Testul 5

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\overline{ac}=18\Rightarrow c=8$ și $\overline{abc}=18\cdot 6+5=113\Rightarrow c=3$	**1p**
	Cum $8\neq 3$, deducem că nu este posibil ca numărul natural $\overline{ac}$ să fie egal cu 18	**1p**
	b) $\overline{abc}=6\cdot\overline{ac}+5$	**1p**
	$100a+10b+c=60a+6c+5$, de unde obținem $8a+2b=c+1$	**1p**
	$c+1\leq 10\Rightarrow 8a+2b\leq 10\Rightarrow a=1,\ b=0,\ c=7\Rightarrow \overline{abc}=107$ sau $a=1,\ b=1,\ c=9\Rightarrow$ $\overline{abc}=119$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=(5x+3-3x-4)(5x+3+3x+4)=$	**1p**
	$=(2x-1)(8x+7)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) Dacă n nu este divizibil cu $3\Rightarrow n=3k+1$ sau $n=3k+2$, unde k este număr natural	**1p**
	Dacă $n=3k+1\Rightarrow 8n+7=24k+15=3(8k+5)\vdots 3\Rightarrow E(n)\vdots 3$	**1p**
	Dacă $n=3k+2\Rightarrow 2n-1=6k+3=3(2k+1)\vdots 3\Rightarrow E(n)\vdots 3$	**1p**
3.	**a)** $f(-\sqrt{5})=-\sqrt{5}+3$	**1p**
	$f(\sqrt{5})=\sqrt{5}+3\Rightarrow f(\sqrt{5})\cdot f(-\sqrt{5})=(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})=9-5=4$	**1p**

	b) Simetricul punctului $A(-3,-6)$ față de originea $O(0,0)$ este punctul B, astfel încât punctul O este mijlocul segmentului AB	**1p**
	Triunghiurile AOP și BOQ sunt congruente, unde punctele P și Q sunt proiecțiile punctelor A și, respectiv B pe axa $Ox \Rightarrow OQ = OP = 3$ cm și $BQ = AP = 6$ cm $\Rightarrow B(3,6)$	**1p**
	$f(3) = 3+3 = 6 \Rightarrow B(3,6)$ aparține reprezentării grafice a funcției f	**1p**
4.	**a)** $ATPM$ și $TBCQ$ sunt dreptunghiuri, unde $QP \cap AB = \{T\} \Rightarrow TP = AM = 2$cm și $TB = CQ = AM = 2$cm	**1p**
	Triunghiul BTP este dreptunghic în T, $BP = \sqrt{BT^2 + PT^2} = 2\sqrt{2}$ cm	**1p**
	b) Fie $AQ \cap DP = \{S\}, CM \cap DP = \{V\}$	**1p**
	$PQ \parallel AD \Rightarrow \Delta PSQ \sim \Delta DSA \Rightarrow \frac{PS}{SD} = \frac{PQ}{AD}$, $MP \parallel DC \Rightarrow \Delta MVP \sim \Delta CVD \Rightarrow \frac{PV}{VD} = \frac{MP}{DC}$	
	$PQ = MP, AD = DC \Rightarrow \frac{PQ}{AD} = \frac{MP}{DC}$	**1p**
	Obținem $\frac{PS}{SD} = \frac{PV}{VD} \Rightarrow S = V \Rightarrow$ dreptele AQ, CM și DP sunt concurente	**1p**
5.	**a)** $BC = AC = AD + DC = 6$cm	**1p**
	Triunghiul EDC este dreptunghic în $D, \sphericalangle E = 30° \Rightarrow EC = 2 \cdot DC = 8$cm $\Rightarrow EB = 2$cm	**1p**
	b) $\sphericalangle ADF = 90°, \sphericalangle AFD = 30° \Rightarrow AF = 2 \cdot AD = 4$cm $\Rightarrow BF = 2$cm	**1p**
	$FQ \perp BC, Q \in BC \Rightarrow FQ = \sqrt{3}$cm și $FC = 2\sqrt{7}$ cm	**1p**
	$A_{EFC} = \frac{d(E,CF) \cdot CF}{2} = \frac{FQ \cdot EC}{2} \Rightarrow d(E,CF) = \frac{4\sqrt{21}}{7}$cm	**1p**
6.	**a)** $DC = 2x \Rightarrow PD = x$	
	Triunghiul PDC este dreptunghic în $D \Rightarrow PC^2 = PD^2 + DC^2 = 5x^2$	**1p**
	Triunghiul MCP este dreptunghic în $C \Rightarrow MP^2 = MC^2 + CP^2 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow AB = 2x = 4$cm	**1p**
	b) $(ABB') \parallel (DCC') \Rightarrow \sphericalangle((MP,(ABB')) = \sphericalangle((MP,(DCC'))$	**1p**
	$PD \perp DD'$, $PD \perp DC$, $DD' \cap DC = \{D\}$, deci $PD \perp (DCC')$	**1p**
	$\sin(\sphericalangle(MP,(ABB')) = \sin(\sphericalangle(MP,(DCC')) = \sin(\sphericalangle DMP) = \frac{DP}{MP} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2021 - 2022
Matematică

Test 6

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În prima zi Laura a cheltuit $\frac{1}{2}\cdot x$, iar în a doua zi a cheltuit $\frac{1}{6}\cdot x$, unde x reprezintă suma cheltuită de Laura în cele trei zile	**1p**
	Deoarece $\frac{1}{2}>\frac{1}{6}$, deducem că Laura a cheltuit mai mult în prima zi	**1p**
	b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{6}+100=x$, unde x suma cheltuită de Laura în cele trei zile	**1p**
	$2x=600$	**1p**
	$x=300$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=3\left(x^2-4\right)-\left(x^2-6x+9\right)-9(x-1)+3=2x^2-3x-9$, pentru orice număr real x	**1p**
	$(x-3)(2x+3)=2x^2+3x-6x-9=2x^2-3x-9=E(x)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(n)=(n-3)(2n+3)$, pentru orice număr natural n	**1p**
	Cum $E(n)$ este număr prim, obținem $n-3=1$ sau $2n+3=1$	**1p**
	$n=4\Rightarrow E(4)=11$ sau $n=-1$ care nu este număr natural, deci nu convine	**1p**

3.	**a)** $f(2)=0$	**1p**
	$f(2)\cdot f(3)=0\cdot f(3)=0$	**1p**
	b) $A(2,0)$ și $B(0,-6)$ sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy	**1p**
	$A_{\Delta ABM}=\dfrac{AM\cdot BO}{2}=6\Rightarrow AM=2$	**1p**
	$AM=\lvert m-2\rvert=2\Rightarrow m=4$ sau $m=0$	**1p**
4.	**a)** Triunghiul ABC dreptunghic în A, $\sphericalangle ACB=30^\circ$, de unde $BC=12\,\text{cm}$	**1p**
	AM este mediană $\Rightarrow AM=\dfrac{BC}{2}=6\,\text{cm}$	**1p**
	b) Triunghiul AMB este echilateral, deci $\sphericalangle AMB=60^\circ$	**1p**
	$PQ\perp BM$, $Q\in BM$, triunghiul PMQ dreptunghic în Q, $\sphericalangle MPQ=30^\circ\Rightarrow QM=\dfrac{PM}{2}=\dfrac{3}{2}$ cm	**1p**
	Triunghiul PMQ dreptunghic în $Q\Rightarrow PQ=\sqrt{9-\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ cm	**1p**
5.	**a)** EF este linie mijlocie în triunghiul COD	**1p**
	$EF=\dfrac{CD}{2}=\dfrac{AB}{2}=4$ cm	**1p**
	b) $EF\parallel CD\Rightarrow \Delta OEF\sim\Delta ODC\Rightarrow \dfrac{A_{\Delta OEF}}{A_{\Delta ODC}}=\left(\dfrac{OE}{OD}\right)^2=\dfrac{1}{4}$	**1p**
	$A_{\Delta ODC}=\dfrac{A_{\Delta ADC}}{2}=\dfrac{AD\cdot DC}{4}=12\,\text{cm}^2\Rightarrow A_{\Delta OEF}=\dfrac{12}{4}=3\,\text{cm}^2$	**1p**
	$A_{DEFC}=A_{\Delta ODC}-A_{\Delta OEF}=12-3=9\ \text{cm}^2$	**1p**
6.	**a)** $AB'=B'C=AC=12\sqrt{2}$ cm	**1p**
	Triunghiul $AB'C$ este echilateral $\Rightarrow \sphericalangle AB'C=60^\circ$	**1p**
	b) $AC\perp BD$, $AC\perp BB'$, $BD\cap BB'=\{B\}\Rightarrow AC\perp (BB'O)$, unde $\{O\}=AC\cap BD$	**1p**
	$BQ\perp B'O$, $Q\in B'O$, $BQ\subset (BB'O)\Rightarrow AC\perp BQ$, de unde obținem $BQ\perp (AB'C)$	**1p**
	În triunghiul $BB'O$ dreptunghic în B, $BQ=\dfrac{BB'\cdot BO}{B'O}=4\sqrt{3}$ cm $=d\left(B,(AB'C)\right)$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2021 - 2022
Matematică

Model

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $61=21\cdot 2+19$	**1p**
	Cum $19\neq 5$, deducem că nu este posibil ca Radu să aibă în pungă 61 de bomboane	**1p**
	b) $n=7\cdot c_1+5$, $n=14\cdot c_2+5$, $n=21\cdot c_3+5$, unde n este numărul bomboanelor din pungă și c_1, c_2 și c_3 sunt numere naturale	**1p**
	Cel mai mic multiplu comun al numerelor 7, 14 și 21 este 42, deci $n-5$ este multiplu de 42	**1p**
	$n=131$	**1p**
2.	**a)** $x^2+2x+1=(x+1)^2$	**1p**
	$E(x)=(x+1)^2-(x+1)^2+(x+1)^2=(x+1)^2$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)-x=(x+1)^2-x=x^2+x+1=$	**1p**
	$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$	**1p**
	$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$, deci $E(x)-x>0$, pentru orice număr real x	**1p**

3.	**a)** $f(-1)=1$	**1p**
	$f(2019)=2021 \Rightarrow f(-1)\cdot f(2019)=2021$	**1p**
	b) $A(-2,0)$ este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Ox	**1p**
	$B(0,2)$ este punctul de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axa Oy	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AOB}=\dfrac{OA\cdot OB}{2}=2$	**1p**
4.	**a)** $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow AB \parallel CD$	**1p**
	$\Delta ABN \sim \Delta CMN$, $\dfrac{BN}{MN}=\dfrac{AB}{CM}$, deci $BN=2\cdot MN$	**1p**
	b) Cum $12^2+9^2=15^2$, obținem că triunghiul ABC este dreptunghic în B	**1p**
	$\dfrac{AN}{CN}=\dfrac{AB}{CM}=2\Rightarrow \dfrac{AN}{AC}=\dfrac{2}{3}$	**1p**
	$NT\perp AB$, unde $T\in AB \Rightarrow NT \parallel BC$, deci $\Delta ATN \sim \Delta ABC$, de unde obținem $\dfrac{NT}{BC}=\dfrac{2}{3}$, deci distanța de la N la AB este $NT=6\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** $AM=MC \Rightarrow \sphericalangle AMN=2\cdot\sphericalangle ACM=30^\circ$	**1p**
	$\cos(\sphericalangle AMN)=\dfrac{MN}{AM}\Rightarrow MN=\dfrac{BC}{2}\cdot\cos 30^\circ=5\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	b) $AMPQ$ este paralelogram și $AP\perp MQ$, deci $AMPQ$ este romb	**1p**
	$AN=\dfrac{AM}{2}=\dfrac{BC}{4}=5\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{AMPQ}=\dfrac{AP\cdot MQ}{2}=\dfrac{2AN\cdot 2MN}{2}=50\sqrt{3}\text{cm}^2$	**1p**
6.	**a)** $V=\dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{ABCD}\cdot VO=\dfrac{1}{3}\cdot AB^2\cdot VO=$	**1p**
	$=\dfrac{256\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3$	**1p**
	b) Construim, prin V, dreapta d, $d \parallel AD \parallel BC$, de unde $(VAD)\cap(VBC)=d$	**1p**
	$VS\perp AD$, unde $S\in AD$, $VR\perp BC$, unde $R\in BC$, deci $VS\perp d$ și $VR\perp d$, de unde $\sphericalangle((VAD),(VBC))=\sphericalangle(VS,VR)$	**1p**
	$VR=VS=RS=8\text{cm}$, deci triunghiul VRS este echilateral, de unde $\sphericalangle SVR=60^\circ$, deci $\sphericalangle((VAD),(VBC))=60^\circ$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2021 - 2022
Matematică

Simulare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă $a=14$ și $b=28$, atunci $c.m.m.d.c\{14,28\}=14$	**1p**
	Dar, $c.m.m.d.c\{a,b\}=7\neq 14$, obținem că nu este posibil ca numerele să fie 14 și 28	**1p**
	b) $c.m.m.d.c\{a,b\}=7$, deci $a=7k$, $b=7p$, unde k și p sunt numere naturale, $(k,p)=1$, $k<p$,	**1p**
	$7k+7p=42\Rightarrow k+p=6$, deci $k=1$ și $p=5$	**1p**
	$a=7$ și $b=35$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=4x^2+4x+1-(4x^2-9)+4x^2-12x+9=$	**1p**
	$=4x^2+4x+1-4x^2+9+4x^2-12x+9=4x^2-8x+19$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=(2x-2)^2+15$, pentru orice număr real x	**1p**
	$(2x-2)^2+15\geq 15$, deci $E(x)\geq 15$, pentru orice număr real x	**1p**
	Cum A este cel mai mare număr natural pentru care $E(x)\geq A$, oricare ar fi numărul real x $\Rightarrow A=15$	**1p**

3.	**a)** $\frac{12}{100}\cdot 500=60$	**1p**
	$500-60=440$ de lei este preţul obiectului după ieftinirea cu 12%	**1p**
	b) $440-\frac{p}{100}\cdot 440=330$	**1p**
	$\frac{p}{100}\cdot 440=110$	**1p**
	$p=25$	**1p**
4.	**a)** $CD \parallel AP$ şi EP secantă, obţinem că $\sphericalangle DCE=\sphericalangle BPC=60^o$, deci $\sphericalangle BCP=30^o \Rightarrow CP=2\cdot BP$	**1p**
	În triunghiul BCP dreptunghic în B, $CP^2=BP^2+BC^2 \Rightarrow BP=2\sqrt{3}$ cm, deci $CP=4\sqrt{3}$ cm	**1p**
	b) $\sphericalangle ADE=150^o$, $AD=DE$, deci triunghiul ADE este isoscel şi $\sphericalangle AED=15^o \Rightarrow \sphericalangle AEP=45^o$	**1p**
	$EP=6+4\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$PQ\perp AE$, $Q\in AE$, în triunghiul dreptunghic PQE, $\sin\left(\sphericalangle QEP\right)=\frac{PQ}{EP}\Rightarrow$ $PQ=\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{3}\right)$cm, deci $d\left(P,AE\right)=\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{3}\right)$cm	**1p**
5.	**a)** În triunghiul dreptunghic ABG, $AB^2=AG^2+BG^2 \Rightarrow AB=5$cm	**1p**
	$P_{\Delta ABG}=3+4+5=12$cm	**1p**
	b) Pentru $AG\cap BC=\{P\} \Rightarrow AP$ mediană în triunghiul ABC	**1p**
	$GP=\frac{AG}{2}\Rightarrow GP=2$cm	**1p**
	În triunghiul dreptunghic PGB, $BP^2=BG^2+PG^2 \Rightarrow BP=\sqrt{13}$cm, de unde $BC=2\sqrt{13}$cm	**1p**
6.	**a)** AC diagonală în pătratul $ABCD$, deci $AC=12\sqrt{2}$ cm	**1p**
	$\sphericalangle SAC=\sphericalangle SCA=45° \Rightarrow SAC$ este triunghi dreptunghic isoscel $\Rightarrow SA^2+SC^2=AC^2 \Rightarrow$ $SC=12$cm	**1p**
	b) NP este linie mijlocie în triunghiul SAD, unde P este mijlocul segmentului SA, deci $NP \parallel AD$ şi $NP=\frac{AD}{2}$	**1p**
	$NP \parallel MB$ şi $NP=MB \Rightarrow BMNP$ este paralelogram, deci $MN=BP$	**1p**
	BP este înălţime în triunghiul echilateral SAB, deci $BP=6\sqrt{3}$cm, de unde $MN=6\sqrt{3}$cm	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 2 și 5 este egal cu: **a)** 2 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 20
5p	**2.** Valoarea numărului x din proporția $\frac{x}{15}=\frac{4}{5}$ este egală cu: **a)** 4 **b)** 12 **c)** 15 **d)** 60
5p	**3.** Duminică, temperatura măsurată la ora 10, la o stație meteo de pe vârful Omu, a fost de $-17°C$, în timp ce temperatura măsurată la aceeași oră în Baia Mare a fost de $4°C$. Temperatura înregistrată duminică la ora 10 în Baia Mare este mai mare decât temperatura înregistrată în același timp pe vârful Omu cu: **a)** $-21°C$ **b)** $-13°C$ **c)** $13°C$ **d)** $21°C$

5p **4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine descrescătoare este:

a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{13}{24}, \frac{2}{3}$

b) $\frac{13}{24}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{13}{24}, \frac{1}{2}$

d) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{13}{24}$

5p **5.** Patru elevi, Ana, Cristian, George și Lia, au calculat produsul numerelor $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$ și $\sqrt{20}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ana	Cristian	George	Lia
80	40	$16\sqrt{10}$	$4\sqrt{10}$

Dintre cei patru elevi, cel care a obținut rezultatul corect a fost:

a) Ana

b) Cristian

c) George

d) Lia

5p **6.** În tabelul de mai jos este reprezentat numărul de bilete vândute pentru două filme care au rulat la un cinematograf într-o zi de duminică, în funcție de ora începerii.

Ora începerii filmului	11:30	13:30	15:30	17:30	19:30	21:30
Numărul biletelor vândute pentru filmul A	25	95	83	60	40	92
Numărul biletelor vândute pentru filmul B	16	47	91	42	30	86

Ana afirma că: „Cel mai mare număr de bilete vândute este pentru filmele cu ora de început 21:30 ”. Afirmația Anei este:

a) adevărată

b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

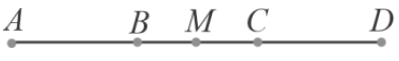
5p **1.** În figura următoare sunt reprezentate punctele coliniare A, B, M, C și D, în această ordine. Punctul M este mijlocul segmentului AD, punctul B este mijlocul segmentului AC, iar segmentele AB și CD sunt congruente. Dacă $BM = 2{,}5\,\text{cm}$, atunci segmentul AC are lungimea egală cu:

a) 2,5 cm

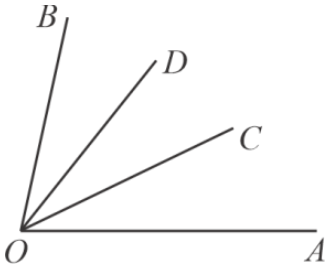
b) 5 cm

c) 7,5 cm

d) 10 cm



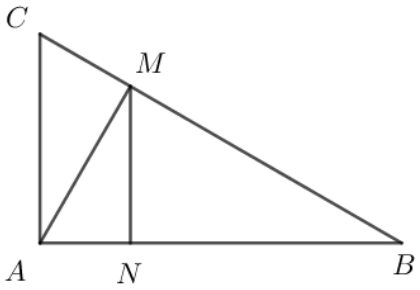
5p **2.** În figura următoare, punctele C și D sunt situate în interiorul unghiului AOB, astfel încât semidreapta OC este bisectoarea unghiului AOD, iar fiecare dintre unghiurile AOC și BOD are măsura de $26°$. Măsura unghiului BOC este egală cu:



a) $26°$
b) $39°$
c) $52°$
d) $78°$

5p **3.** La cercul de robotică, Radu a creat un roboțel care se poate deplasa parcurgând drumul cel mai scurt de la un punct la o dreaptă. Terenul de verificare, reprezentat în figura următoare, are forma unui triunghi ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 40\,\text{dm}$ și $\sphericalangle B = 30°$. Roboțelul pornește din punctul A către dreapta BC, pe care o întâlnește în punctul M, după care se deplasează spre dreapta AB, pe care o intersectează în punctul N.

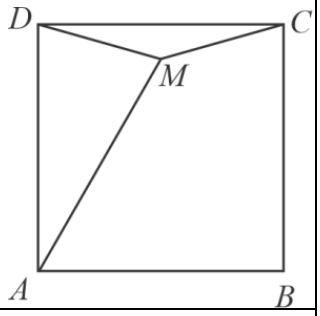
Lungimea segmentului AN este egală cu:



a) 20 dm
b) 15 dm
c) 10 dm
d) 5 dm

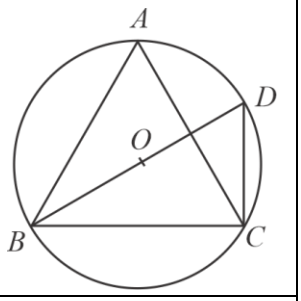
5p **4.** În figura următoare, M este un punct în interiorul pătratului $ABCD$, astfel încât măsura unghiului DAM este egală cu $30°$ și $AM = CD$.

Măsura unghiului ADM este egală cu:



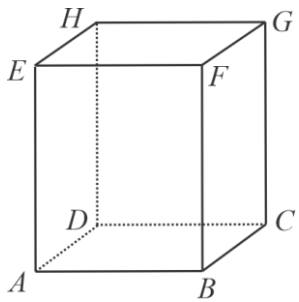
a) $45°$
b) $60°$
c) $75°$
d) $90°$

5p **5.** Punctele A, B, C și D sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât triunghiul ABC este echilateral și BD este diametru. Măsura unghiului ACD este egală cu:



a) $30°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $90°$

5p **6.** O cutie plină cu suc de caise are forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AE = 20\,\text{cm}$, $AB = 12\,\text{cm}$ și $AD = 5\,\text{cm}$. Tot sucul din cutie se toarnă în pahare de $200\,\text{ml}$. Numărul paharelor umplute cu sucul de caise din cutie, este egal cu:



a) 5
b) 6
c) 12
d) 20

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** La un magazin s-au vândut într-o zi 500 kg de cireșe și de mere. Suma obținută prin vânzarea acestora este de 4620 de lei. Un kilogram de cireșe costă 15 lei, iar un kilogram de mere costă 7 lei.

(2p) a) Este posibil ca suma obținută din vânzarea cireșelor să fie egală cu suma obținută din vânzarea merelor? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Câte kilograme de mere s-au vândut în ziua aceea la magazin?

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(4x+3)^2+(2x-4)(4x+3)+(x-2)^2$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(2p) a) Verifică dacă $E(-3)$ este pătratul unui număr natural.

3p) b) Determină numărul natural n pentru care $\sqrt{E(n)} \leq 3$.

5p

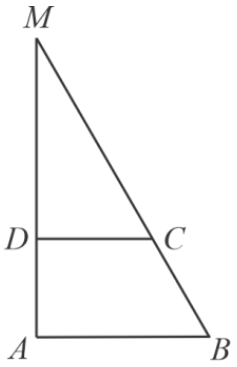
3. Se consideră numerele reale $x = \sqrt{144} + 2\sqrt{18} - \left(\sqrt{3}\right)^2$ și $y = \left(\sqrt{5} - \sqrt{3}\right)^2 - \sqrt{72} + \left(\sqrt{5} + \sqrt{3}\right)^2 - 7$.

(2p) a) Arată că $x = 9 + 6\sqrt{2}$.

(3p) b) Arată că produsul numerelor x și y este număr natural.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB = 12$ cm, $BC = CD = 8$ cm, iar unghiul A are măsura egală cu $90°$.

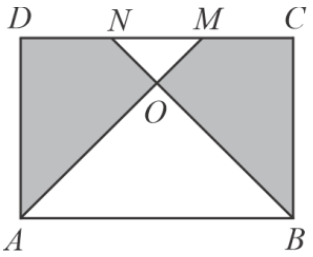
(2p) a) Arată că $AD = 4\sqrt{3}$ cm.



(3p) b) Calculează aria triunghiului ABM, unde $AD \cap BC = \{M\}$.

5p **5.** În figura următoare este reprezentată o placă de gresie de forma unui dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 60$ cm și $BC = 40$ cm. Punctele M și N sunt situate pe segmentul DC astfel încât $DN = MN = MC$, iar O este punctul de intersecție a dreptelor AM și BN.

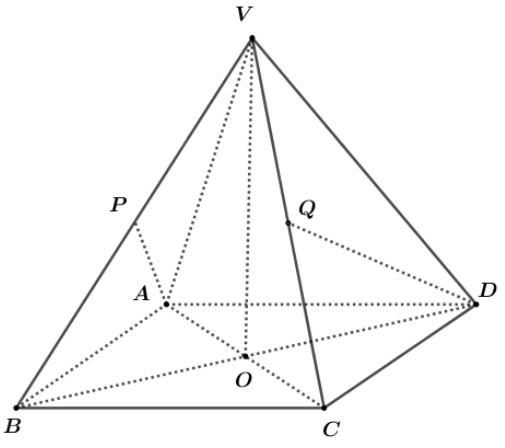
(2p) a) Arată că perimetrul patrulaterului $ABMN$ este egal cu $40\left(2+\sqrt{5}\right)$ cm.



(3p) b) Determină raportul dintre aria dreptunghiului $ABCD$ și suma ariilor patrulaterelor $ADNO$ și $BCMO$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă $VABCD$ cu $ABCD$ pătrat, $AB=8\,\text{cm}$ și înălțimea $VO=4\sqrt{2}\,\text{cm}$, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD. Punctele P și Q sunt mijloacele segmentelor VB, respectiv CV.

(2p) a) Arată că $VB=8\,\text{cm}$.



(3p) b) Demonstrează că dreptele VM și BC sunt perpendiculare, unde $\{M\} = AP \cap DQ$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui:
…….....
Prenumele:…….....
.....……...……
Școala de proveniență:
…….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

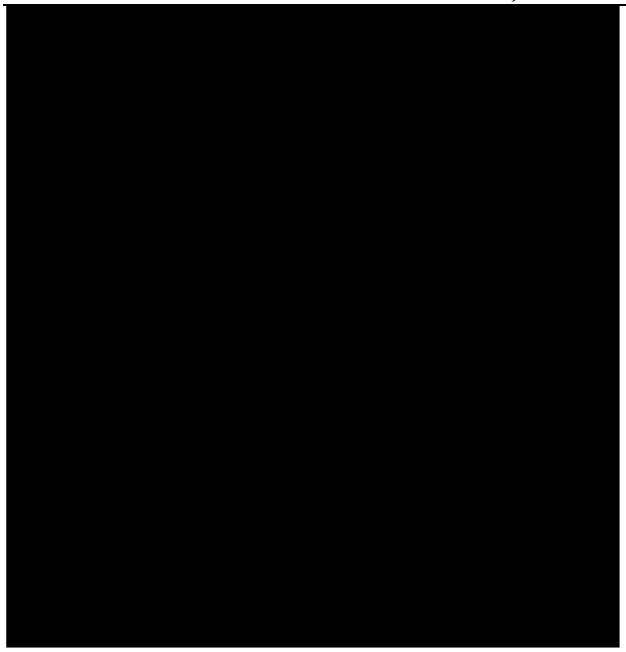
Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Câtul împărțirii cu rest a numărului natural 35 la numărul natural 15 este egal cu: **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 5
5p	**2.** Numărul care reprezintă $\frac{1}{4}$ din 60 este egal cu: **a)** 15 **b)** 60 **c)** 120 **d)** 240
5p	**3.** Suma numerelor întregi negative din intervalul $(-4;\ 5]$ este egală cu: **a)** 9 **b)** 5 **c)** -6 **d)** -10
5p	**4.** Dintre următoarele seturi de numere, cel scris în ordine crescătoare este: **a)** $8,(5);\ 8,55;\ \frac{17}{2};\ \frac{161}{20}$ **b)** $8,55;\ 8,(5);\ \frac{17}{2};\ \frac{161}{20}$ **c)** $\frac{161}{20};\ 8,(5);\ 8,55;\ \frac{17}{2}$ **d)** $\frac{161}{20};\ \frac{17}{2};\ 8,55;\ 8,(5)$

5p **5.** Patru elevi, Aurel, Călin, Dragoș și Victor, calculează produsul numerelor reale $a=2\sqrt{7}-5$ și $b=2\sqrt{7}+5$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul următor:

Dragoș	$\sqrt{3}$
Călin	3
Aurel	$2\sqrt{7}$
Victor	9

Conform informațiilor din tabel, dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect produsul numerelor este:

a) Dragoș
b) Călin
c) Aurel
d) Victor

5p **6.** Un pieton se deplasează cu viteza de 6 km pe oră. Afirmația: „Pietonul, păstrând constantă viteza de deplasare, a parcurs 10 km în 60 de minute.”, este:

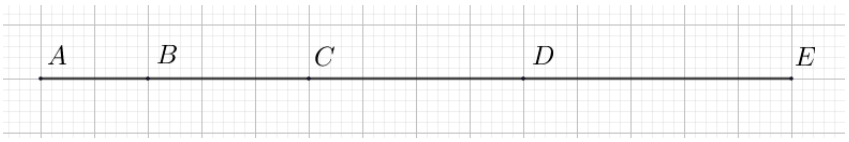
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

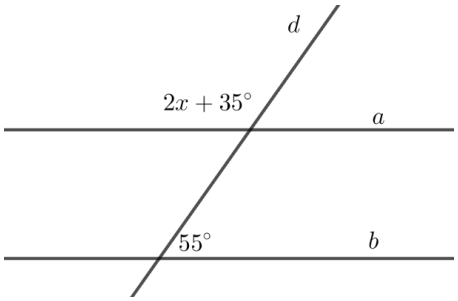
5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C, D și E sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB=2$ cm, $BD=7$ cm, $CD=4$ cm și $CE=9$ cm. Lungimea segmentului AE este egală cu:

a) 5 cm
b) 9 cm
c) 12 cm
d) 14 cm



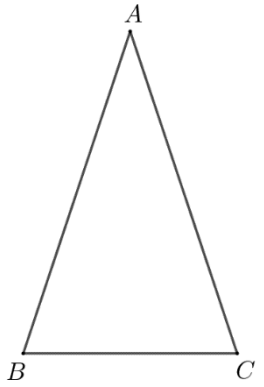
5p **2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt intersectate de secanta d, fiind evidențiate măsurile a două unghiuri de $55°$ și respectiv $2x+35°$. Valoarea lui x este de:

a) 10°
b) 20°
c) 45°
d) 50°

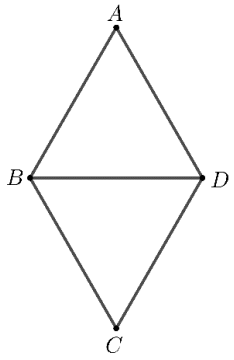


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC de bază BC. Unghiul B are măsura de $75°$ și $AB=4$ cm. Aria triunghiului ABC este egală cu:

a) 4 cm^2
b) $4\sqrt{3}$ cm^2
c) 8 cm^2
d) 16 cm^2



5p **4.** În figura alăturată este reprezentat rombul $ABCD$ cu măsura unghiului ABC de $120°$ și lungimea segmentului BD egală cu 4 cm. Perimetrul triunghiului ABD este egal cu:



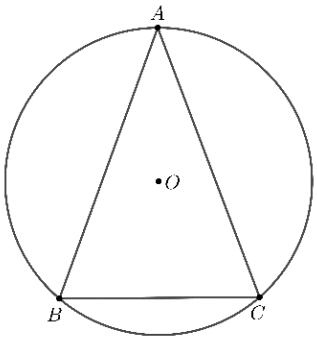
a) 16 cm

b) $8\sqrt{3}$ cm

c) 12 cm

d) $4\sqrt{3}$ cm

5p **5.** În figura alăturată, punctele A, B și C sunt vârfurile unui triunghi isoscel de bază BC, înscris în cercul de centru O, iar măsura unghiului AOC este egală cu $140°$. Măsura unghiului BAC este egală cu:



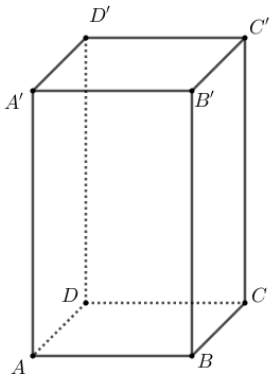
a) $40°$

b) $70°$

c) $80°$

d) $140°$

5p **6.** Diagonala paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 4$ dm, $BC = 3$ dm și înălțimea $AA' = 5$ dm, este egală cu:



a) 5 dm

b) $\sqrt{34}$ dm

c) $\sqrt{41}$ dm

d) $5\sqrt{2}$ dm

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Ionel împarte pe rând numărul natural n la 3, 9 respectiv 15 și obține de fiecare dată restul 2.

(2p) a) Este posibil ca numărul natural n să fie egal cu 38? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină cel mai mare număr natural n de două cifre, care îndeplinește condițiile din enunț.

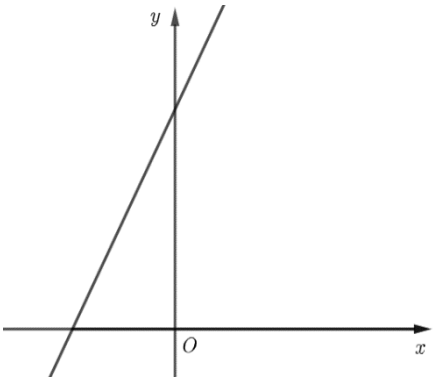
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(2x+1)^2+(2x-1)^2-4\left(2x^2+3x\right)$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=2-12x$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină numerele naturale a pentru care $-10a+2-E(a)\leq 2\sqrt{3}$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+4$.

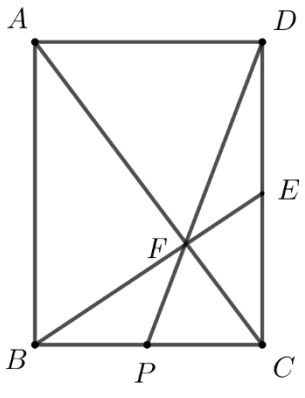
(2p) a) Arată că $f\left(-\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)=-2$.



(3p) b) Calculează distanța de la originea $O(0,0)$ a sistemului de axe ortogonale xOy la reprezentarea grafică a funcției f.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB=4$ cm și $BC=3$ cm. Punctul E este mijlocul segmentului CD și F este punctul de intersecție a dreptelor BE și AC.

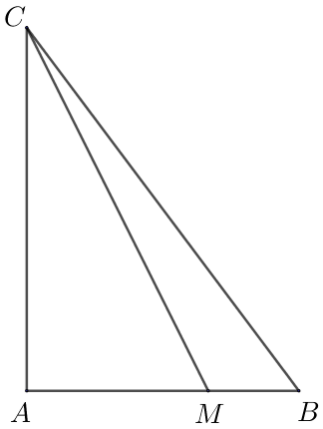
(2p) a) Arată că $BE=\sqrt{13}$ cm.



(3p) b) Determină lungimea segmentului FP, unde P este punctul de intersecție a dreptelor DF și BC.

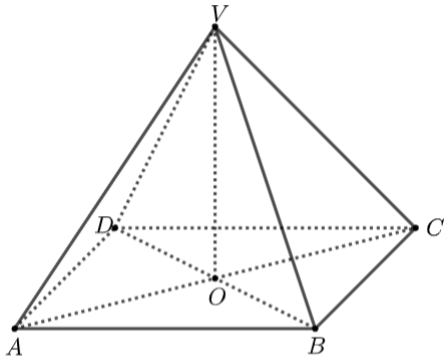
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în A, în care $AC = 8$ cm și $BC = 10$ cm. Punctul M se află pe latura AB astfel încât $MB = 2$ cm.

(2p) a) Arată că $AM = 4$ cm.



(3p) b) Arată că suma distanțelor de la punctele A și B la dreapta CM este mai mare decât $\frac{16}{3}$ cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$, $AB = 6$ cm. Înălțimea VO a piramidei are lungimea egală cu 4 cm, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.



(2p) a) Arată că aria laterală a piramidei $VABCD$ este egală cu 60 cm^2.

(3p) b) Calculează distanța de la punctul Q la planul (VAD), unde Q este mijlocul segmentului OC.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

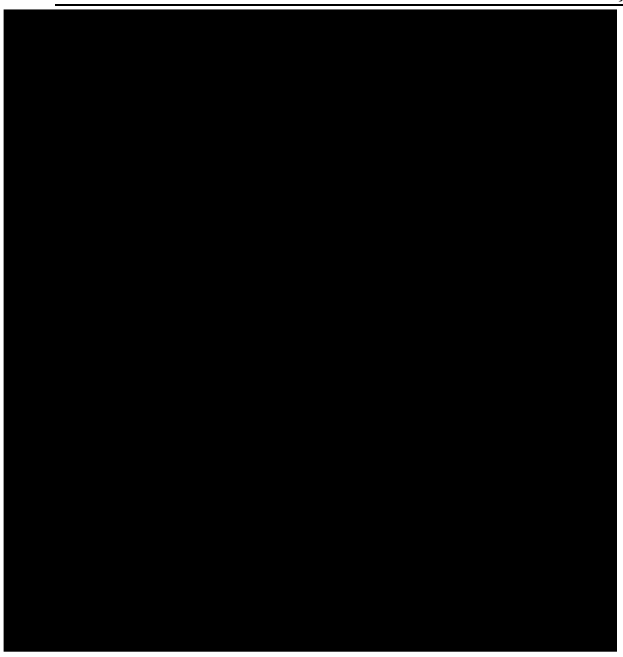
Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

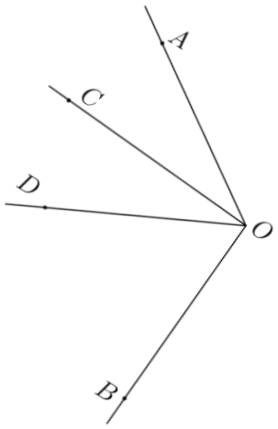
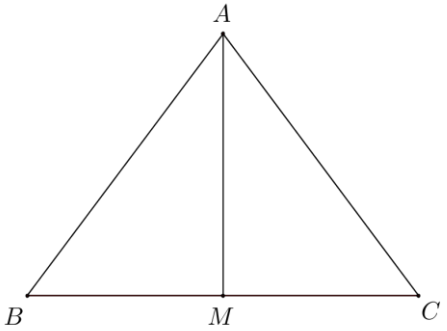
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $5\cdot(3+2\cdot 4)$ este egal cu: **a)** 23 **b)** 40 **c)** 55 **d)** 100
5p	**2.** Numărul care reprezintă 10% din 300 este egal cu: **a)** 3 **b)** 9 **c)** 27 **d)** 30
5p	**3.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 20 și 24 este egal cu: **a)** 4 **b)** 60 **c)** 120 **d)** 480
5p	**4.** Cel mai mare număr din mulțimea $A=\left\{\frac{33}{10},\frac{5}{2},\frac{3}{5},3\right\}$ este: **a)** $\frac{33}{10}$ **b)** 3 **c)** $\frac{5}{2}$ **d)** $\frac{3}{5}$

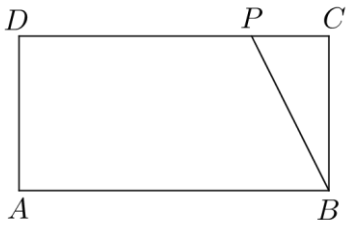
5p	**5.** Media aritmetică a numerelor $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{3}$ și $-3\sqrt{3}$ este egală cu: **a)** $2\sqrt{3}$ **b)** $3\sqrt{3}$ **c)** $4\sqrt{3}$ **d)** $6\sqrt{6}$
5p	**6.** Suma dintre vârsta Anei și vârsta lui Matei este de 15 ani. Afirmația „Peste 3 ani suma vârstelor Anei și a lui Matei va fi egală cu 18 ani.” este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată, A, B, C și D sunt puncte coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = BC = CD$. Valoarea raportului $\frac{BD}{AC}$ este egală cu: **a)** $0,25$ **b)** $0,5$ **c)** $0,75$ **d)** 1
5p	**2.** În figura alăturată este reprezentat unghiul AOB cu măsura de $120°$. Semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOB. Semidrepta OC este situată în interiorul unghiului AOD, astfel încât măsura unghiului AOD este de două ori mai mare decât măsura unghiului AOC. Măsura unghiului COB este egală cu: **a)** $30°$ **b)** $60°$ **c)** $90°$ **d)** $120°$ 
5p	**3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = AC$ și $BC = 6\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului BC și $AM = 4\,\text{cm}$. Perimetrul triunghiului ABC este egal cu: **a)** 10 cm **b)** 12 cm **c)** 16 cm **d)** 18 cm 

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu aria de 24cm^2. Punctul P aparține laturii CD, astfel încât $DP = 3PC$.
Aria triunghiului PBC este egală cu:

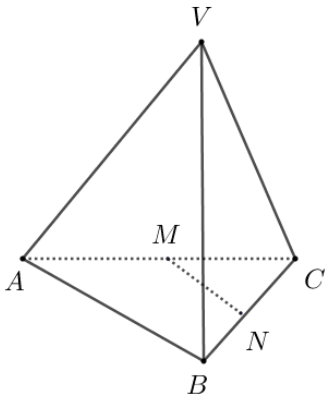


a) 12cm^2
b) 8cm^2
c) 6cm^2
d) 3cm^2

5p **5.** Lungimea unui cerc este egală cu 24π cm. Diametrul cercului este egal cu:

a) 24 cm
b) 18 cm
c) 12 cm
d) 6 cm

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat $VABC$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AC, respectiv BC. Măsura unghiului dreptelor MN și VA este egală cu:



a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Pentru a viziona un spectacol de teatru împreună cu familia, Ana cumpără trei bilete pentru adulți și șase bilete pentru copii, plătind în total suma de 420 de lei. Prețul unui bilet pentru copii reprezintă 50% din prețul unui bilet pentru adulți.

(2p) a) Este posibil ca prețul unui bilet pentru copii să fie 25 de lei? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină prețul biletului pentru un adult.

5p

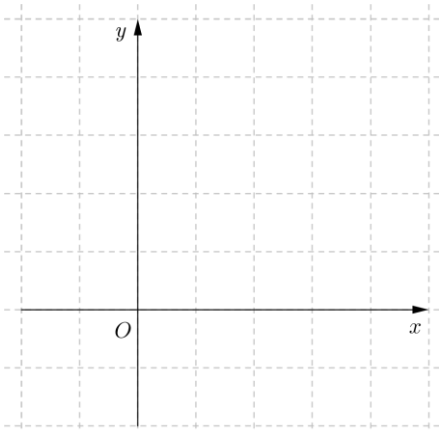
2. Se consideră expresia $E(x)=(x+2)^2-(x-2)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=8x$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Demonstrează că numărul natural $A=E\left(n^2\right)+E\left(n\right)$ este multiplu al lui 16, pentru orice număr natural n.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=x-4$.

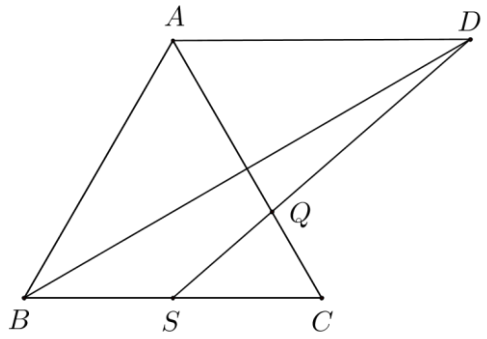
(2p) a) Reprezintă grafic funcția f în sistemul de axe ortogonale xOy din figura alăturată.



(3p) b) Determină mulțimea soluțiilor inecuației $1-f\left(a\right)\leq f\left(4\right)$, unde a este număr real.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC cu $AB=12\,\text{cm}$. Punctul S este mijlocul segmentului BC, punctul D este simetricul punctului B față de AC, iar Q este punctul de intersecție a dreptelor DS și AC.

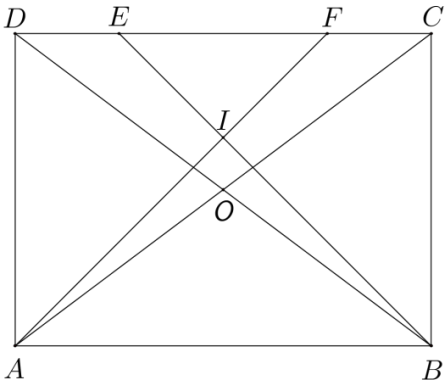
(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $36\,\text{cm}$.



(3p) b) Determină lungimea segmentului DQ.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 20\,\text{cm}$ și $AD = 15\,\text{cm}$. Dreptele AC și BD se intersectează în punctul O, iar punctele E și F se află pe latura CD, astfel încât $DE = FC = 5\,\text{cm}$.

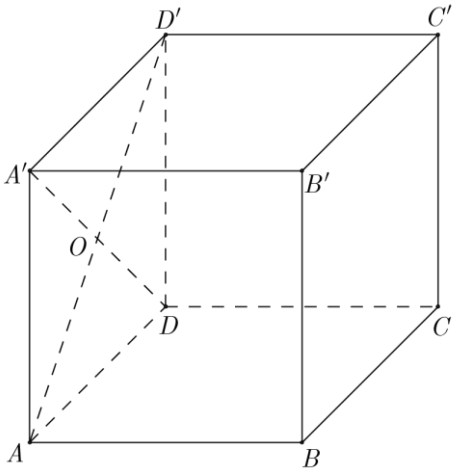
(**2p) a)** Arată că sinusul unghiului ABD este egal cu $\frac{3}{5}$.



3p) b) Calculează lungimea segmentului OI, unde I este punctul de intersecție a dreptelor BE și AF.

5p **6.** Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea diagonalei AC' de $6\sqrt{3}\,\text{cm}$.

(2p) a) Arată că aria laterală a cubului $ABCDA'B'C'D'$ este egală cu $144\,\text{cm}^2$.



(3p) b) Determină măsura unghiului dreptelor $B'C$ și OB, unde $\{O\} = AD' \cap A'D$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……..……..……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Diferența dintre numărul 21 și cel mai mic număr prim este egală cu: **a)** 18 **b)** 19 **c)** 20 **d)** 21
5p	**2.** Numărul natural nenul x pentru care $\frac{1}{x}=1$ este egal cu: **a)** -1 **b)** 1 **c)** 2 **d)** 3
5p	**3.** Media aritmetică a numerelor întregi din intervalul $(-3,4]$ este egală cu: **a)** 0 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{4}{7}$ **d)** 1
5p	**4.** Mulțimea valorilor naturale ale lui x pentru care $\frac{6}{x+1}$ este număr natural este: **a)** $\{-7,-4,-3,-2,0,1,2\}$ **b)** $\{0,1,2,3,5\}$ **c)** $\{0,1,2,5\}$ **d)** $\{1,2,5\}$

5p **5.** Andrei, Dina, Matei și Nora calculează diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre numerele reale $x = 7 - 4\sqrt{3}$ și $y = 7 + 4\sqrt{3}$. Rezultatele obținute de ei sunt trecute în tabelul următor:

Andrei	$-8\sqrt{3}$
Dina	0
Matei	$8\sqrt{3}$
Nora	14

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect diferența este:

a) Andrei

b) Dina

c) Matei

d) Nora

5p **6.** Adrian are 150 de lei, iar Bogdan are 100 de lei. Adrian afirmă: „Dacă Bogdan mi-ar da jumătate din suma lui, atunci aș avea dublul sumei care i-ar rămâne lui Bogdan.” Afirmația lui Adrian este:

a) adevărată

b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

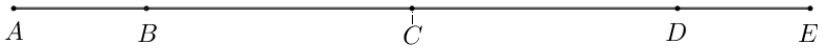
5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele distincte coliniare A, B, C, D și E, astfel încât punctul C este și mijlocul segmentului AE și mijlocul segmentului BD. Dacă $BC = 2 \cdot AB$, atunci numărul perechilor de segmente congruente, determinate de punctele date, este egal cu:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4



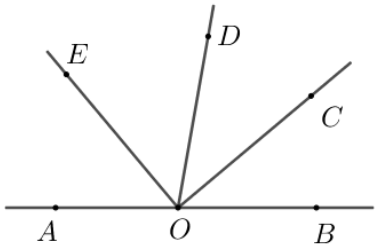
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, O și B. Punctele C, D și E sunt situate de aceeași parte a dreptei AB, astfel încât semidreapta OC este bisectoarea unghiului DOB. Dreptele OE și OC sunt perpendiculare și măsura unghiului DOE este de $50°$. Măsura unghiului AOE este egală cu:

a) $30°$

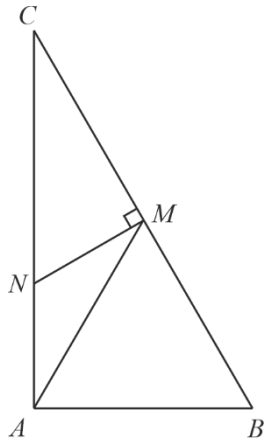
b) $40°$

c) $50°$

d) $100°$



5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A. Punctul M este mijlocul segmentului BC, iar $AM = 3\,\text{cm}$. Măsura unghiului C este egală cu $30°$, iar dreptele MN și BC sunt perpendiculare. Lungimea segmentului MN este egală cu:



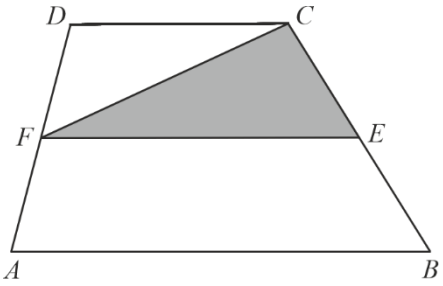
a) $\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{cm}$

b) $1{,}5\,\text{cm}$

c) $\sqrt{3}\,\text{cm}$

d) $3\,\text{cm}$

5p **4.** Figura alăturată reprezintă schița unui teren în formă de trapez $ABCD$ cu suprafața de $424\,\text{m}^2$. Dacă EF este linia mijlocie a trapezului $ABCD$, atunci aria triunghiului CEF este:



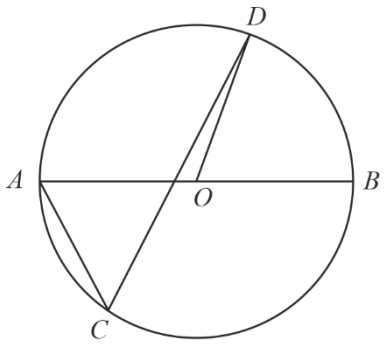
a) $53\,\text{m}^2$

b) $106\,\text{m}^2$

c) $207\,\text{m}^2$

d) $212\,\text{m}^2$

5p **5.** Punctele A, B, C și D sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A și B sunt diametral opuse, segmentele AB și CD sunt concurente, iar măsura unghiului DOB este de $70°$. Măsura unghiului ACD este egală cu:



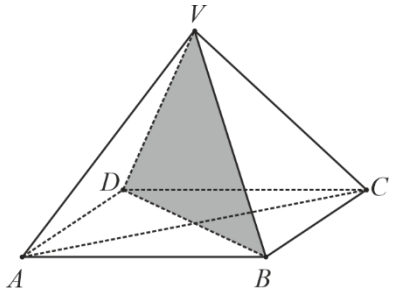
a) $55°$

b) $70°$

c) $110°$

d) $180°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă regulată $VABCD$, cu baza pătratul $ABCD$. Dacă triunghiul VBD este echilateral și $AB = \sqrt{2}\,\text{dm}$, atunci suma lungimilor muchiilor laterale ale piramidei este egală cu:



a) $8\,\text{dm}$

b) $8\sqrt{2}\,\text{dm}$

c) $4\sqrt{2}\,\text{dm}$

d) $6\,\text{dm}$

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p

1. Într-un bloc de locuințe sunt 110 camere, repartizate în 40 de apartamente cu 2, respectiv cu 3 camere.

(2p) a) Este posibil ca numărul apartamentelor cu două camere din acel bloc să fie egal cu numărul apartamentelor cu trei camere? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul apartamentelor cu 2 camere din acest bloc.

5p

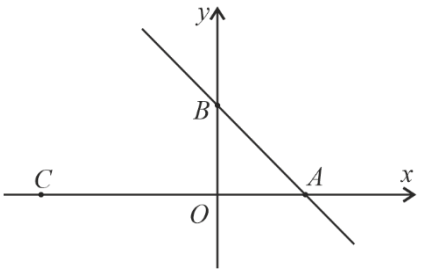
2. Se consideră expresia $E(x)=\left(-x+x^2\right)^2+4x^3$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(-1)=E(0)$.

(3p) b) Determină numărul natural nenul n, știind că $\frac{1}{\sqrt{E(1)}}+\frac{1}{\sqrt{E(2)}}+\frac{1}{\sqrt{E(3)}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{E(n)}}=\frac{2021}{2022}$.

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x$.

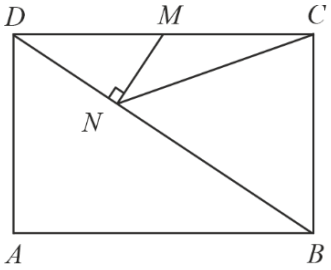
(2p) a) Calculează $\dfrac{f(0)-f(2)}{2}$.



(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determină distanța dintre punctul $C(-4,0)$ și mijlocul segmentului AB.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 8\,\text{cm}$ și $AD = 6\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul laturii CD, iar punctul N se află pe BD, astfel încât dreptele MN și BD sunt perpendiculare.

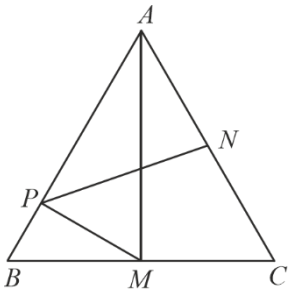
(2p) a) Calculează perimetrul triunghiului ABD.



(3p) b) Arată că aria triunghiului BCN este $16,32\,\text{cm}^2$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral ABC, cu $AB = 8\,\text{cm}$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv AC, iar punctul P se află pe latura AB, astfel încât dreptele MP și AB sunt perpendiculare.

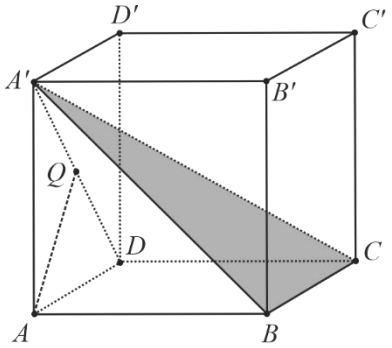
(2p) a) Arată că $BP = 2\,\text{cm}$.



(3p) b) Arată că lungimea segmentului PN este mai mare decât $3\sqrt{3}\,\text{cm}$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6\,\text{cm}$.

(2p) a) Arată că volumul cubului este mai mare decât $0,2$ litri.



(3p) b) Calculează unghiul dintre dreapta AQ și planul $(A'BC)$, unde punctul Q este mijlocul segmentului $A'D$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui:
…….....
Prenumele:…….....
.....……..……
Școala de proveniență:
…….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

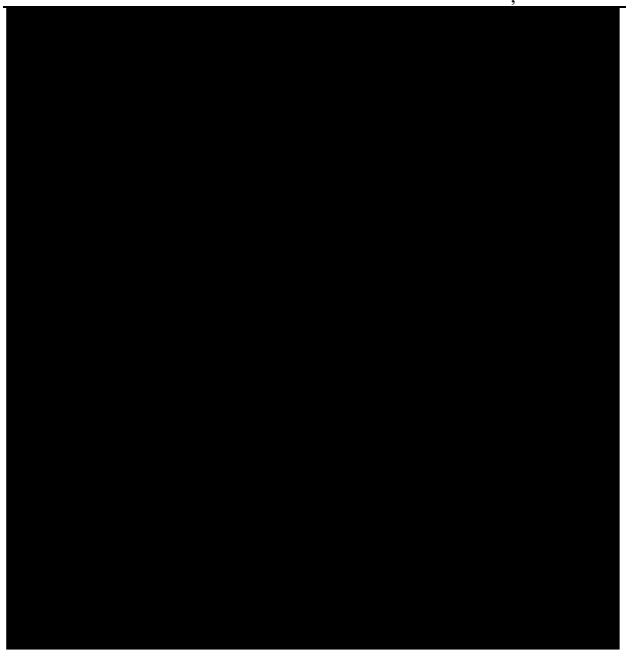
Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Un divizor al numărului 75 este: **a)** 150 **b)** 12 **c)** 7 **d)** 5
5p	**2.** Rezultatul calculului $1,5:2$ este egal cu: **a)** $0,75$ **b)** $2,25$ **c)** 3 **d)** 75
5p	**3.** Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element al mulțimii $A=\{0,1,2,3,4,5,6\}$, acesta să fie număr par este egală cu: **a)** $\frac{3}{7}$ **b)** $\frac{4}{7}$ **c)** $\frac{7}{4}$ **d)** $\frac{7}{3}$
5p	**4.** Numărul real $-2\sqrt{3}$ aparține intervalului: **a)** $(-3,4)$ **b)** $(3,4)$ **c)** $(-4,-3)$ **d)** $(-3,-2)$

5p **5.** Patru elevi, Alin, Cristina, Mihai și Dana, calculează suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 3 dau câtul 4 și obțin rezultatele înregistrate în tabelul următor:

Alin	54
Cristina	42
Mihai	39
Dana	12

Conform informațiilor din tabel, dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect suma numerelor este:

a) Alin
b) Cristina
c) Mihai
d) Dana

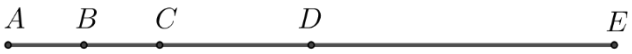
5p **6.** Prețul unui stilou este 40 lei. Matei afirmă: „Dacă prețul stiloului ar fi fost cu 20% mai mic, atunci cu 128 lei aș fi putut cumpăra 4 stilouri de același fel.”. Afirmația lui Matei este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

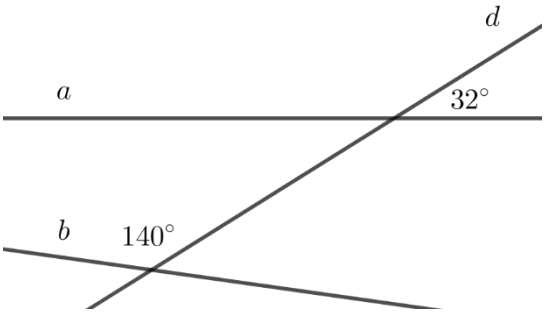
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C, D și E sunt coliniare, în această ordine, astfel încât punctul B este mijlocul segmentului AC, punctul C este mijlocul segmentului AD și punctul D este mijlocul segmentului AE. Raportul $\frac{BD}{AE}$ este egal cu:



a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{7}$
c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{3}{8}$

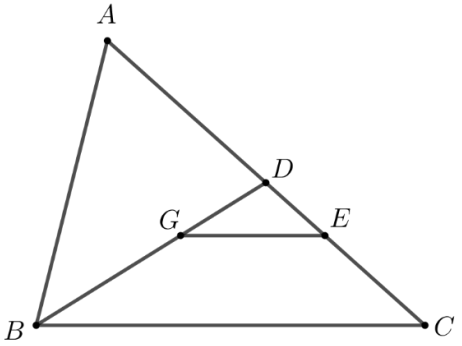
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate într-un plan, dreptele a și b intersectate de dreapta d, fiind evidențiate măsurile a două unghiuri de $32°$ și, respectiv de $140°$. Unghiul dintre dreptele a și b este egal cu:



a) $0°$
b) $8°$
c) $90°$
d) $172°$

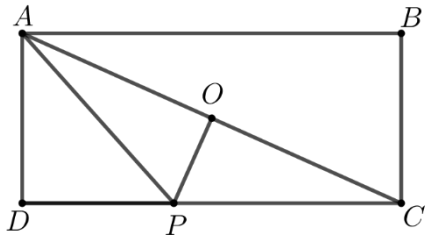
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AC=6\text{cm}$. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, $BG\cap AC=\{D\}$ și $GE\parallel BC$, $E\in AC$. Lungimea segmentului DE este egală cu:

a) 4 cm
b) 3 cm
c) 2 cm
d) 1 cm



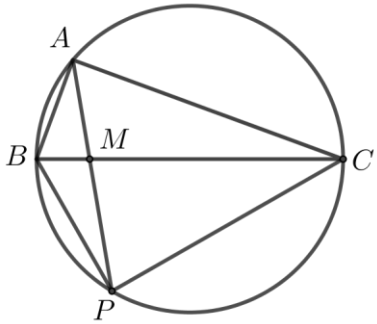
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$. Punctul O este mijlocul diagonalei AC, iar punctul P se află pe latura DC, astfel încât dreptele PO și AC sunt perpendiculare. Dacă $AP=3\text{cm}$, și $BC=\sqrt{5}\,\text{cm}$, atunci lungimea segmentului AB este egală cu:

a) 3 cm
b) 5 cm
c) $3\sqrt{5}$ cm
d) $2\sqrt{14}$ cm



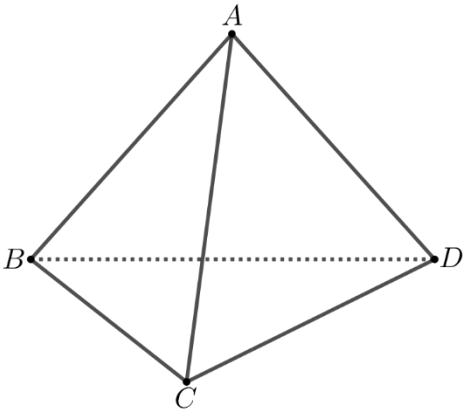
5p **5.** În figura alăturată, punctele A, B și C se află pe un cerc și sunt vârfurile unui triunghi dreptunghic în A. Dacă punctul M se află pe latura BC și dreapta AM intersectează a doua oară cercul în punctul P, atunci măsura unghiului BPC este egală cu:

a) 30°
b) 60°
c) 90°
d) 120°



5p **6.** Muchia AB a tetraedrului regulat $ABCD$ este egală cu 6cm. Aria totală a tetraedrului regulat $ABCD$ este egală cu:

a) $36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
b) $27\sqrt{3}\ \text{cm}^2$
c) $36\ \text{cm}^2$
d) $18\ \text{cm}^2$



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p

1. Dacă împărțim numărul $\overline{abc}$, scris în baza 10, la numărul $\overline{ac}$ obținem câtul 6 și restul 5.

(2p) a) Este posibil ca numărul $\overline{ac}$ să fie egal cu 18? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numerele $\overline{abc}$.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=(5x+3)^2-(3x+4)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=(2x-1)(8x+7)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Dacă numărul natural n **nu** este divizibil cu 3, atunci arată că $E(n)$ este divizibil cu 3.

5p

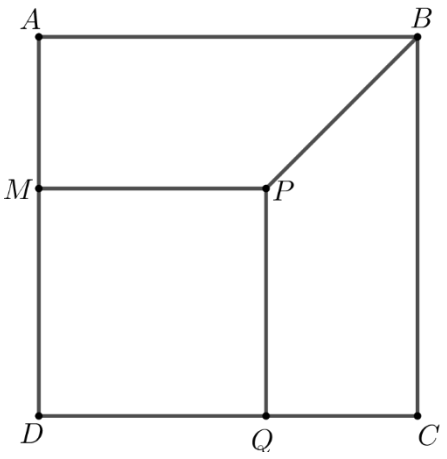
3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3$.

(2p) a) Arată că $f(\sqrt{5})\cdot f(-\sqrt{5})=4$.

(3p) b) Arată că simetricul punctului $A(-3,-6)$ față de originea $O(0,0)$ a sistemului de axe ortogonale xOy aparține reprezentării grafice a funcției f.

5p **4.** În figura alăturată sunt reprezentate pătratele $ABCD$ și $MPQD$. Punctul Q se află pe latura CD și $AM = 2\text{cm}$.

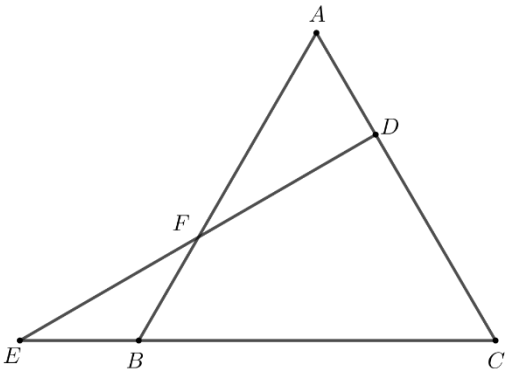
(2p) a) Arată că $PB = 2\sqrt{2}$ cm.



(3p) b) Demonstrează că dreptele AQ, CM și DP sunt concurente.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC. Punctul D se află pe latura AC astfel încât $AD = 2\,\text{cm}$ și $DC = 4\,\text{cm}$ iar punctul E se află pe dreapta BC astfel încât dreptele ED și AC sunt perpendiculare.

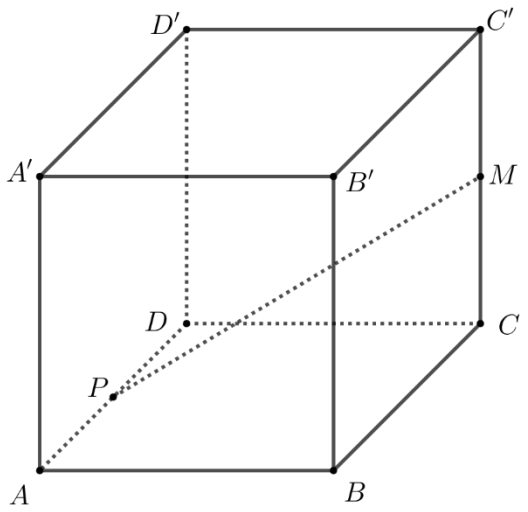
(2p) a) Arată că $EB = 2\,\text{cm}$.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul E la dreapta CF, unde $\{F\} = ED \cap AB$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDA'B'C'D'$. Punctul M este mijlocul segmentului CC', punctul P este mijlocul segmentului AD și $MP = 2\sqrt{6}\,\text{cm}$.

(2p) a) Arată că $AB = 4\,\text{cm}$.



(3p) b) Arată că sinusul unghiului dintre dreapta MP și planul (ABB') este egal cu $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....
Școala de proveniență: …….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

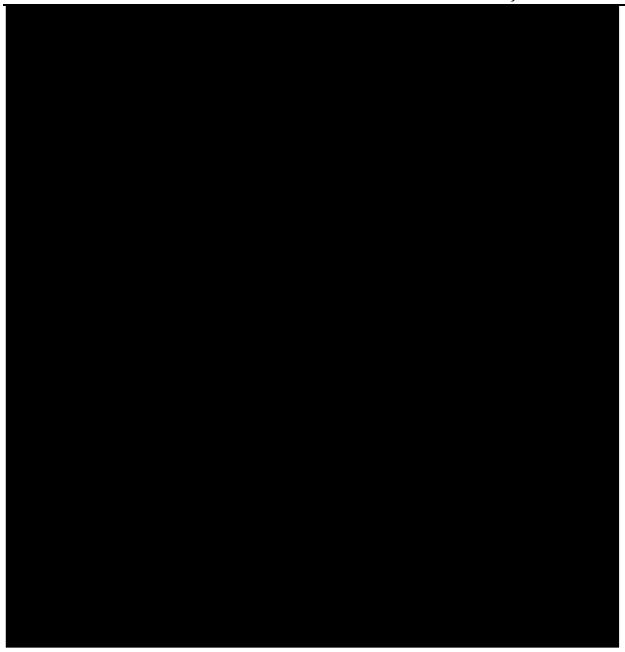
Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $8-6:2$ este egal cu: **a)** -5 **b)** -1 **c)** 1 **d)** 5
5p	**2.** Numărul natural care reprezintă 10% din 1000 este egal cu: **a)** 1 **b)** 10 **c)** 100 **d)** 990
5p	**3.** Soluția ecuației $4-x=6$ este: **a)** -10 **b)** -2 **c)** 2 **d)** 24
5p	**4.** Din setul de numere $3,(21);\ 32,1;\ 3,21;\ 3,2(1)$ cel mai mic număr este: **a)** $3,21$ **b)** $3,(21)$ **c)** $3,2(1)$ **d)** $32,1$

5p **5.** Patru elevi Dan, Mihai, Ana și Miruna, calculează media geometrică a numerelor reale $a = 6 - 2\sqrt{5}$ și $b = 6 + 2\sqrt{5}$ și au obținut rezultatele înregistrate în tabelul de mai jos.

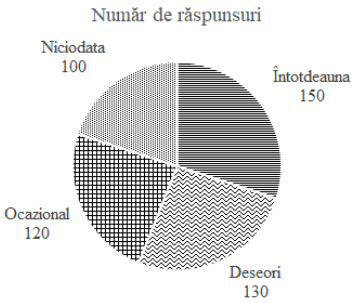
Dan	4
Mihai	6
Ana	12
Miruna	16

Conform informațiilor din tabel, dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică este:

a) Dan
b) Mihai
c) Ana
d) Miruna

5p **6.** Răspunsurile primite în urma unui sondaj de opinie privind folosirea unui produs de curățenie în gospodărie sunt înregistrate în diagrama alăturată. Numărul persoanelor care au răspuns la acest chestionar este egal cu:

a) 100
b) 150
c) 400
d) 500

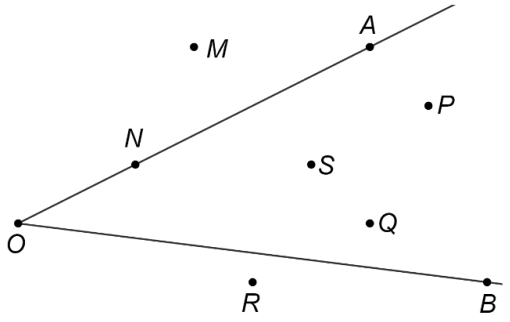


SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

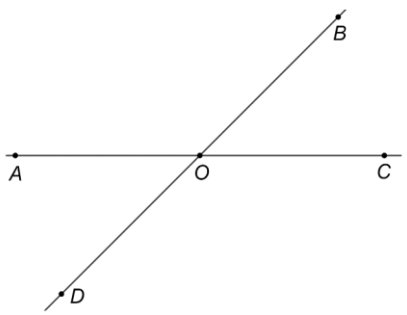
5p **1.** În figura alăturată este reprezentat unghiul propriu AOB și punctele M, N, P, Q, R și S. Punctele care se află în interiorul unghiului AOB sunt:

a) N, S și P
b) M, R și Q
c) S, P și Q
d) A, N și B

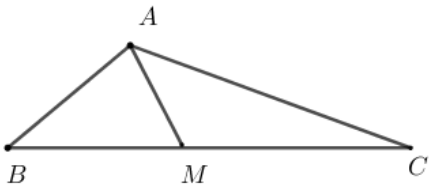


5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente suplementare $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, iar $\sphericalangle AOB = 2 \cdot \sphericalangle BOC$. Semidreapta OD este opusă semidreptei OB. Măsura unghiului COD este egală cu:

a) 180°
b) 120°
c) 60°
d) 30°

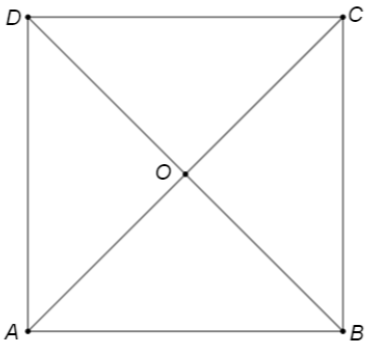


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC care are perimetrul egal cu $48\,\text{cm}$. Punctul M aparține segmentului BC, astfel încât perimetrul triunghiului ABM este egal cu $24\,\text{cm}$ și perimetrul triunghiului ACM este egal $36\,\text{cm}$. Lungimea segmentului AM este egală cu:



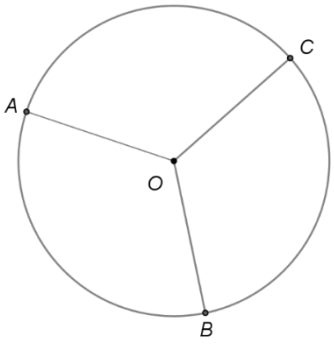
a) $3\,\text{cm}$
b) $6\,\text{cm}$
c) $12\,\text{cm}$
d) $24\,\text{cm}$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$. Dreptele AC și BD se intersectează în punctul O. Măsura unghiului DOC este egală cu:



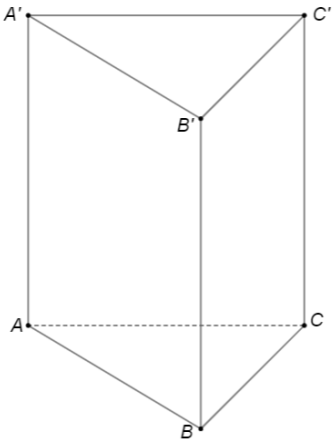
a) $30°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $90°$

5p **5.** În figura alăturată, pe cercul de centru O, sunt reprezentate punctele A, B și C. Unghiurile AOB, BOC și AOC sunt congruente. Măsura arcului mic AB este egală cu:



a) $60°$
b) $90°$
c) $120°$
d) $180°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, $AB = 2$ cm și $BB' = 4$ cm. Aria laterală a prismei $ABCA'B'C'$ este egală cu:



a) $8\,\text{cm}^2$
b) $18\,\text{cm}^2$
c) $24\,\text{cm}^2$
d) $32\,\text{cm}^2$

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p

1. Laura cheltuiește o sumă de bani în trei zile. În prima zi cheltuiește $\frac{1}{2}$ din sumă, în a doua zi cheltuiește $\frac{1}{3}$ din suma rămasă, iar în a treia zi cheltuiește restul de 100 de lei.

(2p) a) Verifică dacă Laura cheltuiește în prima zi mai mult decât cheltuiește în a doua zi. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină ce sumă a cheltuit Laura în cele trei zile.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=3(x-2)\cdot(x+2)-(x-3)^2-9(x-1)+3$, unde x este număr real.

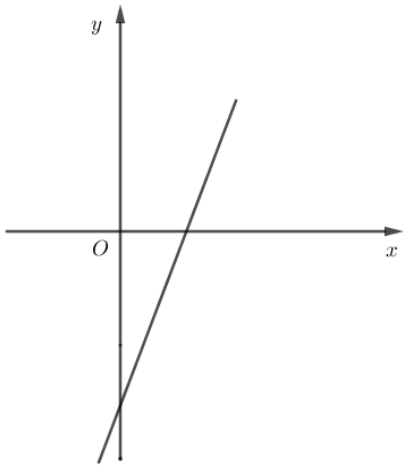
(2p) a) Arată că $E(x)=(x-3)(2x+3)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină numărul natural n pentru care $E(n)$ este număr prim.

5p

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-6$.

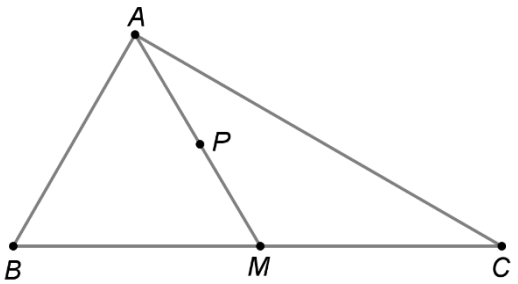
(2p) a) Calculează $f(2)\cdot f(3)$.



(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctul $M(m,0)$ și punctele A și B care sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy. Află valorile numărului m pentru care aria triunghiului ABM este egală cu 6.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$, $\sphericalangle ABC = 60°$ și $AB = 6\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului BC, iar punctul P este mijlocul segmentului AM.

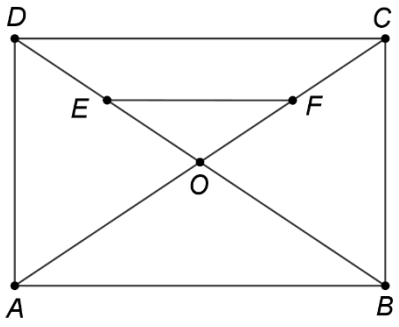
(2p) a) Arată că $AM = 6\text{cm}$.



(3p) b) Determină distanța de la punctul P la dreapta BC.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 8\text{ cm}$, $AD = 6\text{ cm}$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD. Punctul E este mijlocul segmentului OD, iar punctul F este mijlocul segmentului CO.

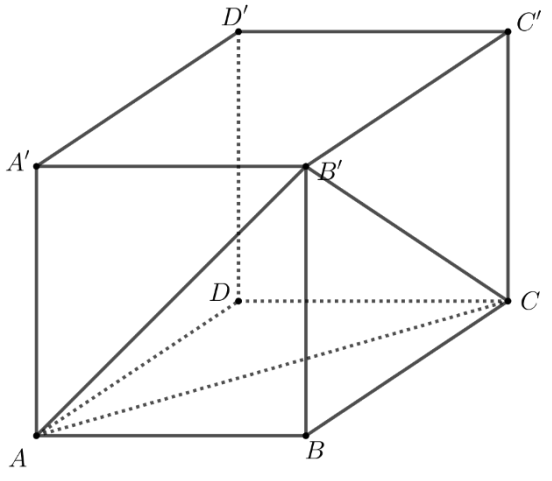
(2p) a) Determină lungimea segmentului EF.



(3p) b) Determină aria trapezului $DEFC$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\,\text{cm}$.

(2p) a) Determină măsura unghiului $AB'C$.



(3p) b) Determină distanța de la punctul B la planul $(AB'C)$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

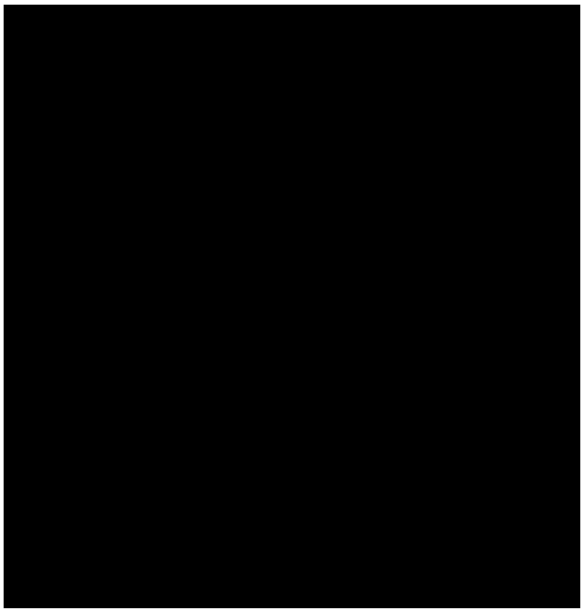
Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

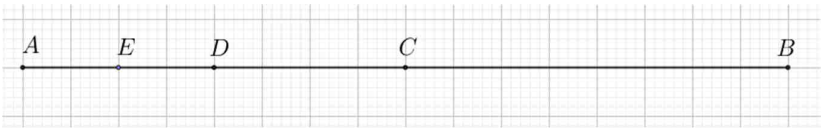
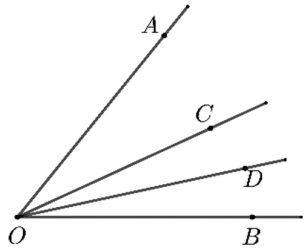
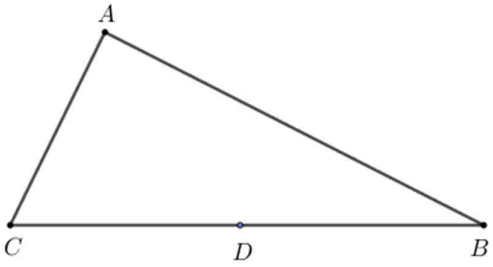
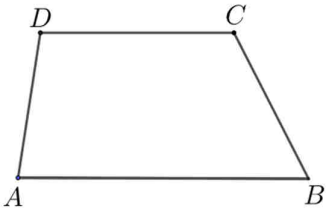
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $4+2\cdot 5$ este egal cu: **a)** 6 **b)** 10 **c)** 14 **d)** 30
5p	**2.** Dacă $a=3\cdot b$ și $b\neq 0$, atunci raportul $\frac{a}{b}$ este egal cu: **a)** 3 **b)** 1 **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{9}$
5p	**3.** Știind că $-2+a=2$, atunci numărul a este egal cu: **a)** -4 **b)** -1 **c)** 0 **d)** 4
5p	**4.** Triplul numărului $\frac{2}{5}$ este egal cu: **a)** $\frac{2}{15}$ **b)** $\frac{6}{15}$ **c)** 1 **d)** $\frac{6}{5}$

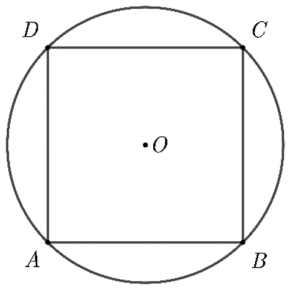
5p	**5.** Media aritmetică a numerelor $7\sqrt{3}$ și $21\sqrt{3}$ este egală cu: **a)** $14\sqrt{3}$ **b)** $14\sqrt{6}$ **c)** $28\sqrt{3}$ **d)** $28\sqrt{6}$
5p	**6.** Trei caiete și două pixuri costă împreună 8 lei. Afirmația: „Șase caiete și patru pixuri, de același fel, costă împreună 12 lei.”, este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

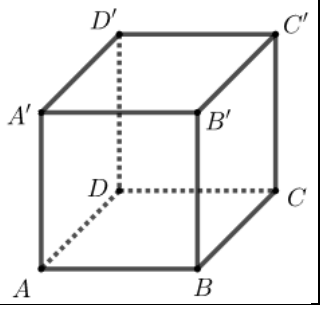
5p	**1.** În figura alăturată, punctul C este mijlocul segmentului AB, punctul D este mijlocul segmentului AC, punctul E este mijlocul segmentului AD și $ED = 2\,\text{cm}$. Lungimea segmentului DB este egală cu: **a)** $4\,\text{cm}$ **b)** $8\,\text{cm}$ **c)** $12\,\text{cm}$ **d)** $14\,\text{cm}$ 
5p	**2.** În figura alăturată, semidreapta OC este bisectoarea unghiului AOB și semidreapta OD este bisectoarea unghiului BOC. Unghiul COD are măsura de 13°. Măsura unghiului AOB este egală cu: **a)** 13° **b)** 26° **c)** 39° **d)** 52° 
5p	**3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, punctul D este mijlocul segmentului BC și $AC = CD$. Știind că $AB = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, atunci lungimea segmentului BC este egală cu: **a)** 2 cm **b)** $2\sqrt{3}$ cm **c)** 4 cm **d)** $4\sqrt{3}$ cm 
5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 12$ cm și $CD = 8$ cm. Lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$ este egală cu: **a)** 2 cm **b)** 4 cm **c)** 10 cm **d)** 20 cm 

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, cu $AB = 4\sqrt{2}$ cm, înscris într-un cerc de centru O. Lungimea cercului este egală cu:



a) $8\sqrt{2}\pi$ cm
b) 8π cm
c) $4\sqrt{2}\pi$ cm
d) 4π cm

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm. Volumul cubului este egal cu:



a) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^3$
b) $16\sqrt{2}\,\text{cm}^3$
c) $64\,\text{cm}^3$
d) $96\,\text{cm}^3$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un excursionist a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi a parcurs 60% din lungimea traseului, în a doua zi o treime din distanța parcursă în prima zi, iar în a treia zi a parcurs restul de 64 km.

(2p) a) Este posibil ca distanța parcursă de excursionist în a doua zi să reprezinte o pătrime din lungimea întregului traseu? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină lungimea traseului parcurs de excursionist în cele trei zile.

5p

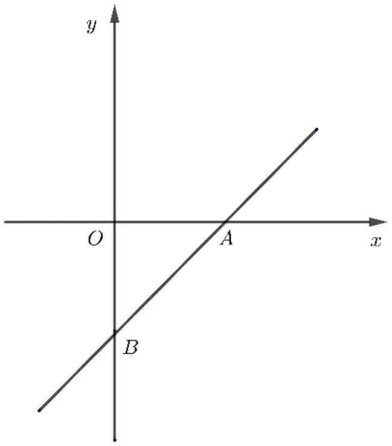
2. Se consideră expresia $E(x)=3(x+2)^2-2\left(4x-3-x^2\right)+7(3x+2)-2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=5x^2+25x+30$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Demonstrează că numărul natural $E(n)$ este divizibil cu 10, pentru orice număr natural n.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.

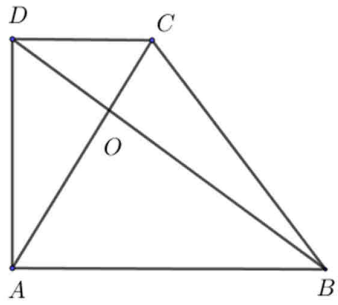
(2p) a) Arată că $f(2)+f(3)=1$.



(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Arată că triunghiul AMB este dreptunghic în A, unde A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$ și $\measuredangle BAD = 90°$. Dreptele AC și BD sunt perpendiculare, $BD = 10\,\text{cm}$ și $AD = 6\,\text{cm}$.

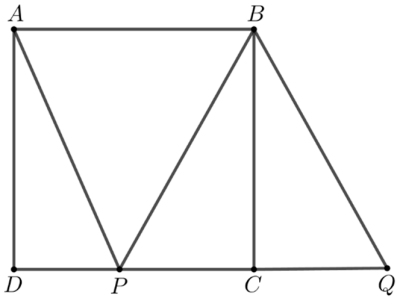
(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului DAB este egal cu $24\,\text{cm}$.



(3p) b) Calculează lungimea segmentului DC.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ cu $AB = 6\,\text{cm}$ și triunghiul echilateral BPQ, unde punctele P și Q se află pe dreapta DC.

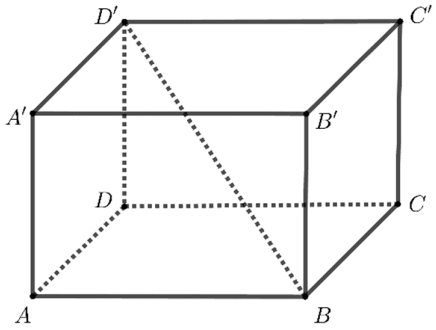
(**2p**) **a)** Calculează lungimea segmentului AC.



(3p) b) Arată că aria trapezului $ABQP$ este egală cu $6\left(3+2\sqrt{3}\right)\text{cm}^2$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=3\sqrt{2}\,\text{cm}$ și $BC=CC'=3\text{cm}$.

(2p) a) Arată că diagonala BD' a paralelipipedului este egală cu $6\,\text{cm}$.



(3p) b) Calculează tangenta unghiului dintre planele $(D'AB)$ și $(A'BC')$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

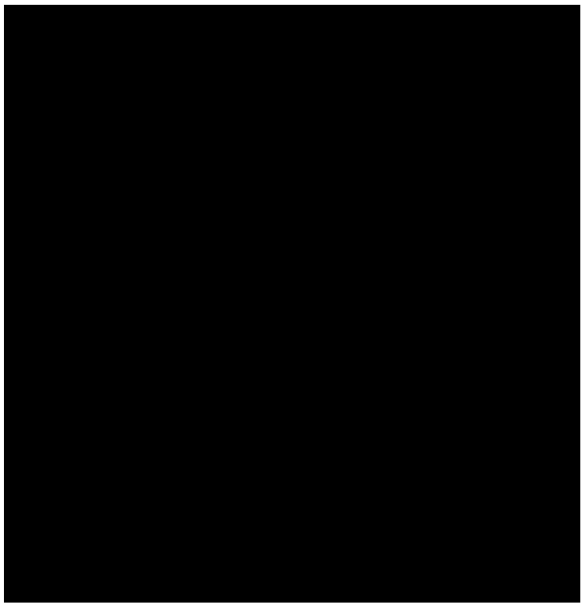
Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $10+10:10$ este egal cu: **a)** 2 **b)** 9 **c)** 10 **d)** 11
5p	**2.** Dacă $b\neq 0$ și $\frac{a}{2}=\frac{10}{b}$, atunci $a\cdot b$ este egal cu: **a)** 2 **b)** 5 **c)** 10 **d)** 20
5p	**3.** Opusul numărului 5 este: **a)** -5 **b)** $-\frac{1}{5}$ **c)** $\frac{1}{5}$ **d)** 5
5p	**4.** Transformând numărul $1,3$ în fracție ordinară se obține: **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{13}{10}$ **c)** $\frac{4}{3}$ **d)** $\frac{13}{9}$

5p **5.** Patru elevi, Ana, George, Radu și Elena, au calculat produsul numerelor $x=2\sqrt{2}$ și $y=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, iar rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ana	George	Radu	Elena
$4\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	8

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Ana
b) George
c) Radu
d) Elena

5p **6.** Andrei are 28 de ani, iar Cătălina are 13 ani. Andrei afirmă: „Peste doi ani voi avea dublul vârstei pe care o va avea Cătălina.”. Afirmația lui Andrei este:

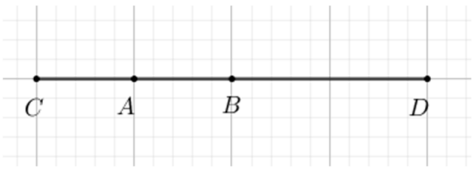
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

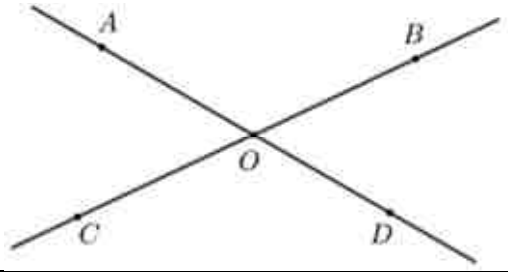
5p **1.** În figura alăturată este reprezentat segmentul AB cu lungimea de $10\,\text{cm}$. Punctul A este mijlocul segmentului CB, iar punctul B este mijlocul segmentului CD. Lungimea segmentului CD este egală cu:

a) $10\,\text{cm}$
b) $20\,\text{cm}$
c) $30\,\text{cm}$
d) $40\,\text{cm}$



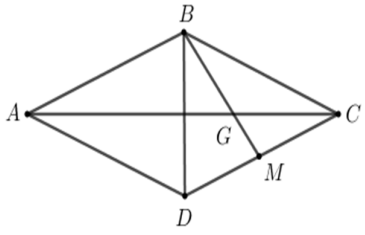
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile opuse la vârf AOC și BOD. Măsura unghiului AOC este egală cu $60°$. Măsura unghiului BOD este egală cu:

a) $30°$
b) $60°$
c) $90°$
d) $120°$

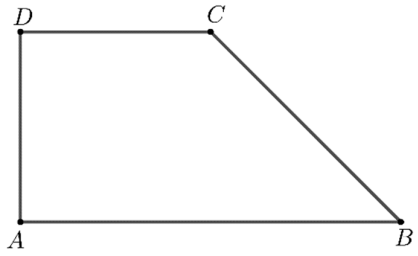


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat rombul $ABCD$ cu $AB=BD=12\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului CD și dreapta BM intersectează dreapta AC în punctul G. Lungimea segmentului AG este egală cu:

a) $12\sqrt{3}\,\text{cm}$
b) $10\sqrt{3}\,\text{cm}$
c) $9\sqrt{3}\,\text{cm}$
d) $8\sqrt{3}\,\text{cm}$

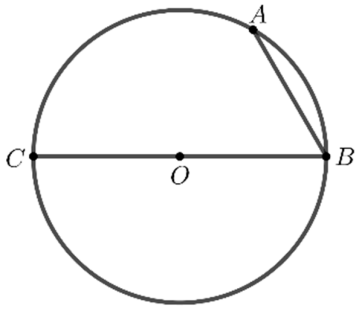


5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu bazele AB și CD, în care măsura unghiului BAD este egală cu $90°$, $AD = DC = 5\,\text{cm}$ și $AB = 10\,\text{cm}$. Măsura unghiului ABC este egală cu:



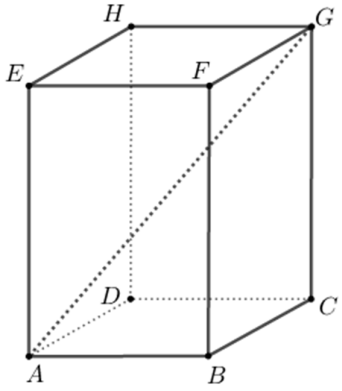
a) $30°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $90°$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și diametru $BC = 10\,\text{cm}$. Punctul A aparține cercului astfel încât măsura arcului mic AC este de $120°$. Lungimea segmentului AB este egală cu:



a) $5\,\text{cm}$
b) $5\sqrt{2}\,\text{cm}$
c) $5\sqrt{3}\,\text{cm}$
d) $10\,\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 3\,\text{cm}$ și $AE = 12\,\text{cm}$. Lungimea diagonalei AG a paralelipipedului este egală cu:



a) $5\,\text{cm}$
b) $13\,\text{cm}$
c) $14\,\text{cm}$
d) $19\,\text{cm}$

SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Ana, Maria și Vlad au în total 396 de timbre. Ana are cu 25 de timbre mai multe decât Maria și cu 16 timbre mai puține decât Vlad.
(2p) a) Poate avea Ana 132 de timbre? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul de timbre pe care le are Vlad.

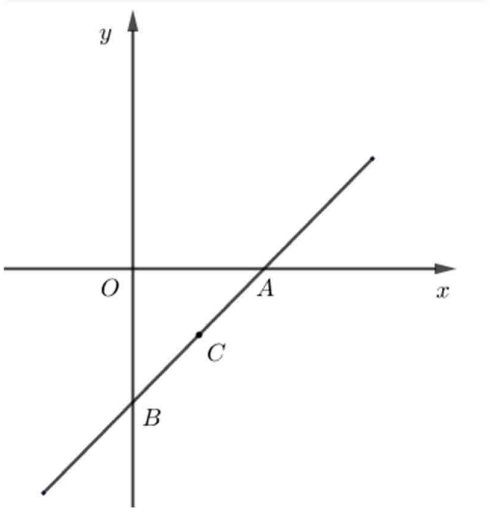
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(x+1)^2+2(x-1)^2-3\left(x^2-1\right)$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=6-2x$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină mulțimea numerelor reale x, pentru care $E(x)<x$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-1$.

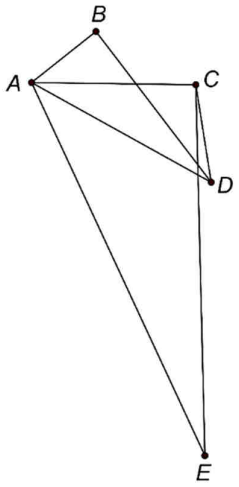
(2p) a) Arată că $f(0)+f(1)=-1$.



(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, iar punctul C este mijlocul segmentului AB, calculează aria triunghiului OBC.

5p **4.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E astfel încât $AB = 4\,\text{cm}$, $AC = 8\,\text{cm}$, $AD = 10\,\text{cm}$ și $AE = 20\,\text{cm}$. Măsura unghiului BAC este egală cu măsura unghiului DAE și $\sphericalangle CAD = 30°$.

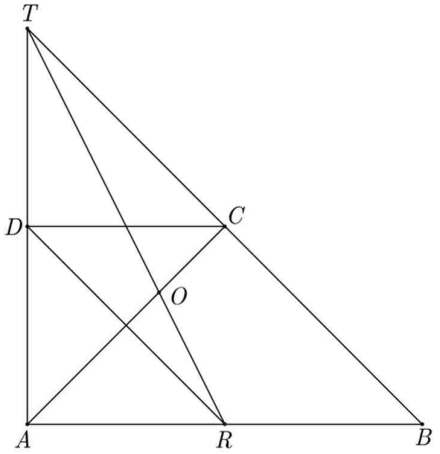
(2p) a) Arată că aria triunghiului CAD este egală cu $20\,\text{cm}^2$.



(3p) b) Demonstrează că $CE = 2 \cdot BD$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ și $AD = CD = 10$ cm. Paralela prin D la dreapta BC intersectează dreapta AB în punctul R. Dreptele AD și BC se intersectează în punctul T și O este punctul de intersecție a dreptelor TR și AC.

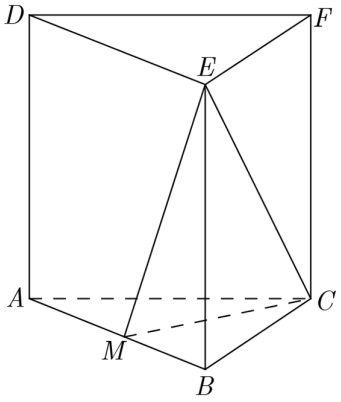
(**2p**) **a)** Arată că punctul R este mijlocul segmentului AB.



(**3p**) **b)** Calculează lungimea segmentului TO.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma dreaptă $ABCDEF$ cu baza triunghiul echilateral ABC și $AB = AD = 10$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului AB.

(2p) a) Arată că volumul prismei $ABCDEF$ este egal cu $250\sqrt{3}$ cm^3.



(3p) b) Demonstrează că distanța de la punctul B la planul (EMC) este egală cu $2\sqrt{5}$ cm.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……..……..……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

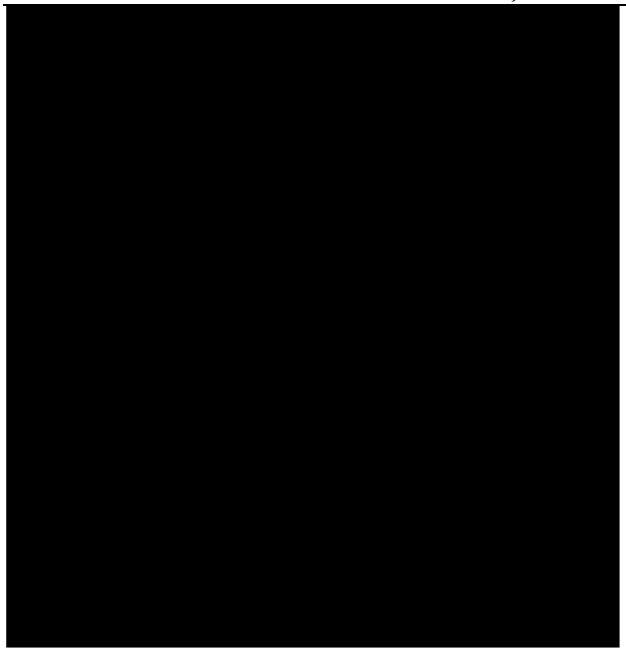
Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Restul împărțirii numărului 24 la 10 este egal cu: **a)** 1 **b)** 2 **c)** 4 **d)** 6
5p	**2.** Numărul care reprezintă 15% din 200 este egal cu: **a)** 15 **b)** 30 **c)** 150 **d)** 200
5p	**3.** Suma numerelor -5, -4, 4 și 6 este egală cu: **a)** 0 **b)** 1 **c)** 11 **d)** 19
5p	**4.** Dintre numerele $\frac{9}{2}$; $4,(5)$; $\frac{81}{20}$ și $4,55$, cel mai mare este: **a)** $4,55$ **b)** $\frac{81}{20}$ **c)** $4,(5)$ **d)** $\frac{9}{2}$

5p **5.** Patru elevi, Andreea, Mihaela, Radu și Vlad, calculează media geometrică a numerelor reale $a=3+2\sqrt{2}$ și $b=3-2\sqrt{2}$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul următor:

Andreea	1
Mihaela	$\sqrt{6}$
Radu	3
Vlad	$\sqrt{17}$

Conform informațiilor din tabel, dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică este:

a) Andreea

b) Mihaela

c) Radu

d) Vlad

5p **6.** Un spectacol a început la ora $21:45$ și s-a finalizat la ora $23:15$, în aceeași zi. Marian afirmă că: „Spectacolul are o durată de o oră și jumătate.”. Știind că spectacolul nu a avut pauză, afirmația lui Marian este:

a) adevărată

b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

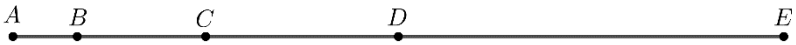
5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B, C, D și E sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB=1$ cm, $BC=2$ cm, $CD=3$ cm și $DE=6$ cm. Mijlocul segmentului AE este punctul:

a) B

b) C

c) D

d) E



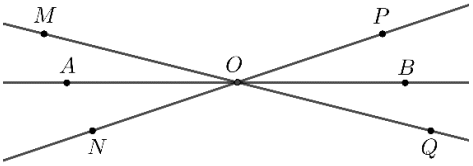
5p **2.** În figura alăturată, unghiurile MON și POQ sunt opuse la vârf, iar semidreptele OA și OB sunt bisectoarele lor. Măsura unghiului AOB este egală cu:

a) 60°

b) 90°

c) 120°

d) 180°



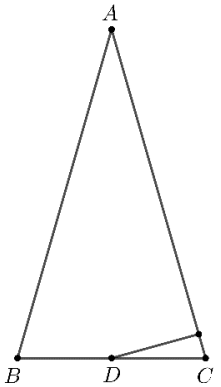
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC de bază BC. Unghiul A are măsura de 30° și $AB=4$ cm. Punctul D este mijlocul segmentului BC. Distanța de la punctul D la dreapta AC este egală cu:

a) 0,5 cm

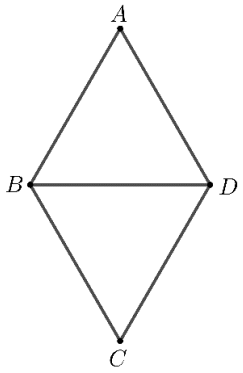
b) 1 cm

c) 1,5 cm

d) 2 cm

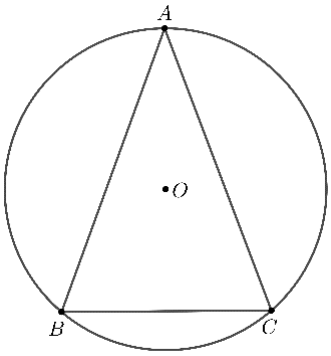


5p **4.** În figura alăturată este reprezentat rombul $ABCD$ cu măsura unghiului BAD de $60°$ și lungimea segmentului BD egală cu $4\,\text{cm}$. Perimetrul rombului $ABCD$ este egal cu:



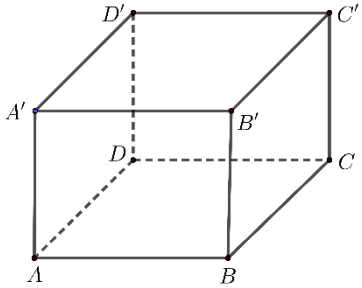
a) $4\sqrt{3}$ cm
b) 12 cm
c) $8\sqrt{3}$ cm
d) 16 cm

5p **5.** Punctele A, B și C sunt vârfurile unui triunghi isoscel de bază BC, înscris în cercul de centru O, iar măsura unghiului ABC este egală cu $70°$. Arcul mic BC are măsura egală cu:



a) $140°$
b) $80°$
c) $70°$
d) $40°$

5p **6.** Volumul paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 5\,\text{dm}$, $BC = 6\,\text{dm}$ și înălțimea $AA' = 4\,\text{dm}$, este egal cu:



a) $30\ \text{dm}^3$
b) $88\ \text{dm}^3$
c) $120\ \text{dm}^3$
d) $148\ \text{dm}^3$

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Radu are o pungă cu bomboane. Dacă împarte bomboanele din pungă în grupe de câte 7, 14, respectiv 21 de bomboane, îi rămân de fiecare dată câte 5 bomboane.

(2p) a) Este posibil ca Radu să aibă în pungă 61 de bomboane? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul bomboanelor din pungă, știind că este cel mai mic număr natural de trei cifre care îndeplinește condițiile din enunț.

5p

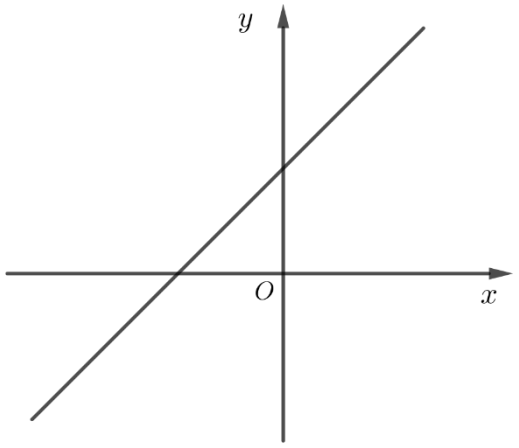
2. Se consideră expresia $E(x)=(x+1)^2-(-x-1)^2+x^2+2x+1$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=(x+1)^2$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arată că $E(x)>x$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

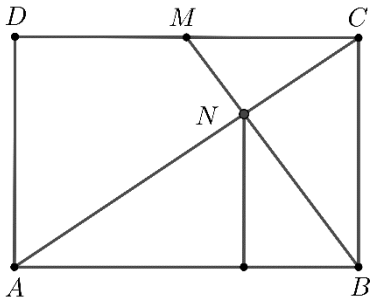
(2p) a) Arată că $f(-1)\cdot f(2019)=2021$.



(3p) b) Determină aria triunghiului delimitat de reprezentarea grafică a funcției f și de axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un triunghi ABC cu $AB=12$ cm, $BC=9$ cm și $AC=15$ cm. Punctul D este simetricul punctului B față de mijlocul segmentului AC, punctul M este mijlocul segmentului CD și N este punctul de intersecție a dreptelor BM și AC.

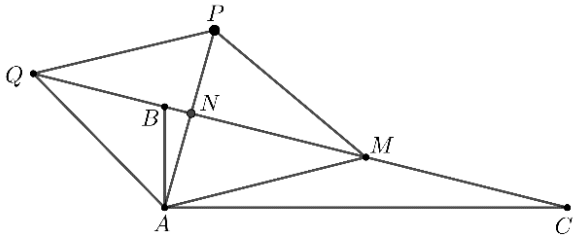
(2p) a) Demonstrează că $BN=2\cdot MN$.



(3p) b) Determină distanța de la punctul N la dreapta AB.

5p

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului ACB de $15°$ și $BC = 20$ cm. Punctul M este mijlocul segmentului BC și punctul N aparține dreptei BC astfel încât dreapta AN este perpendiculară pe dreapta BC.

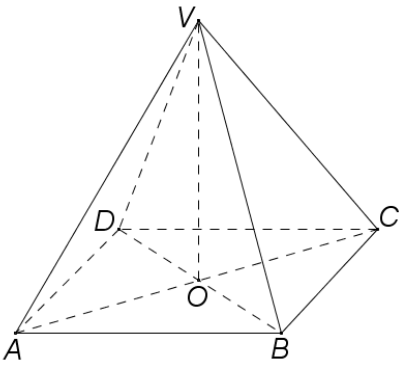


(**2p) a)** Arată că $MN = 5\sqrt{3}$ cm.

(3p) b) Știind că punctul P este simetricul punctului A față de dreapta BC și că punctul Q este simetricul punctului M față de punctul N, calculează aria patrulaterului $AMPQ$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră $VABCD$, cu baza pătratul $ABCD$, cu $AB = 8\,\text{cm}$. Înălțimea VO a piramidei are lungimea egală cu $4\sqrt{3}\,\text{cm}$, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

(2p) a) Arată că volumul piramidei $VABCD$ este egal cu $\frac{256\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$.



(3p) b) Demonstrează că măsura unghiului planelor (VAD) și (VBC) este egală cu $60°$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2021 – 2022

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $6-18:2$ este egal cu: **a)** -6 **b)** -3 **c)** 0 **d)** 12
5p	**2.** Dacă $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$, atunci rezultatul calculului $2b-3a$ este egal cu: **a)** -5 **b)** -1 **c)** 0 **d)** 5
5p	**3.** Soluția ecuației $x+6=2$ este numărul întreg: **a)** -8 **b)** -4 **c)** 4 **d)** 8
5p	**4.** Dintre numerele $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ și $\left(\frac{1}{2}\right)^5$, cel mai mic este numărul: **a)** $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ **c)** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ **d)** $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

5p **5.** Patru elevi, Elena, Alina, Paul și Adi, au calculat media aritmetică a numerelor $a=3-2\sqrt{2}$ și $b=3+2\sqrt{2}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Elena	Alina	Paul	Adi
14	6	3	1

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Elena
b) Alina
c) Paul
d) Adi

5p **6.** Numărul real x verifică relațiile $2\le x<5$. Ioana afirmă „ Numărul real x aparține intervalului $[2,5)$ ”. Afirmația Ioanei este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

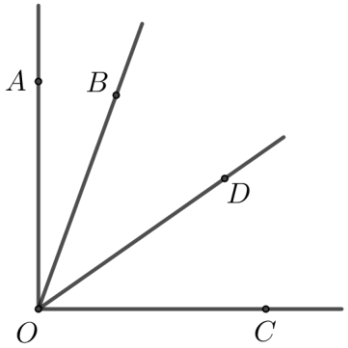
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, A și B sunt puncte distincte, punctul C se află pe segmentul AB, astfel încât $AB=3\cdot AC$, iar $AC=2\text{cm}$. Lungimea segmentului BC este egală cu:

a) 2cm
b) 4cm
c) 6cm
d) 8cm

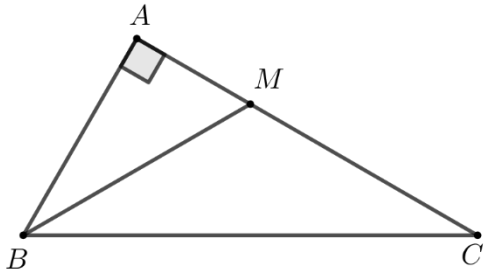
5p **2.** În figura alăturată, unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare. Semidreapta OD este bisectoarea unghiului BOC, iar măsura unghiului AOD este de $55°$. Măsura unghiului AOB este egală cu:

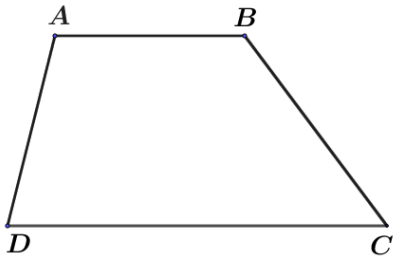
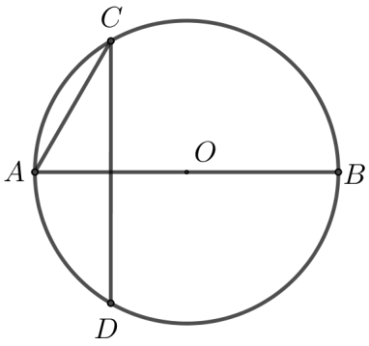
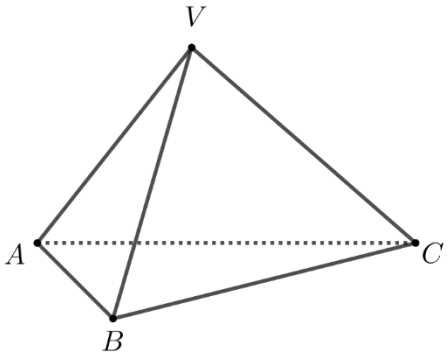
a) $55°$
b) $35°$
c) $20°$
d) $15°$



5p **3.** În figura alăturată, triunghiul ABC este dreptunghic în A cu $AB=4\text{cm}$. Semidreapta BM este bisectoarea unghiului ABC, $M\in AC$ și $BM=MC$. Lungimea segmentului BC este egală cu:

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 8 cm
d) 12 cm



5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu $AB \| \| CD$, $AB = 4\text{cm}$ și $CD = 8\text{cm}$. Lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$ este egală cu: **a)** 4cm **b)** 6cm **c)** 8cm **d)** 12cm 
5p	**5.** În figura alăturată, punctele A, B, C și D se află pe cercul de centru O, AB este diametru, măsura arcului mic AC este egală cu 60° și dreptele CD și AB sunt perpendiculare. Măsura unghiului ACD este egală cu: **a)** 30° **b)** 45° **c)** 60° **d)** 90° 
5p	**6.** În figura alăturată este reprezentat un tetraedru regulat $VABC$ cu $AB = 4\text{cm}$. Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului regulat $VABC$ este egală cu: **a)** 12cm **b)** 16cm **c)** 20cm **d)** 24cm 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Suma a două numere naturale a și b este egală cu 42. Cel mai mare divizor comun al numerelor a și b este 7. **(2p) a)** Numerele 14 și 28 îndeplinesc condițiile din enunț? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numerele naturale a și b, $a<b$, care îndeplinesc condițiile din enunț.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=(2x+1)^2-(2x+3)(2x-3)+(2x-3)^2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=4x^2-8x+19$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină cel mai mare număr natural A, știind că $E(x) \geq A$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Prețul unui obiect este 500 de lei. După o ieftinire cu 12% din prețul obiectului, urmată de o ieftinire cu $p\%$ din noul preț, obiectul costă 330 de lei.

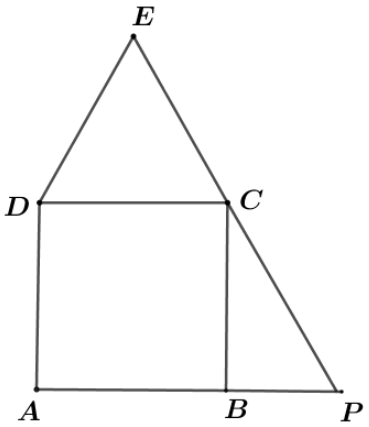
(2p) a) Arată că, după prima ieftinire, obiectul costă 440 de lei.

(3p) b) Determină numărul p.

5p

4. În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral CDE cu $EC=6\,\text{cm}$. Dreptele EC și AB se intersectează în punctul P.

(2p) a) Arată că $CP=4\sqrt{3}\,\text{cm}$.

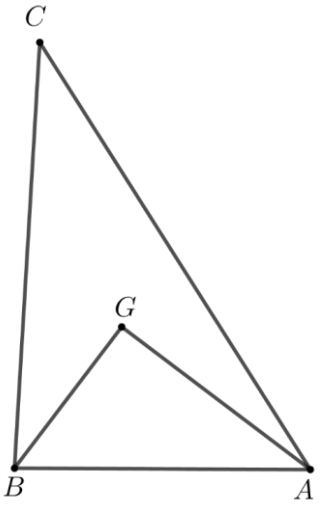


(3p) b) Arată că distanța de la punctul P la dreapta AE este egală cu $\sqrt{2}\left(3+2\sqrt{3}\right)\text{cm}$.

5p

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC. Punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, $AG=4\text{cm}$, $BG=3\text{cm}$ și dreptele AG și BG sunt perpendiculare.

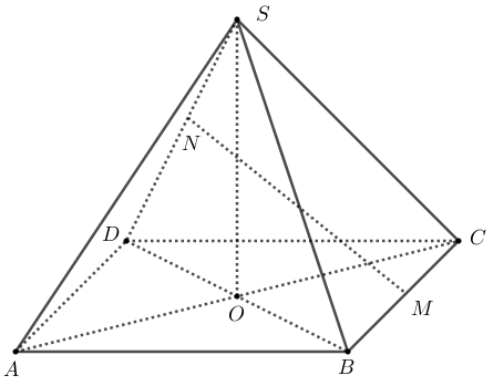
(**2p) a)** Arată că perimetrul triunghiului ABG este egal cu 12cm.



3p) b) Determină lungimea segmentului BC.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată $SABCD$ cu baza pătratul $ABCD$, $\sphericalangle SAC = 45°$ și $AB = 12$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor BC, respectiv SD, iar O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

(2p) a) Arată că $SC = 12$ cm.



(3p) b) Calculează lungimea segmentului MN.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2022 - 2023
Matematică

Model

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În a doua zi excursionistul a parcurs $\frac{1}{3}\cdot\frac{30}{100}x=\frac{x}{10}$, unde x reprezintă lungimea traseului	**1p**
	Cum $\frac{x}{10}\neq\frac{x}{4}$, obținem că nu este posibil ca lungimea parcursă de excursionist în a doua zi să reprezinte o pătrime din lungimea traseului	**1p**
	b) $\frac{30}{100}x+\frac{x}{10}+72=x$	**1p**
	$4x+720=10x$	**1p**
	$x=120\,\text{km}$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{x^2-x-2}{x^2+4}=$	**1p**
	$=\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}$, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$	**1p**

	b) $E(a)\in\mathbb{Z},\ E(a)=\dfrac{a+1}{a+2}=1-\dfrac{1}{a+2}$	**1p**
	Cum $a+2\in\mathbb{Z}$ și $\dfrac{1}{a+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow\ a+2\in\{-1,1\}$	**1p**
	$a=-1$ care nu convine și $a=-3$ care convine	**1p**
3.	**a)** $3(x+2)=-4-2x\ \Rightarrow 3x+6=-4-2x$	**1p**
	$x=-2$	**1p**
	b) $A(-2,0)$ și $B(0,2)$ sunt punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy	**1p**
	$CT\perp Ox,\ T\in Ox$, B este mijlocul lui AC, deci OB este linie mijlocie în triunghiul ATC	**1p**
	$CT=2\cdot BO=4$, $OT=AO=2\Rightarrow C(2,4)$	**1p**
4.	**a)** $\sphericalangle PAD=90°+60°=150°$, $AD=AP\ \Rightarrow$ triunghiul APD isoscel, deci $\sphericalangle ADP\equiv\sphericalangle APD$	**1p**
	$\sphericalangle APD=15°\Rightarrow\sphericalangle DPB=60°-15°=45°$	**1p**
	b) În triunghiul echilateral APB, $PQ\perp AB,\ Q\in AB$, deci $PQ=2\sqrt{3}$ cm și Q este mijlocul lui $AB\ \Rightarrow\ AQ=2$ cm	**1p**
	$PQ\parallel AD\Rightarrow\Delta DAM\sim\Delta PQM\ \Rightarrow\ \dfrac{AD}{PQ}=\dfrac{AM}{MQ}$	**1p**
	$\Rightarrow AM=4\left(2-\sqrt{3}\right)$ cm	**1p**
5.	**a)** RT este linie mijlocie în trapezul $ABCD$	**1p**
	$RT=\dfrac{AB+CD}{2}=5$ cm	**1p**
	b) $DQ\perp AB,\ Q\in AB$, $\mathcal{A}_{ABCD}=RT\cdot DQ$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta DRT}=\dfrac{DP\cdot RT}{2}$ și $\mathcal{A}_{\Delta RST}=\dfrac{QP\cdot RT}{2}$, unde $\{P\}=DQ\cap RT$	**1p**
	$\mathcal{A}_{DRST}=\mathcal{A}_{\Delta DRT}+\mathcal{A}_{\Delta RST}=\dfrac{DP\cdot RT}{2}+\dfrac{QP\cdot RT}{2}=\dfrac{RT\cdot DQ}{2}=\dfrac{\mathcal{A}_{ABCD}}{2}$	**1p**
6.	**a)** $V=D'C'^3=6^3=$	**1p**
	$=216$ cm^3	**1p**
	b) OO' este linie mijlocie în triunghiul $AB'C\Rightarrow OO'\parallel AB'$	**1p**
	$AB'\perp A'B,\ AB'\perp A'D',\ A'B\cap A'D'=\{A'\}$, deci $AB'\perp(A'D'C)$	**1p**
	$OO'\parallel AB'$ și $AB'\perp(A'D'C)\ \Rightarrow OO'\perp(A'D'C)$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2022 - 2023
Matematică

Simulare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** În 16 apartamente cu patru camere sunt $4\cdot16=64$ de camere	**1p**
	Cum numărul total de camere din bloc este egal cu 60, deducem că nu este posibil ca blocul să aibă 16 apartamente cu patru camere, deoarece $64>60$	**1p**
	b) $2x+4(22-x)=60$, unde x reprezintă numărul apartamentelor cu două camere	**1p**
	$2x=28$	**1p**
	$x=14$ apartamente cu două camere	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\dfrac{x^2-9-x^2+16}{x^2-16}:\dfrac{x-4+x+4-3}{(x-4)(x+4)}=$	**1p**
	$=\dfrac{7}{(x-4)(x+4)}\cdot\dfrac{(x-4)(x+4)}{2x-3}=\dfrac{7}{2x-3}$, unde x este număr real, $x\neq-4$, $x\neq4$ și $x\neq\dfrac{3}{2}$	**1p**
	b) $E(n)=\dfrac{7}{2n-3}$, unde n este număr natural	**1p**
	$\dfrac{7}{2n-3}\in\mathbb{N}$, deci $2n-3=1$ sau $2n-3=7$	**1p**
	$n=2$ sau $n=5$, care convin	**1p**

3.	**a)** $a=\left(-\frac{1}{3}\right)^2\cdot(-6)^2=$	**1p**
	$=\frac{1}{9}\cdot 36=4$	**1p**
	b) $b=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{10}\right)^{-2}=$	**1p**
	$=\frac{3}{6}\cdot\left(\frac{10}{5}\right)^2=2$	**1p**
	$\frac{a+b}{2}=\frac{4+2}{2}=3$	**1p**
4.	**a)** $BP\perp AC$, $P\in AC$, deci triunghiul BPC este dreptunghic, $\measuredangle BCP=30^o\Rightarrow BP=\frac{BC}{2}=5\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot BP}{2}=\frac{20\cdot 5}{2}=50\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\measuredangle BCD\equiv\measuredangle BCA$ și $\measuredangle CBD\equiv\measuredangle BAC\Rightarrow\ \Delta CBD\sim\Delta CAB$	**1p**
	$\frac{CD}{BC}=\frac{BC}{AC}$	**1p**
	$\frac{CD}{10}=\frac{10}{20}\Rightarrow CD=5\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** Triunghiul ABE este dreptunghic isoscel, deci $\measuredangle BAE=45°$	**1p**
	$\measuredangle DAE=\measuredangle DAB+\measuredangle BAE=90°$, deci dreapta DA este perpendiculară pe dreapta AE	**1p**
	b) $BC\cap AE=\{N\}$, $DA\|\|BN$, $DA\perp AE\ \Rightarrow\ BN\perp AE$	**1p**
	În triunghiul dreptunghic isoscel ABE, $AE=10\sqrt{2}\text{cm}$, BN înălțime $\Rightarrow BN$ mediană, deci $BN=\frac{AE}{2}=AN=5\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	În triunghiul dreptunghic ACN, $tg\left(\measuredangle CAE\right)=\frac{CN}{AN}=\frac{10+5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$	**1p**
6.	**a)** $AC=6\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
	$CP=AC-AP=4\sqrt{2}\text{cm}=2\cdot AP$	**1p**
	b) $\Delta BRC\sim\Delta MRB'\Rightarrow\frac{B'R}{RC}=\frac{1}{2}$	**1p**
	Cum $\frac{AP}{PC}=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\frac{B'R}{RC}=\frac{AP}{PC}$, deci $PR\|\|AB'$	**1p**
	$\measuredangle\left(PR,\ AD'\right)=\measuredangle\left(AB',\ AD'\right)=\measuredangle D'AB'$ și, cum $\Delta D'AB'$ este echilateral $\Rightarrow\measuredangle\left(PR,\ AD'\right)=60°$	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

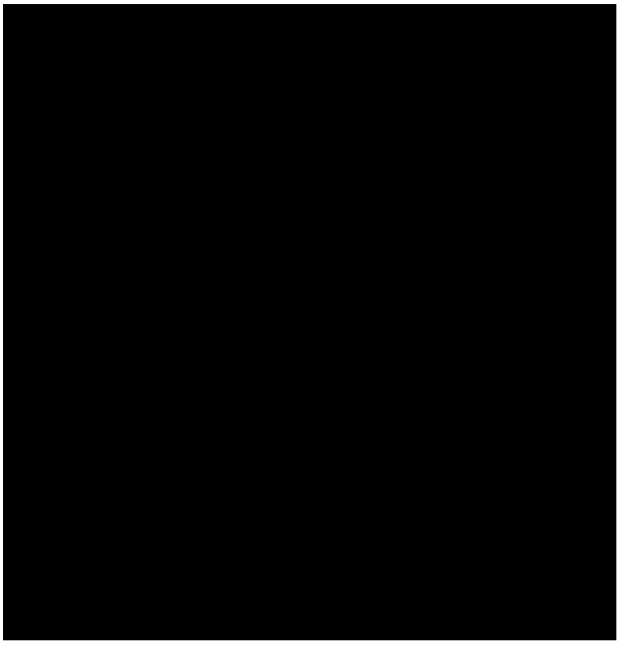
Anul școlar 2022 – 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $64-56:8$ este egal cu:

a) 0
b) 1
c) 56
d) 57

5p **2.** Știind că $\frac{a}{3}=\frac{b}{4}$, atunci rezultatul calculului $4a-3b$ este egal cu:

a) 0
b) 1
c) 7
d) 12

5p **3.** Suma numerelor întregi din intervalul $[-2022,2022]$ este egală cu:

a) -2022
b) -2021
c) 0
d) 2022

5p **4.** În tabelul de mai jos este prezentată situația notelor obținute de elevii claselor a VIII-a dintr-o școală, la un test de matematică:

Nota	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	6	9	12	15	12	6

Media notelor obținute de elevii claselor a VIII-a din această școală la testul de matematică este egală cu:

a) $6,00$
b) $7,60$
c) $7,90$
d) $8,60$

5p **5.** Patru elevi, Ioana, Mara, Petrică și Ștefan, au calculat produsul numerelor $a=\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|$ și $b=\left|\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|$, iar rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ioana	Mara	Petrică	Ștefan
-1	$5-2\sqrt{6}$	1	$5+2\sqrt{6}$

Conform informațiilor din tabel, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Ioana
b) Mara
c) Petrică
d) Ștefan

5p **6.** O mașină se deplasează în intervalul orar $12:56-14:26$ cu o viteză medie de $80\,\text{km/h}$. Mihai afirmă că, în acest interval de timp, mașina a parcurs o distanță egală cu $200\,\text{km}$. Afirmația lui Mihai este:

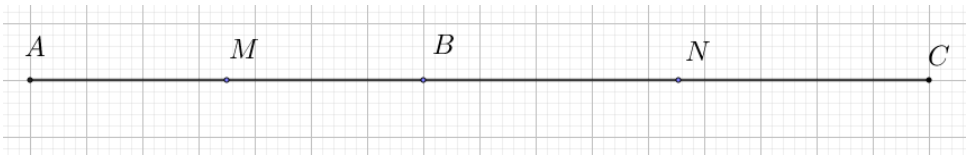
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

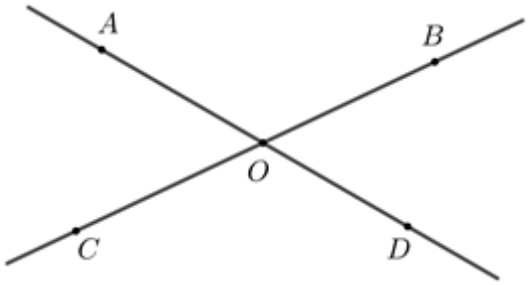
5p **1.** În figura alăturată punctele A, B și C sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB=7\,\text{cm}$ și $BC=9\,\text{cm}$. Știind că punctul M este mijlocul segmentului AB, iar punctul N este mijlocul segmentului BC, lungimea segmentului MN este egală cu:

a) $8\,\text{cm}$
b) $11{,}5\,\text{cm}$
c) $12{,}5\,\text{cm}$
d) $16\,\text{cm}$



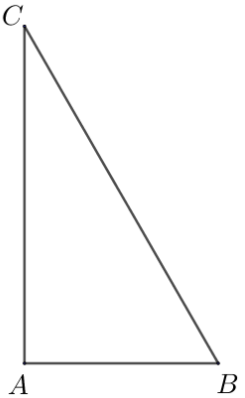
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile opuse la vârf AOC și BOD. Măsura unghiului AOB este egală cu 120°. Măsura unghiului BOD este egală cu:

a) 30°
b) 60°
c) 90°
d) 120°

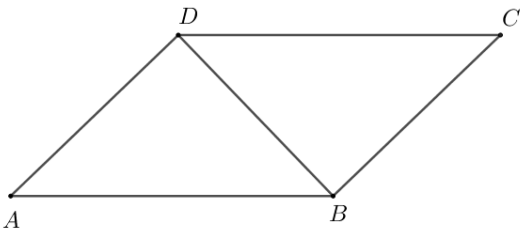


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=6\,\text{cm}$ și măsura unghiului B este egală cu $60°$. Lungimea segmentului AB este egală cu:

a) $2\sqrt{3}\,\text{cm}$
b) $3\,\text{cm}$
c) $3\sqrt{2}\,\text{cm}$
d) $3\sqrt{3}\,\text{cm}$

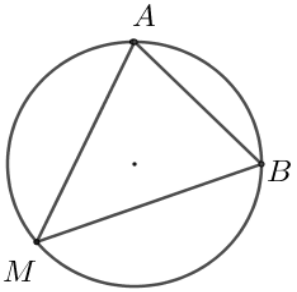


5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu $AD = BD$ și cu măsura unghiului DAB este egală cu $45°$. Măsura unghiului CBD este egală cu:



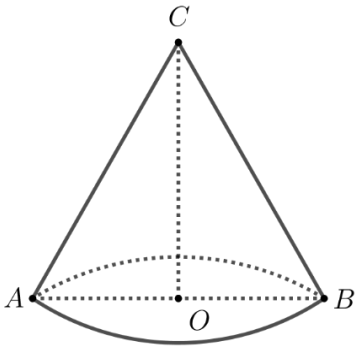
a) $135°$
b) $90°$
c) $60°$
d) $45°$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul AMB, cu $AB = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$, înscris într-un cerc care are raza egală cu $8\,\text{cm}$. Măsura unghiului AMB este egală cu:



a) $15°$
b) $30°$
c) $45°$
d) $60°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un con circular drept care are secțiunea axială un triunghi echilateral cu înălțimea egală cu $6\,\text{cm}$. Generatoarea conului are lungimea egală cu:



a) $2\sqrt{3}\,\text{cm}$
b) $4\sqrt{3}\,\text{cm}$
c) $6\,\text{cm}$
d) $12\,\text{cm}$

SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un excursionist a parcurs un traseu în trei zile. În prima zi a parcurs 30% din lungimea traseului, în a doua zi o treime din distanța parcursă în prima zi, iar în a treia zi a parcurs restul de $72\,\text{km}$.

(2p) ***a)*** Este posibil ca distanța parcursă de excursionist în a doua zi să reprezinte o pătrime din lungimea întregului traseu? Justifică răspunsul dat.

(3p) ***b)*** Determină lungimea traseului parcurs de excursionist în cele trei zile.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

(2p) ***a)*** Arată că $E(x)=\frac{x+1}{x+2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

(3p) ***b)*** Determină numerele întregi a pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

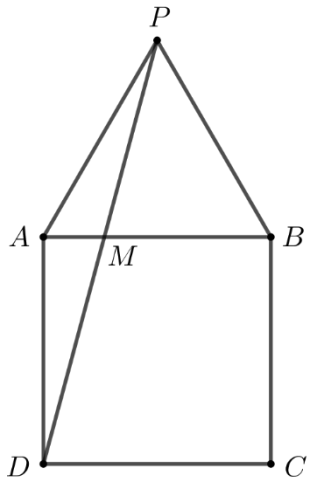
5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+2.$

(2p) ***a)*** Rezolvă ecuația $3\cdot f(x)=-4-2x$.

(3p) ***b)*** Știind că A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, iar punctul C este simetricul punctului A față de punctul B, determină coordonatele punctului C.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ cu $AB = 4\text{cm}$ și triunghiul echilateral ABP.

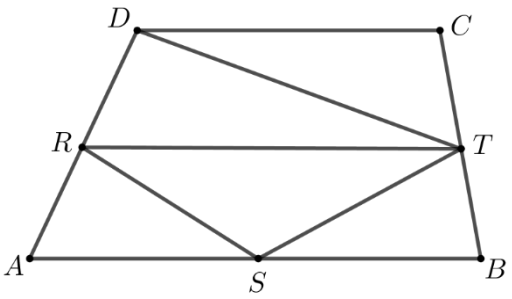
(2p) ***a)*** Arată că măsura unghiului DPB este egală cu $45°$.



(3p) ***b)*** Demonstrează că $AM = 4\left(2-\sqrt{3}\right)$ cm, unde $\{M\} = AB \cap PD$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB = 6$ cm și $CD = 4$ cm. Punctele R, S și T sunt mijloacele laturilor AD, AB, respectiv BC.

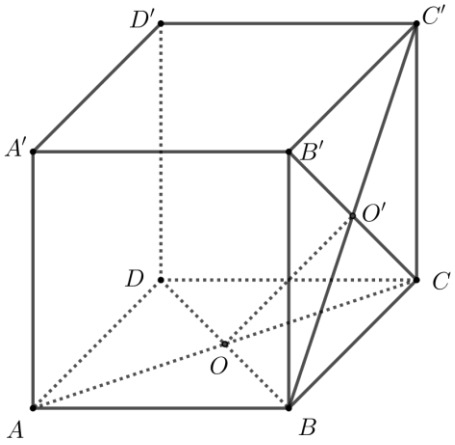
(**2p**) ***a)*** Arată că lungimea segmentului RT este egală cu 5 cm.



(**3p**) ***b)*** Arată că aria patrulaterului $DRST$ este egală cu jumătate din aria trapezului $ABCD$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $D'C' = 6$ cm.

(2p) ***a)*** Arată că volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$ este egal cu $216\,\text{cm}^3$.



(3p) ***b)*** Demonstrează că dreapta OO' este perpendiculară pe planul $(A'D'C)$, unde $\{O\} = AC \cap BD$ și $\{O'\} = BC' \cap B'C$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Numărul natural scris în baza zece, de forma $\overline{17x}$, divizibil cu 10, este egal cu: **a)** 17 **b)** 70 **c)** 100 **d)** 170
5p	**2.** Numărul care reprezintă 20% din 50 este egal cu: **a)** 10 **b)** 20 **c)** 25 **d)** 100
5p	**3.** Suma numerelor întregi din intervalul $[-2,3]$, este egală cu: **a)** -9 **b)** -3 **c)** 3 **d)** 6
5p	**4.** Inversul numărului $\frac{2}{3}$ este numărul: **a)** $-\frac{3}{2}$ **b)** $-\frac{2}{3}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{3}{2}$

5p **5.** Patru elevi, Elena, Maria, George și Mihai, au calculat media geometrică a numerelor $x=3-2\sqrt{2}$ și $y=3+2\sqrt{2}$ și au obținut următoarele rezultate:

Elena	Maria	George	Mihai
$\sqrt{17}$	$\sqrt{2}$	1	3

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică este:

a) Elena
b) Maria
c) George
d) Mihai

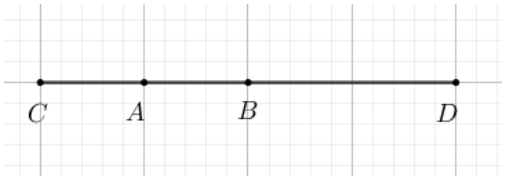
5p **6.** Afirmația „Numărul 4 este mai mare decât numărul $2\sqrt{5}$.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

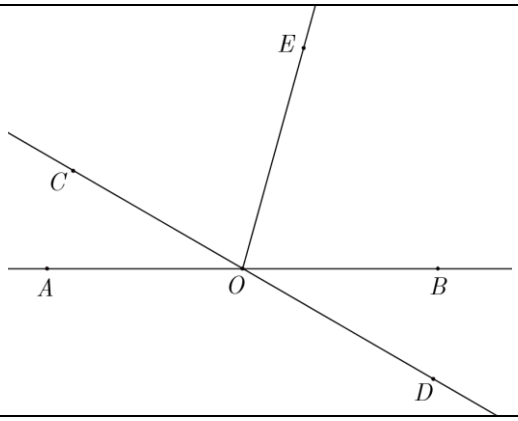
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată este reprezentat segmentul AB cu lungimea de $5\,\text{cm}$. Punctul C este simetricul punctului B față de punctul A, iar punctul D este simetricul punctului C față de punctul B. Lungimea segmentului CD este egală cu:



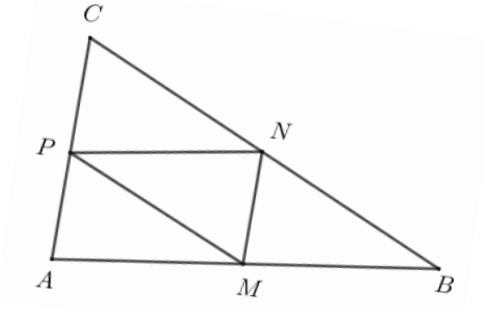
a) $5\,\text{cm}$
b) $10\,\text{cm}$
c) $15\,\text{cm}$
d) $20\,\text{cm}$

5p **2.** În figura alăturată, unghiurile AOC și BOD sunt opuse la vârf. Măsura unghiului AOC este egală cu $30°$, iar semidreapta OE este bisectoarea unghiului BOC. Măsura unghiului DOE este egală cu:



a) $75°$
b) $90°$
c) $105°$
d) $150°$

5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB=12\,\text{cm}$, $BC=13\,\text{cm}$ și $AC=7\,\text{cm}$. Punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor AB, BC, respectiv AC.
Perimetrul triunghiului MNP este egal cu:

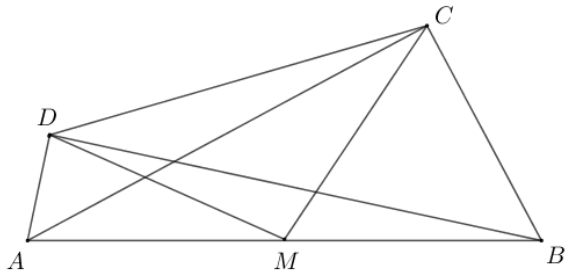


a) $8\,\text{cm}$
b) $16\,\text{cm}$
c) $18\,\text{cm}$
d) $32\,\text{cm}$

5p **4**. În figura alăturată este reprezentat patrulaterul $ABCD$. Dreapta AC este perpendiculară pe dreapta BC și dreapta AD este perpendiculară pe dreapta BD. Punctul M este mijlocul segmentului AB și măsura unghiului DCM este egală cu $40°$.

Măsura unghiului CMD este egală cu:

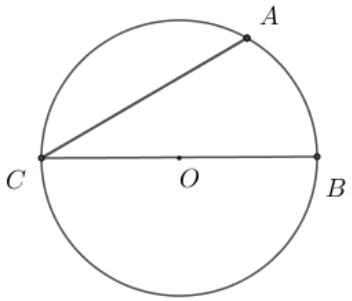
a) $80°$
b) $90°$
c) $100°$
d) $120°$



5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O și diametru BC. Punctul A aparține cercului, astfel încât măsura arcului mic AC este egală cu $120°$.

Măsura unghiului ACB este egală cu:

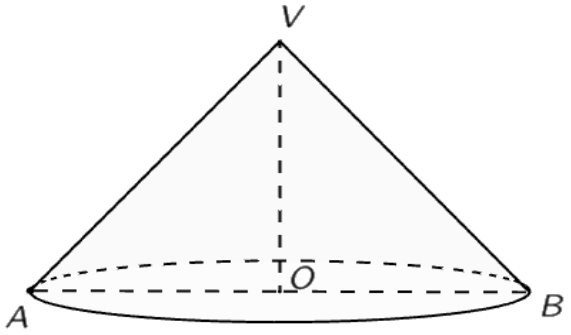
a) $30°$
b) $60°$
c) $90°$
d) $120°$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un con circular drept cu secțiunea axială triunghiul dreptunghic VAB și raza bazei conului $AO = 4$ cm.

Generatoarea acestui con are lungimea egală cu:

a) 4 cm
b) $4\sqrt{2}$ cm
c) 8 cm
d) $8\sqrt{2}$ cm



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Într-un bloc de locuințe sunt 22 de apartamente cu două, respectiv cu patru camere, în total fiind 60 de camere.

(2p) a) Este posibil ca în acest bloc să fie 16 apartamente cu patru camere? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul de apartamente cu două camere din acest bloc.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x^2-9}{x^2-16}-1\right):\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x-4}-\frac{3}{x^2-16}\right)$, unde x este număr real, $x\neq -4$, $x\neq 4$ și $x\neq \frac{3}{2}$.

(2p) a) Arată că $E(x)=\frac{7}{2x-3}$, unde x este număr real, $x\neq -4$, $x\neq 4$ și $x\neq \frac{3}{2}$.

(3p) b) Determină numerele naturale n pentru care $E(n)$ este număr natural.

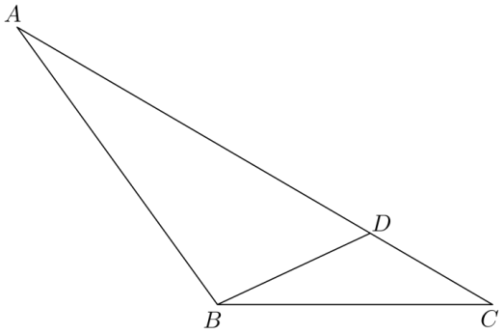
5p **3.** Se consideră numerele $a=\left(-\frac{1}{3}\right)^{32}:\left(-\frac{1}{3}\right)^{30}\cdot(-6)^2$ și $b=\left(\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}\right)\cdot(0,5)^{-2}$.

(2p) a) Arată că $a=4$.

(3p) b) Calculează media aritmetică a numerelor a și b.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $BC=10\text{cm}$, $AC=20\text{cm}$ și măsura unghiului ACB este egală cu $30°$. Punctul D aparține segmentului AC, astfel încât unghiul DBC este congruent cu BAC.

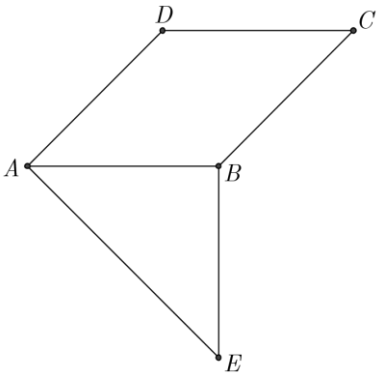
(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu $50\,\text{cm}^2$.



(3p) b) Calculează lungimea segmentului CD.

5p **5.** În figura alăturată sunt reprezentate rombul $ABCD$ cu măsura unghiului BAD egală cu $45°$ și triunghiul dreptunghic isoscel ABE cu $AB = BE = 10\,\text{cm}$. Punctele C și E sunt de o parte și de alta a dreptei AB.

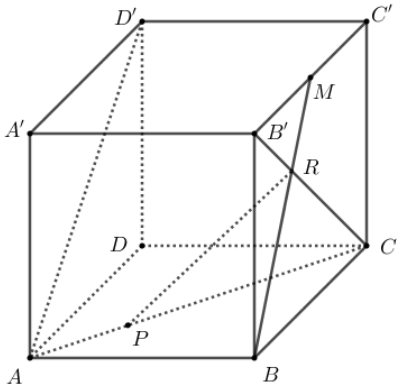
(**2p) a)** Arată că dreapta DA este perpendiculară pe dreapta AE.



(3p) b) Arată că tangenta unghiului CAE este egală cu $\sqrt{2}+1$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 6\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului $B'C'$ și dreptele BM și $B'C$ se intersectează în punctul R. Punctul P aparține segmentului AC, astfel încât $AP = 2\sqrt{2}\,\text{cm}$.

(2p) a) Arată că $CP = 2 \cdot AP$.



(3p) b) Determină măsura unghiului dreptelor PR și AD'.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2023 - 2024
Matematică

Model

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\frac{30}{100}\left(x-\frac{20}{100}\cdot x\right)=\frac{24x}{100}$ este suma cheltuită de Mihai în a doua zi, unde x reprezintă întreaga sumă de bani	**1p**
	$\frac{24x}{100}<\frac{25x}{100}=\frac{1}{4}\cdot x$, de unde obținem că Mihai nu a cheltuit în a doua zi un sfert din întreaga sumă de bani	**1p**
	b) $\frac{x}{5}+\frac{6x}{25}+\left(\frac{6x}{25}+20\right)+44=x$	**1p**
	$\frac{17x}{25}+64=x$	**1p**
	$x=200$ de lei	**1p**
2.	**a)** $\frac{x}{9+3x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x^2+3x}=\frac{x}{3(x+3)}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x(x+3)}=$	**1p**
	$=\frac{x^2-6x+9}{3x(x+3)}=\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$ și $x\neq 0$	**1p**

	b) $\frac{x}{3}+\frac{3}{x}-2=\frac{x^2+9-6x}{3x}=\frac{(x-3)^2}{3x}$	**1p**
	$E(x)=\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}\cdot\frac{3x}{(x-3)^2}=\frac{1}{x+3}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$, $x\neq 0$, $x\neq 3$	**1p**
	$5\cdot E(n)=\frac{5}{n+3}$ este număr natural, deci $n+3=1$ sau $n+3=5$ şi, cum n este număr natural, obţinem $n=2$	**1p**
3.	**a)** $f(-2)=0$	**1p**
	$2023\cdot f(-2)=2023\cdot 0=0$	**1p**
	b) $A(-2,0)$ şi $B(0,2)$ sunt punctele de intersecţie a graficului funcţiei f cu axele Ox, respectiv Oy	**1p**
	În triunghiul dreptunghic isoscel AOB, OM mediană, deci OM bisectoare $\Rightarrow \sphericalangle MOB=45^\circ$	**1p**
	$NP\perp Ox$, $P\in Ox\Rightarrow P(3,0)$, iar $\sphericalangle MON=\sphericalangle MOB+\sphericalangle BOP+\sphericalangle PON=45^\circ+90^\circ+45^\circ=180^\circ$, de unde rezultă că punctele N, O şi M sunt coliniare	**1p**
4.	**a)** În triunghiul dreptunghic ABC, $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{12^2+9^2}=$	**1p**
	$=\sqrt{225}=15\text{cm}$	**1p**
	b) $QN\parallel AB\parallel CD$, $PM\parallel BC\parallel AD$ şi $\sphericalangle QAM=\sphericalangle PCN=90^\circ$, deci $AMEQ$ şi $CNEP$ sunt dreptunghiuri	**1p**
	$PC\parallel AM\Rightarrow \Delta PEC\sim\Delta MEA\Rightarrow \frac{PE}{ME}=\frac{PC}{AM}=\frac{EC}{EA}=\frac{1}{2}$	**1p**
	$ME=2\cdot PE$, $AM=2\cdot PC\Rightarrow \mathcal{A}_{AMEQ}=AM\cdot ME=4\cdot PC\cdot PE=4\cdot \mathcal{A}_{CNEP}$	**1p**
5.	**a)** În triunghiul dreptunghic ABC, $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=4\sqrt{2}\text{ cm}$	**1p**
	$P_{\Delta ABC}=AB+AC+BC=2\sqrt{2}+4\sqrt{2}+2\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)\text{cm}$	**1p**
	b) EM mediană în triunghiul dreptunghic isoscel $AEB\Rightarrow EM=\frac{AB}{2}=\sqrt{2}\text{ cm}$, BE bisectoarea $\sphericalangle ABC$, $EM\perp AB$, $M\in AB$ şi $EN\perp BC$, $N\in BC$, de unde obţinem $EM=EN=\sqrt{2}\text{ cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AEC}=\mathcal{A}_{\Delta ABC}-\mathcal{A}_{\Delta AEB}-\mathcal{A}_{\Delta BEC}=\frac{AB\cdot BC}{2}-\frac{AB\cdot EM}{2}-\frac{BC\cdot EN}{2}=2\left(\sqrt{3}-1\right)\text{cm}^2$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AEC}=\frac{AC\cdot EP}{2}$, unde $EP\perp AC, P\in AC$, de unde $EP=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\text{cm}$	**1p**
6.	**a)** $\mathcal{A}_t=2\cdot\left(AB\cdot AA'+BC\cdot AA'+AB\cdot BC\right)=2\cdot(16+8+8)=$	**1p**
	$=2\cdot 32=64\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\Delta B'C'D'\equiv\Delta B'C'C\Rightarrow B'D'=B'C$	**1p**
	În triunghiul $B'C'D'$ dreptunghic, $B'N=\frac{B'C'^2}{B'D'}$ şi în triunghiul $B'C'C$ dreptunghic, $B'P=\frac{B'C'^2}{B'C}$, de unde $B'N=B'P$	**1p**
	În triunghiul $B'D'C$, $\frac{B'N}{B'D'}=\frac{B'P}{B'C}\Rightarrow NP\parallel D'C$, $D'C\subset(ACD')\Rightarrow NP\parallel(ACD')$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2023 - 2024
Matematică

Simulare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Restul împărțirii lui 53 la 18 este 17	**1p**
	$17 \neq 5$, deci Maria nu poate avea în bibliotecă 53 de cărți	**1p**
	b) $n = 8c_1 + 5 = 12c_2 + 5 = 18c_3 + 5$, unde n este numărul cărților din bibliotecă, iar c_1, c_2 și c_3 sunt numere naturale	**1p**
	$n-5$ este multiplu comun al numerelor 8, 12 și 18, deci $n = 72k + 5$, unde k este număr natural	**1p**
	Cum n este cel mai mic număr natural de trei cifre cu proprietățile din enunț, obținem $n = 149$	**1p**
2.	**a)** $E(0) = (2 \cdot 0 + 3)^2 + (0-2)(0+2) - 3(1-0) + 2 =$	**1p**
	$= 9 - 4 - 3 + 2 = 4$	**1p**
	b) $E(n) + 6 = 4n^2 + 12n + 9 + n^2 - 4 - 3 + 3n + 2 + 6 = 5n^2 + 15n + 10$, pentru orice număr natural n	**1p**
	$N = 5\left(n^2 + 3n + 2\right) = 5(n+1)(n+2)$, pentru orice număr natural n	**1p**
	Cum $n+1$ și $n+2$ sunt numere naturale consecutive, obținem $(n+1)(n+2) \vdots 2$, deci $N \vdots 10$	**1p**

3.	**a)** $a=5\cdot\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{1}=$	**1p**
	$=5-2=3$	**1p**
	b) $\overline{3c}$ și $\overline{cb}$ sunt direct proporționale cu numerele 4 și $3\Rightarrow\frac{\overline{3c}}{4}=\frac{\overline{cb}}{3}$	**1p**
	$b=3^{10}:3^8-5^8:5^7=9-5=4$	**1p**
	$37c=74\Rightarrow c=2$, de unde obținem $\overline{abc}=342$	**1p**
4.	**a)** $\sphericalangle ABE=\sphericalangle EBC=20°$, deci $\sphericalangle BMD=70°$	**1p**
	$\sphericalangle BMD=\sphericalangle EMA=70°$	**1p**
	b) $EF\perp BC$, $AD\perp BC\Rightarrow EF\|\|AD$	**1p**
	$\sphericalangle AEB=70°\Rightarrow\sphericalangle AEM=\sphericalangle EMA\Rightarrow\Delta EAM$ este isoscel, deci $AE=AM$	**1p**
	$\Delta EFB\equiv\Delta EAB\Rightarrow EF=EA$ și, cum $AM=EA$ și $EF\|\|AM$, obținem că $AMFE$ este romb	**1p**
5.	**a)** $AB=3AP$	**1p**
	$3AP=15$, de unde obținem $AP=5\text{ cm}$	**1p**
	b) $\Delta ANP\sim\Delta CND\Rightarrow\frac{AN}{CN}=\frac{NP}{ND}=\frac{AP}{CD}=\frac{1}{3}$, deci $AN=\frac{AC}{4}$ și, cum $AO=\frac{AC}{2}$, obținem $AN=NO$	**1p**
	$PS\perp AN$, $S\in AN$ și $DV\perp NO$, $V\in NO$ și, cum $\Delta SNP\sim\Delta VND$, obținem $\frac{PS}{DV}=\frac{NP}{ND}=\frac{1}{3}$	**1p**
	$\frac{\mathcal{A}_{\Delta ANP}}{\mathcal{A}_{\Delta DNO}}=\frac{\frac{AN\cdot PS}{2}}{\frac{NO\cdot DV}{2}}=\frac{AN}{NO}\cdot\frac{PS}{DV}=\frac{1}{3}$	**1p**
6.	**a)** MN este linie mijlocie în triunghiul $AA'D'\Rightarrow MN=\frac{AD'}{2}$	**1p**
	PQ este linie mijlocie în triunghiul $ADD'\Rightarrow PQ=\frac{AD'}{2}$, deci $MN=PQ$	**1p**
	b) $MN\|\|AD'$, $PQ\|\|AD'\Rightarrow MN\|\|PQ$	**1p**
	$MPCB$ este paralelogram, deci $MB\|\|PC$ și, cum $MN\cap MB=\{M\}$, MN, $MB\subset(MNB)$, $PQ\cap PC=\{P\}$, PQ, $PC\subset(PQC)$, obținem $(MNB)\|\|(PQC)$	**1p**
	$CT\subset(PQC)\Rightarrow CT\|\|(MNB)$	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

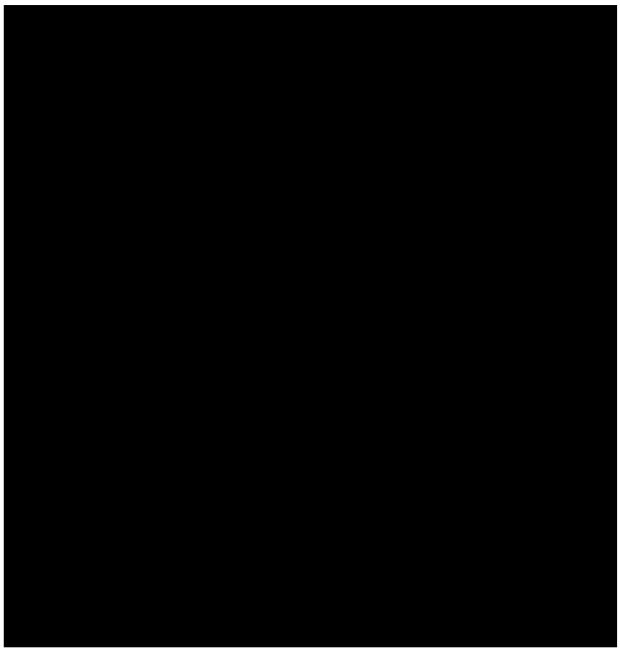
Anul școlar 2023 – 2024

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $3+2\cdot 5$ este egal cu: **a)** 25 **b)** 13 **c)** 10 **d)** 1
5p	**2.** Dacă $\frac{x}{2}=\frac{3}{4}$, atunci $4\cdot x$ este egal cu: **a)** $\frac{3}{2}$ **b)** $\frac{8}{3}$ **c)** 6 **d)** 12
5p	**3.** Soluția ecuației $2-x=2$ este numărul: **a)** -4 **b)** 0 **c)** 2 **d)** 4
5p	**4.** Cel mai mic element al mulțimii $A=\left\{\frac{1}{9},\frac{1}{99},\frac{1}{999},\frac{1}{9999}\right\}$ este: **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{1}{99}$ **c)** $\frac{1}{999}$ **d)** $\frac{1}{9999}$

5p **5.** Patru elevi, Andra, Marius, Ioana și David, au calculat produsul numerelor $a=\sqrt{5}$ și $b=\sqrt{20}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Andra	Marius	Ioana	David
10	5	$2\sqrt{5}$	$\sqrt{10}$

Rezultatul corect a fost obținut de către:

a) Andra
b) Marius
c) Ioana
d) David

5p **6.** Alina afirmă că: „ În intervalul de numere reale $[-3,2]$ sunt 7 numere întregi.” Afirmația Alinei este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

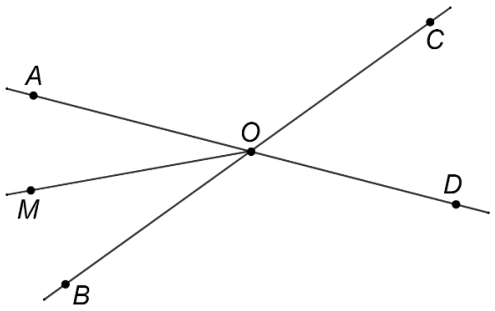
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $AB=BC=CD$, iar lungimea segmentului CD este egală cu $10\,\text{cm}$. Lungimea segmentului AD este egală cu:

a) $30\,\text{cm}$
b) $20\,\text{cm}$
c) $15\,\text{cm}$
d) $10\,\text{cm}$

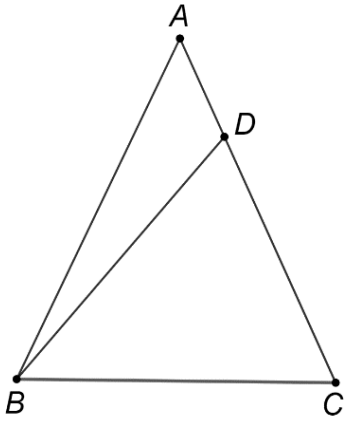
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile opuse la vârf AOB și COD, cu punctele A, O și D coliniare. Măsura unghiului AOB este egală cu $50°$ și OM este bisectoarea unghiului AOB. Măsura unghiului DOM este egală cu:

a) $25°$
b) $50°$
c) $130°$
d) $155°$



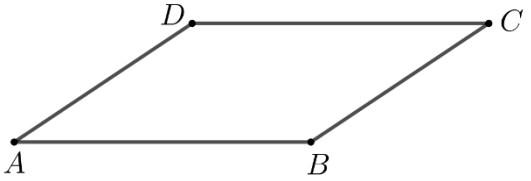
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $AB=AC$ și $\sphericalangle BAC=50°$. Punctul D aparține segmentului AC, astfel încât $BD=BC$. Măsura unghiului BDC este egală cu:

a) $50°$
b) $65°$
c) $115°$
d) $130°$



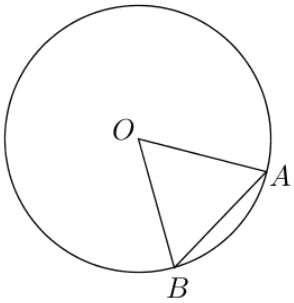
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AB=10\text{cm}$ și $BC=6\text{cm}$. Perimetrul paralelogramului $ABCD$ este egal cu:

a) 16cm
b) 24cm
c) 32cm
d) 40cm



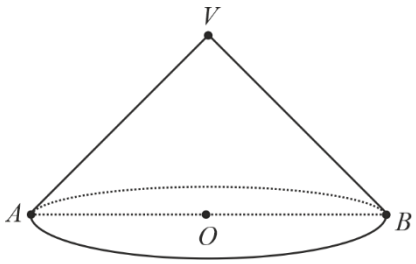
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O. Punctele A și B aparțin cercului, astfel încât măsura unghiului AOB este de $60°$ și $AB=10\text{cm}$. Lungimea cercului este egală cu:

a) $10\pi\text{cm}$
b) $20\pi\text{cm}$
c) $100\pi\text{cm}$
d) $200\pi\text{cm}$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un con circular drept cu secțiunea axială triunghiul dreptunghic VAB. Înălțimea conului are lungimea egală cu $2\sqrt{2}\text{cm}$. Aria bazei conului este egală cu:

a) 8cm^2
b) 16cm^2
c) $8\pi\text{cm}^2$
d) $16\pi\text{cm}^2$



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Mihai a cheltuit o sumă de bani în patru zile. În prima zi a cheltuit 20% din întreaga sumă, în a doua zi 30% din suma rămasă, în a treia zi cu 20 de lei mai mult decât a doua zi, iar în a patra zi a cheltuit ultimii 44 de lei.

(2p) a) Verifică dacă Mihai a cheltuit în a doua zi un sfert din întreaga sumă de bani. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină suma de bani cheltuită de Mihai, în total, în cele patru zile.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x}{9+3x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x^2+3x}\right):\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}-2\right)$, unde x este un număr real, $x\neq -3$, $x\neq 0$ și $x\neq 3$.

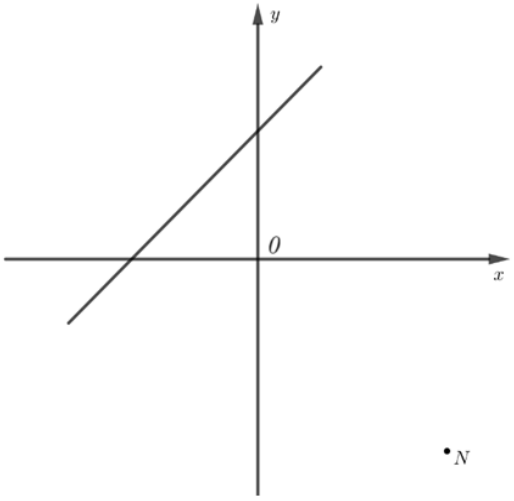
(2p) a) Arată că $\frac{x}{9+3x}-\frac{2}{x+3}+\frac{3}{x^2+3x}=\frac{(x-3)^2}{3x(x+3)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -3$ și $x\neq 0$.

(3p) b) Determină numărul natural n pentru care $5\cdot E(n)$ este număr natural.

5p

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

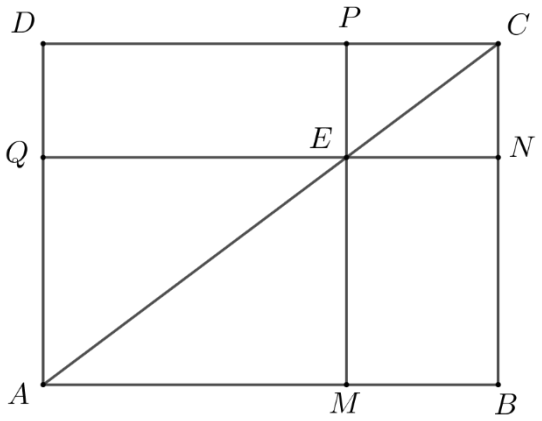
(2p) a) Arată că $2023\cdot f(-2)=0$.



(3p) b) Punctele A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării geometrice a graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy, ale sistemului de axe ortogonale xOy, iar punctul M este mijlocul segmentului AB. Arată că punctele N, O și M sunt coliniare, unde $N(3,-3)$.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=12\text{cm}$ și $BC=9\text{cm}$. Punctul E aparține segmentului AC, astfel încât $AE=10\text{cm}$. Prin E se duc dreptele QN și PM paralele cu dreptele AB, respectiv BC. Punctele M, N, P și Q aparțin segmentelor AB, BC, CD și respectiv AD.

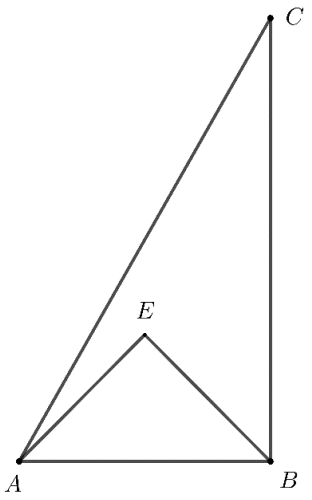
(2p) a) Arată că $AC=15\text{cm}$.



(3p) b) Arată că aria patrulaterului $AMEQ$ este de patru ori mai mare decât aria patrulaterului $CNEP$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în B, cu $AB = 2\sqrt{2}$ cm, $BC = 2\sqrt{6}$ cm și triunghiul dreptunghic isoscel AEB cu $AE = EB$. Punctele E și C sunt de aceeași parte a dreptei AB.

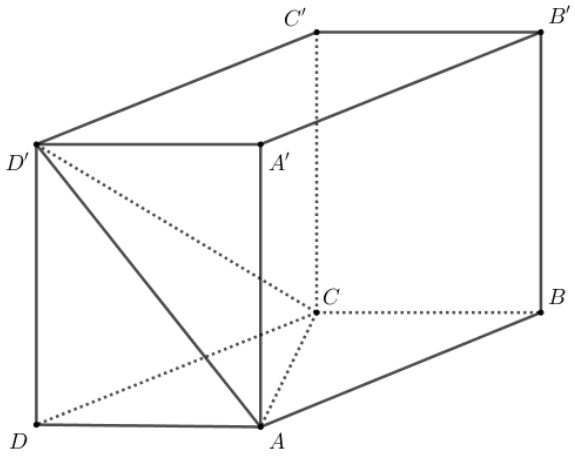
(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ABC este egal cu $2\sqrt{2}\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul E la dreapta AC.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = AA' = 4\text{cm}$ și $BC = 2\text{cm}$.

(2p) a) Arată că aria totală a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este egală cu 64cm^2.



(3p) b) Arată că dreapta NP este paralelă cu planul (ACD'), unde punctul N este proiecția punctului C' pe dreapta $B'D'$ și punctul P este proiecția punctului C' pe dreapta CB'.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:…….....
…….....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
…….....……..……
Școala de proveniență: .....…
…….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

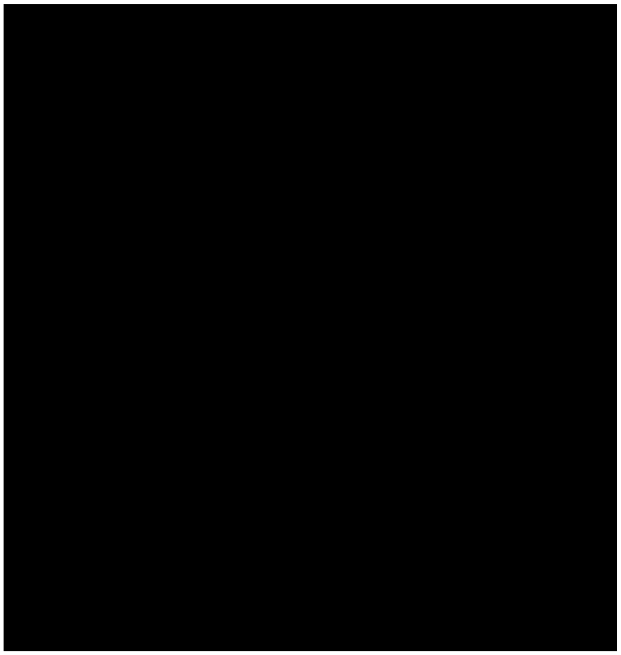
Anul școlar 2023 – 2024

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $52-2\cdot(25-5)$ este: **a)** 12 **b)** 92 **c)** 100 **d)** 1000
5p	**2.** Dacă $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{3}$, atunci rezultatul calculului $3x-5y$ este: **a)** 0 **b)** 2 **c)** 5 **d)** 6
5p	**3.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ și $B=\{0,2,4,6,8\}$. Intersecția mulțimilor A și B este mulțimea: **a)** $\{0,2,4,6,8\}$ **b)** $\{0,1,2,3,4,5,6,8\}$ **c)** $\{2,4,6\}$ **d)** $\{0,2,4,6\}$
5p	**4.** Mulțimea soluțiilor reale ale inecuației $2x+2\geq 4$ este: **a)** $(-\infty,-1]$ **b)** $(-\infty,1]$ **c)** $[-1,+\infty)$ **d)** $[1,+\infty)$

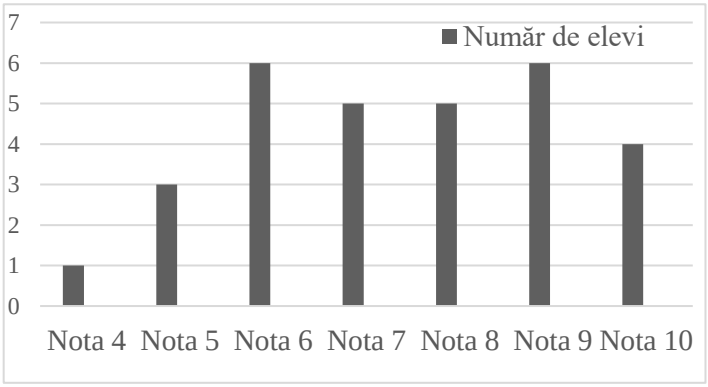
5p **5.** Patru elevi, Ana, Ioan, Dana și Vlad determină numărul $a=\left|2-4\sqrt{3}\right|+2\left(\sqrt{12}+1\right)$. Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ana	Ioan	Dana	Vlad
0	4	$4\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$

Conform informațiilor din tabel, elevul care a determinat corect numărul a este:

a) Ana
b) Ioan
c) Dana
d) Vlad

5p **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute de elevii unei clase, la un test de matematică.



Afirmația: „Conform informațiilor din diagramă, jumătate din numărul elevilor acestei clase a obținut la testul de matematică cel puțin nota 8.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

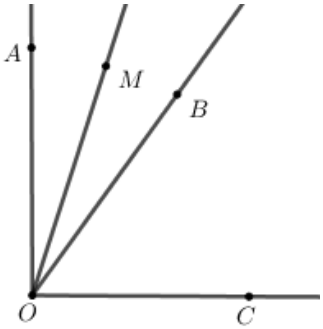
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $BC=2AB$, $CD=2BC$ și $AB=2\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul N este mijlocul segmentului CD. Lungimea segmentului MN este egală cu:

a) 4cm
b) 5cm
c) 7cm
d) 9cm

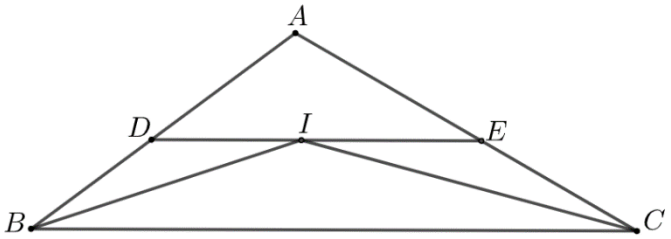
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente complementare AOB și BOC. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și $\sphericalangle BOC=3\cdot\sphericalangle AOM$. Măsura unghiului AOB este egală cu:

a) $18°$
b) $36°$
c) $40°$
d) $54°$



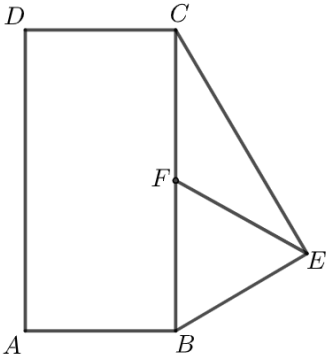
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB=10\text{cm}$ și $AC=12\text{cm}$. Semidreapta BI este bisectoarea unghiului ABC și semidreapta CI este bisectoarea unghiului ACB. Paralela prin punctul I la dreapta BC intersectează dreptele AB și AC în punctele D, respectiv E. Perimetrul triunghiului ADE este egal cu:

a) 11cm
b) 20cm
c) 22cm
d) 24cm



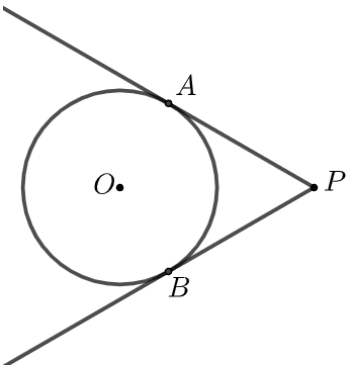
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB=3\sqrt{2}\text{cm}$ și triunghiul BEC dreptunghic în E. Punctul F este mijlocul segmentului BC și $EF=4\text{cm}$.
Aria trapezului $AFCD$ este egală cu:

a) $6\sqrt{2}\ \text{cm}^2$
b) $12\sqrt{2}\ \text{cm}^2$
c) $18\sqrt{2}\ \text{cm}^2$
d) $24\sqrt{2}\,\text{cm}^2$



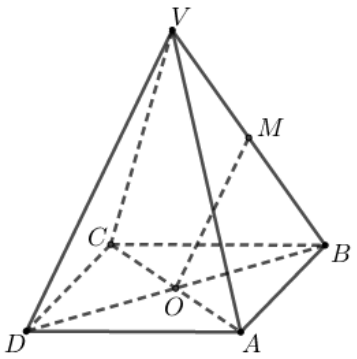
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centrul în punctul O și raza egală cu 3 cm. Punctul P este situat la o distanță de 6 cm de centrul cercului. Dreptele PA și PB sunt tangente la cerc în punctele A și B. Măsura arcului mic AB este egală cu:

a) $60°$
b) $90°$
c) $120°$
d) $150°$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$, $VA=AB$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și DB. Dacă punctul M este mijlocul segmentului VB, atunci măsura unghiului dreptelor OM și CD este egală cu:

a) $0°$
b) $30°$
c) $45°$
d) $60°$



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Maria aranjează cărțile din bibliotecă și observă că dacă le grupează câte 8, câte 12 sau câte 18 îi rămân de fiecare dată 5 cărți.

(2p) a) Verifică dacă Maria poate avea în bibliotecă 53 de cărți. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul cărților din biblioteca Mariei, știind că acesta este cel mai mic număr natural de trei cifre cu proprietățile din enunț.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(2x+3)^2+(x-2)(x+2)-3(1-x)+2$, unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(0)=4$.

(3p) b) Arată că numărul $N=E(n)+6$ este divizibil cu 10, pentru orice număr natural n.

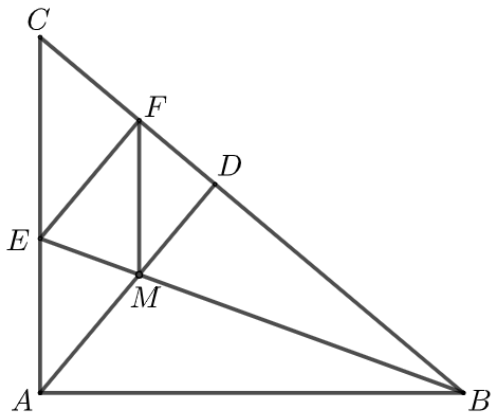
5p **3.** Se consideră numărul natural $\overline{abc}$ cu a, b, c cifre nenule, unde $a=5\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$ și $b=\left(3\cdot3^2\cdot3^3\cdot3^4\right):9^4-25^4:5^7$.

(2p) a) Arată că $a=3$.

(3p) b) Determină numărul $\overline{abc}$, știind că numerele $\overline{ac}$ și $\overline{cb}$ sunt direct proporționale cu numerele 4 și 3.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu $\sphericalangle A = 90°$ și $\sphericalangle B = 40°$. Semidreapta BE este bisectoarea unghiului ABC, punctul E aparține segmentului AC. Perpendiculara din punctul A pe BC intersectează dreapta BC în punctul D, iar perpendiculara din punctul E pe BC intersectează dreapta BC în punctul F. Dreptele BE și AD se intersectează în punctul M.

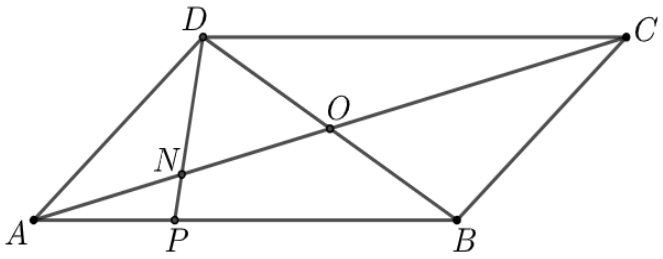
(2p) a) Arată că măsura unghiului EMA este egală cu $70°$.



(3p) b) Arată că patrulaterul $AMFE$ este romb.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AB=15\,\text{cm}$. Punctul P aparține laturii AB, astfel încât $PB=2AP$ și O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

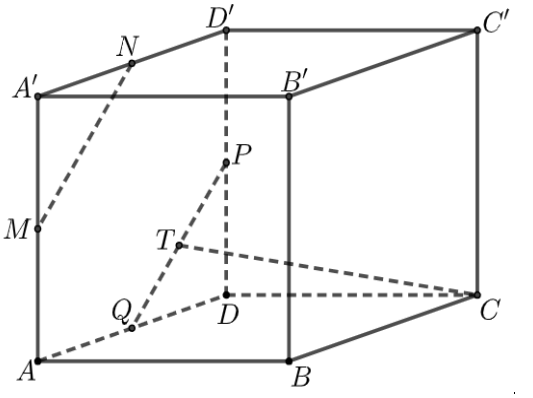
(2p) a) Arată că lungimea segmentului AP este egală cu $5\,\text{cm}$.



(3p) b) Determină raportul dintre aria triunghiului ANP și aria triunghiului DNO, unde N este punctul de intersecție a dreptelor AC și DP.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele M, N, P și Q sunt mijloacele segmentelor AA', $A'D'$, DD', respectiv AD.

(2p) a) Arată că $MN = PQ$.



(3p) b) Știind că punctul T este mijlocul segmentului PQ, demonstrează că dreapta CT este paralelă cu planul (MNB).

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2022 - 2023
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $15 \neq 4\cdot 1+3\cdot 5$, deci nr. $\overline{ab}$ nu poate fi 15	**2p**
	b) $10a+b=4a+3b \Leftrightarrow 6a=2b \Leftrightarrow 3a=b$	**1p**
	$\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\ \begin{cases}a=2\\b=6\end{cases}\ \begin{cases}a=3\\b=9\end{cases}\ \overline{ab}\in\{13,26,39\}$	**1p**
	$m_a=(13+26+39):3=26$	**1p**
2.	**a)** $x=\left(\frac{5}{4}+\frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{2}}}\cdot\frac{7\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{12}_{4}}\right)\cdot 3=\left(\frac{5}{4}+\frac{7}{4}\right)\cdot 3=\frac{12}{4}\cdot 3=3\cdot 3=9$	**2p**
	b) $y=\overset{2+\sqrt{3}}{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}}-\sqrt{48}=\left(2+\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{48}=7+\cancel{4\sqrt{3}}-\cancel{4\sqrt{3}}=7$	**2p**
	$\sqrt{x+y}=\sqrt{9+7}=\sqrt{16}=4=2^2$ – pătrat perfect	**1p**
3.	**a)** $(x+2)(x+5)=x^2+2x+5x+10=x^2+7x+10$	**2p**
	b) $(n+2)\underline{(n+3)(n+4)}(n+5)+1=$	
	$=\underbrace{\left(n^2+7n+10\right)}_{t}\underbrace{\left(n^2+7n+12\right)}_{t+2}+1=$	**1p**
	$=t(t+2)+1=t^2+2t+1=(t+1)^2=$	
	$=\left(n^2+7n+11\right)^2$	**1p**
	$\sqrt{E(n)}=\left\|n^2+7n+11\right\|=n^2+7n+11\in\mathbb{N},(\forall)n\in\mathbb{N}$	**1p**
4.	**a)** Calculul înălțimii AD corespunzătoare bazei AD=12	**1p**
	$A_{\Delta ABC}=\frac{B\cdot h}{2}=\frac{10\cdot 12}{2}=10\cdot 6=60cm^2$	**1p**
	b) Notez distanțele de la D la AB și la AC cu d_1 respectiv d_2.	
	$A_{ABC}=A_{ABD}+A_{ADC}$	**1p**
	$=\frac{AB\cdot d_1}{2}+\frac{AC\cdot d_2}{2}$	
	$60=\frac{13\cdot d_1}{2}+\frac{13\cdot d_2}{2}\Rightarrow d_1+d_2=\frac{120}{13}$	**1p**
	$\frac{120}{13}>9\Leftrightarrow 120>117$	**1p**

5.	**a)** $AD=\frac{2}{\cancel{3}}\cdot\cancel{6}^{2}=4$	**1p**
	Perimetrul $ABCD=2\cdot 6+2\cdot 4=12+8=20\text{cm}$	**1p**
	b) $\begin{matrix}MB=DN\\MB\ II\ DN\end{matrix}\Rightarrow$ MBND paralelogram $\Rightarrow$ O mijlocul (BD) și (MN);	**1p**
	$DM \underset{\equiv}{\parallel} BN\Rightarrow DQ \underset{\equiv}{\parallel} PB\Rightarrow$ DQBP paralelogram	**1p**
	$\Rightarrow$ diagonala PQ trece prin O mijlocul (BD) care este și mijlocul (MN) $\Rightarrow$ P, O, Q coliniare	**1p**
6.	**a)** $A_t=\cancel{4}\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{\cancel{4}}=16\sqrt{3}\Rightarrow l=4\Rightarrow CD=4\text{cm}$	**2p**
	b) Fie P mijlocul BD.	
	NP linie mijlocie în $\triangle BCP\Rightarrow NP\parallel CD$	**1p**
	$\widehat{(MN,CD)}=\widehat{(MN,NP)}=\widehat{MNP}$	**1p**
	$NP=2;PM=2;MN=2\sqrt{2}\Rightarrow\Delta MNP$ dreptunghic isoscel	
	$\Rightarrow\widehat{MNP}=45°$	**1p**

Prezenta lucrare conține_____ pagini.

Numele:……...
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

SIMULAREA
EXAMENULUI DE
EVALUARE NAȚIONALĂ
PENTRU
ELEVII CLASEI a VIII-a

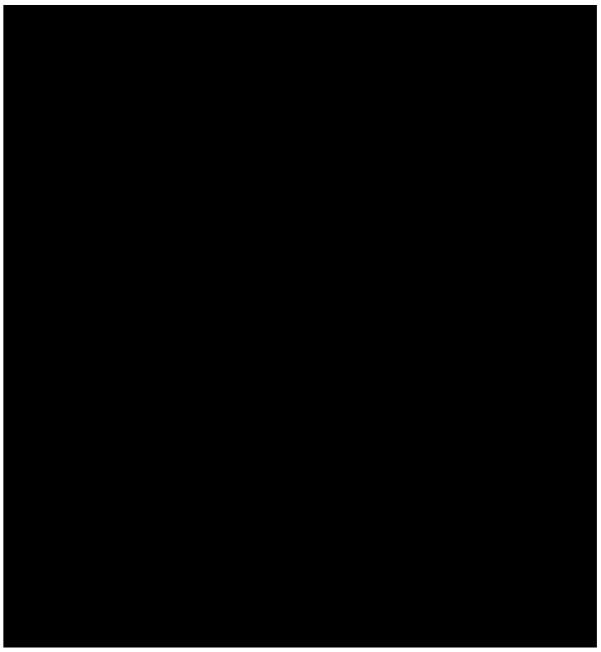
03 februarie 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

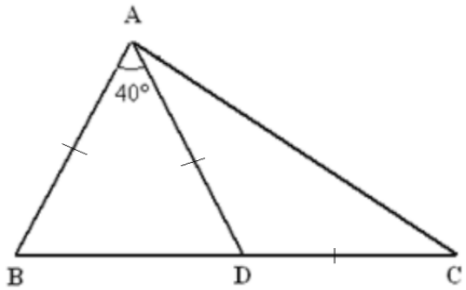
5p	**1.** Rezultatul calculului $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(-\frac{1}{6}\right)$ este egal cu : **a)** 1 **b)** $\frac{1}{6}$ **c)** 0 **d)** -1
5p	**2.** A 23-a zecimală a numărului 2,(023) este: **a)** 3 **b)** 4 **c)** 2 **d)** 0
5p	**3.** Dacă 8 kg de mere costă 20 lei, atunci 6 kg de mere costă: **a)** 12 lei **b)** 10 lei **c)** 18 lei **d)** 15 lei
5p	**4.** Mulțimea A= $\{a \in \mathbb{R} / -9 \le 2a-1 < 5\}$ este egală cu: **a)** (-4;3) **b)** [-5;3) **c)** (-4;3] **d)** [-4;3)

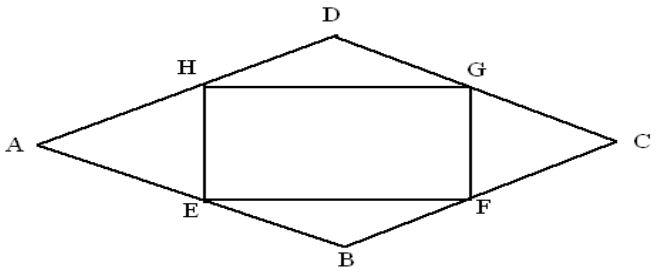
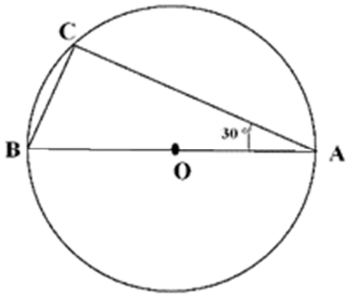
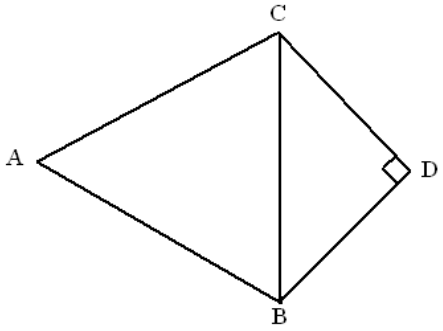
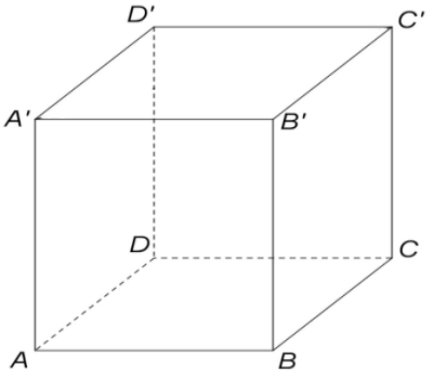
5p	**5.** Patru elevi calculează media geometrică a numerelor $a=3-\sqrt{5}$ și $b=\sqrt{9}+\sqrt{5}$ iar rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos. Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică a celor două numere este: **a)** Darius **b)** Crina **c)** Ana **d)** Barbu
5p	**6.** Mihnea are 16 ani iar Tudor are 12 ani. Tudor afirmă: „ acum 3 ani eu aveam jumătate din vârsta pe care o va avea Mihnea peste 2 ani.” Afirmația lui Tudor este: **a)** adevărată **b)** falsă

Ana	Barbu	Crina	Darius
6	4	2	3

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată, punctele A,B,C sunt coliniare, M este mijlocul segmentului AB și N este mijlocul segmentului BC. Dacă AB = 8 cm și BC = 4 cm, atunci lungimea segmentului MN este egală cu: **a)** 4 cm **b)** 8 cm **c)** 12 cm **d)** 6 cm
5p	**2.** Triunghiurile ABD și ADC au $AB \equiv AD \equiv DC$ iar $\sphericalangle BAD = 40°$. Măsura unghiului ACB este egală cu: **a)** 35° **b)** 40° **c)** 70° **d)** 110° 

5p	**3.** În rombul ABCD din figura alăturată, punctele E, F, G și H sunt mijloacele laturilor AB, BC, CD respectiv AD. Raportul dintre aria patrulaterului EFGH și aria rombului ABCD este egal cu: **a)** $\frac{1}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{3}{4}$ 
5p	**4.** În cercul de centru O din figura alăturată, diametrul AB are lungimea de 6 cm și $\sphericalangle CAB = 30^\circ$. Lungimea coardei AC este egală cu : **a)** 3 cm **b)** 6 cm **c)** $3\sqrt{3}$ cm **d)** 5 cm 
5p	**5.** În figura alăturată, triunghiul ABC este echilateral cu latura 12 cm iar triunghiul BCD este dreptunghic isoscel cu ipotenuza BC. Lungimea segmentului BD este egală cu: **a)** $6\sqrt{2}$ cm **b)** 12 cm **c)** $6\sqrt{3}$ cm **d)** 6 cm 
5p	**6.** ABCDA'B'C'D' din figura alăturată este un cub. Măsura unghiului dreptelor BC' și D'C este egală cu: **a)** 30° **b)** 45° **c)** 60° **d)** 90° 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

5p **1.** Fie $\overline{ab}$ un un număr natural cu proprietatea $\overline{ab} = 4a + 3b$

(2p) a) Numărul $\overline{ab}$ poate fi 15? Justificați.

(3p) b) Calculați media aritmetică a numerelor de forma $\overline{ab}$ cu proprietatea din enunț.

5p **2.** Se dau numerele

$x = (1{,}25 + \sqrt{4\frac{1}{2}} : \frac{12}{\sqrt{98}}) \cdot \sqrt{(-3)^2}$

și

$y = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} - \sqrt{48}$

(2p) a) Demonstrați ca $x = 9$.

(3p) b) Stabiliți dacă N = $\sqrt{x+y}$ este pătrat perfect.

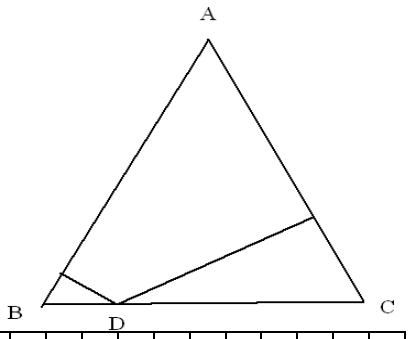
5p **3.** Se consideră expresia $E(x)=(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+1$, unde x este număr real.

(2p) a) Arătați că $(x+2)(x+5)=x^2+7x+10$ pentru orice număr real x .

(3p) b) Demonstrați că $\sqrt{E(n)}$ este număr natural, oricare ar fi numărul natural n.

5p **4.** În triunghiul ABC cu AB = AC = 13 cm și BC = 10 cm, se consideră D un punct oarecare al laturii BC.

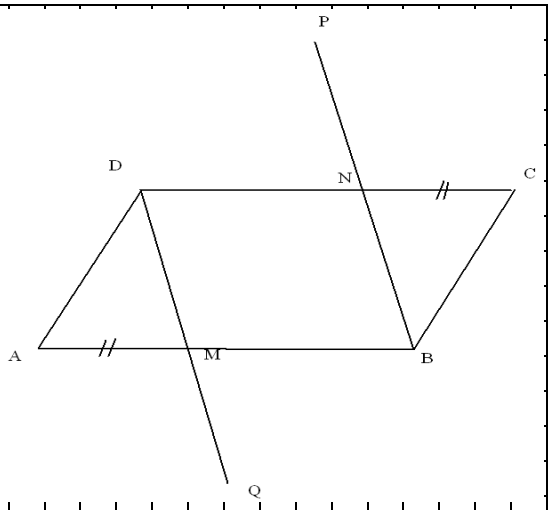
(2p) a) Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 60 cm^2.



(3p) b) Demonstrați că suma distanțelor de la D la laturile AB și AC este mai mare decât 9 cm.

5p **5.** În figura alăturată, se dă paralelogramul ABCD cu AB = 6 cm și AD = $\frac{2}{3}$ din CD. Pe laturile AB și CD se consideră punctele M și respectiv N, astfel încât CN ≡ AM, punctul P este simetricul lui B față de N și Q este simetricul lui D față de M.

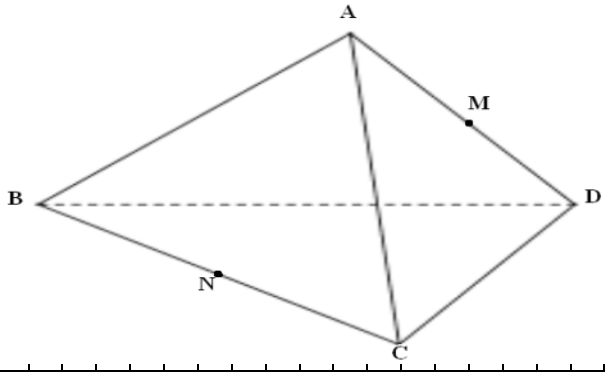
(2p) a) Arătați că perimetrul lui ABCD este egal cu 20 cm.



(3p) b) Demonstrați că punctele P, Q și mijlocul segmentului MN sunt coliniare.

5p **6.** Tetraedrul regulat $ABCD$ din figura alăturată are aria totală egală cu $16\sqrt{3}$ cm^2.

(2p)a) Arătați că CD = 4 cm.



(3p) b) Aflați măsura unghiului determinat de dreptele MN și CD, unde M și N sunt mijloacele segmentelor AD și respectiv BC.

Inspectoratul Școlar Județean Neamț

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	d)	5p
2.	b)	5p
3.	b)	5p
4.	c)	5p
5.	d)	5p
6.	b)	5p

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	c)	5p
2.	b)	5p
3.	d)	5p
4.	c)	5p
5.	c)	5p
6.	c)	5p

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	a) x = numărul elevilor din a doua grupă $\frac{30}{x}=\frac{4}{5}$ $x=\frac{150}{4}\notin\mathbb{N}\Rightarrow$Nu este posibil ca în prima grupă să fie 30 de elevi	1p 1p
	b) a = numărul elevilor din prima grupă b = numărul elevilor din a doua grupă $\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$ $a+7=b-7+6$ a = 32 de elevi, b = *40* de elevi	1p 1p 1p
2.	a) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+5}{1-x^2}=\frac{x+1}{x-1}-\frac{2x+5}{(x-1)(x+1)}=$ $=\frac{x^2+2x+1-2x-5}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-4}{(x-1)(x+1)}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.	1p 1p
	b) $\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}=\frac{x(x-2)+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-1)^2}{(x-2)(x+2)}$ $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}=\frac{2x-x-1}{2x(x+1)}=\frac{x-1}{2x(x+1)}$ $E(x)=\frac{(x-1)^2}{(x-2)(x+2)}\cdot\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}\cdot\frac{2x(x+1)}{x-1}=2x$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0;1;2\}$.	1p 1p 1p

3.	a) $p=\left[2\left(\sqrt{3}-2\right)-1\right]-\left[2\left(\sqrt{3}-3\right)-1\right]$	1p
	$p=2\sqrt{3}-4-1-2\sqrt{3}+6+1=2$ număr prim	1p
	b) $A\left(\frac{1}{2};0\right)$ este punctul de intersecție al graficului funcției *f* cu axa *Ox*	1p
	$B(0;1)$ este punctul de intersecție al graficului funcției *f* cu axa *Oy*	1p
	Aria triunghiului dreptunghic *AOB* este egală cu $\frac{OA\cdot OB}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 1}{2}=\frac{1}{4}u^2$	1p
4.	a) $\triangle ABC$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle B=\sphericalangle C=30^0$; $\sphericalangle BAM=120^0-90^0=30^0$	1p
	$\sphericalangle ABM=\sphericalangle BAM=30^0\Rightarrow\triangle BAMisoscel\Rightarrow MB=MA=6cm$	1p
	b) $\triangle AMCdreptunghic\Rightarrow MC=12cm; BC=18cm; CN=9cm$	1p
	$\triangle ANCdreptunghic\Rightarrow AN=3\sqrt{3}cm$ $BP\parallel AM\Rightarrow\triangle MCA\sim\triangle BCP\Rightarrow BP=9cm$	1p
	$\triangle ABCisoscel\Rightarrow BP=CQ=9cm$ $Suma=AN+BP+CQ=3\sqrt{3}+18=3\left(\sqrt{3}+6\right)cm$	1p
5.	a) $\frac{(AB+DM)\cdot AD}{2}=2\cdot\frac{MC\cdot DC}{2}$	1p
	Finalizare $DM=5cm$	1p
	b) $\triangle MCBdreptunghic\Rightarrow MB=2\sqrt{61}cm$	1p
	$MC\parallel AB\Rightarrow\triangle MQC\sim\triangle BQA\Rightarrow MQ=\frac{4\sqrt{61}}{5}cm$	1p
	$6,2<\frac{4\sqrt{61}}{5}<6,3\Rightarrow 961<976<992,25\left(Adevărat\right)$	1p
6.	a) $A_t=A_l+A_B\Rightarrow A_B=36\sqrt{3}cm^2$	1p
	$\triangle ABCechilateral\Rightarrow l^2=144\Rightarrow AB=12cm$	1p
	b) *M* – mijlocul lui AB și *N* – mijlocul lui AC *G* este centru de greutate în $\triangle SAB\Rightarrow\frac{SG}{GM}=\frac{2}{1}$ *O* este centru de greutate în $\triangle ABC\Rightarrow\frac{OC}{OM}=\frac{2}{1}$	1p
	$\left.\begin{array}{l}GO\parallel SC\\SC\subset(SAC)\end{array}\right\}\Rightarrow GO\parallel(SAC)\Rightarrow d\left(G,(SAC)\right)=d(O,(SAC))$	1p
	$\left.\begin{array}{l}OQ\perp SN\\SN\perp AC\\AC\perp ON\\SN,AC\subset(SAC)\end{array}\right\}\Rightarrow OQ\perp(SAC)\Rightarrow d\left(\mathrm{O},(SAC)\right)=OQ$	
	$A_l=\frac{P_B\cdot a_p}{2}\Rightarrow SN=4\sqrt{3}cm; ON=2\sqrt{3}cm$ $OQ=3cm$	1p

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2023-2024

Mai 2024

Matematica **Simulare**

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ŞI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Punctajul pentru răspunsurile corecte este multiplu de 4, deci număr par, punctajul pentru răspunsurile greșite este multiplu de 2 , deci tot număr par. Cum 65 este număr impar, rezultă că nu este posibil ca Alexandru să obțină 65 de puncte	**1p** **1p**
	b) $4x-2(20-x)=50$, unde x este numărul răspunsurilor corecte $x=15$	**2p** **1p**
2.	**a)** $E(x)=\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{x^2-x-2}{x^2+4}=$ $=\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x+1}{x+2}$, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.	**1p** **1p**
	b) $E(a)\in\mathbb{Z}$, $E(a)=\dfrac{a+1}{a+2}=1-\dfrac{1}{a+2}$ Cum $a+2\in\mathbb{Z}$ și $\dfrac{1}{a+2}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+2\,\vert\,1$, deci $a+2\in\{-1,1\}$ $a=-1$ care nu convine și $a=-3$ care convine	**1p** **1p** **1p**

3.	**a)** $f(3)=3-2=1$ $f(-3)=-5\Rightarrow f(3)-f(-3)=1-(-5)=6$	**1p** **1p**
	b) Punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele Ox și Oy sunt $A(2,0)$ și $B(0,-2)$ $A_{\Delta ABC}=\frac{AC\cdot OB}{2}=\frac{d(C,AB)\cdot AB}{2}$ Cum $AB=2\sqrt{2}$, obținem $d(C,AB)=\frac{4\cdot 2}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** Triunghiul ABC este isoscel, AM mediană, deci AM este înălțime și bisectoare. triunghiul AMC este dreptunghic în M, $\sin(\measuredangle CAM)=\frac{CM}{AC}$, de unde obținem $CM=5\sqrt{3}$ cm, deci $BC=10\sqrt{3}$ cm.	**1p** **1p**
	b) Triunghiul SMC este dreptunghic în M, $SC^2=MC^2+MS^2$, deci $SC=5\sqrt{7}$ cm $MT\perp CS$, unde $T\in SC$, deci $d(M,SC)=MT=\frac{SM\cdot MC}{SC}=\frac{10\sqrt{21}}{7}$ cm Cum $\frac{10\sqrt{21}}{7}<7\Leftrightarrow 10\sqrt{21}<49\Leftrightarrow 2100<2401$, obînem $MT<7$ cm.	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** Aria dreptunghiului $ABCD=AB\cdot BC=10\sqrt{2}\cdot 20=200\sqrt{2}$ cm^2.	**2p**
	b) ΔABE este dreptunghic în $B\Rightarrow AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=10\sqrt{3}$ cm $BE^2=EF\cdot AE\Rightarrow EF=\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm, deci $EF=\frac{1}{3}AE\Rightarrow F$ este centrul de greutate a triunghiului ABC BO este mediană în triunghiul ABC, unde $\{O\}=AC\cap BD$, deci $F\in BO$, de unde rezultă că punctele B, F și D sunt coliniare	**2p** **1p**
6.	**a)** $AB'=B'C=AC=6\sqrt{2}$ cm, deci triunghiul $AB'C$ este echilateral Punctul O este mijlocul segmentului $B'C$, deci AO este înălțime în triunghiul $AB'C$, de unde obținem $AO=3\sqrt{6}$ cm	**1p** **1p**
	b) $AO\perp B'C$, $BC'\perp B'C$, $AO\cap BC'=\{O\}$, deci $B'C\perp(ABC')$ $ME\perp AO$, unde $E\in AO$, $ME\perp B'C$ și cum $\{O\}=AO\cap B'C$, obținem $ME\perp(AB'C)$ Deci distanța de la punctul M la planul $(AB'C)$ este ME $\Delta AME\sim\Delta AOB\Rightarrow\frac{AM}{AO}=\frac{ME}{OB}$, de unde obținem $ME=\sqrt{3}$ cm.	**1p** **1p** **1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2023-2024

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă ar fi 6 bănci în clasă, atunci numărul de elevi ar fi $3\cdot 6+3=21$ Cum $4\cdot(6-2)+1=17\neq 21\Rightarrow$ nu este posibil ca în clasă să fie 6 bănci	**1p** **1p**

	b) $e=3\cdot b+3$, iar $e=4\cdot(b-2)+1$ unde b este numărul de bănci din clasă, iar e este numărul elevilor din clasă	**1p**
	$3b+3=4b-7\Rightarrow b=10$	**1p**
	$e=33$	**1p**
2.	**a)** $a=\frac{8}{3}-6+\frac{16}{3}=$	**1p**
	$a=8-6=2$	**1p**
	b) $b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$	**1p**
	$a\cdot b=2\sqrt{2}$	**1p**
	Cum $2<2\sqrt{2}<3\Rightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{2\sqrt{2}}<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{a\cdot b}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$	**1p**
3.	**a)** $E(1)=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)\cdot\frac{12}{4}=$	**1p**
	$=\frac{4}{6}\cdot 3=2.$	**1p**
	b) $E(x)=\left(\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}\right)\cdot\frac{(x+2)(x+3)}{4}=$	**1p**
	$=\frac{2}{x(x+2)}\cdot\frac{(x+2)(x+3)}{4}=\frac{x+3}{2x}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0\}$	**1p**
	$E(n)\in\mathbb{Z}\Rightarrow n\in\{-3,-1,1,3\}$ și cum $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-2,-1,0\}\Rightarrow n\in\{-3,1,3\}$	**1p**
4.	**a)** Fie $CF\perp AB, F\in AB\Rightarrow DCFA$ dreptunghi, deci $FB=4\text{cm}\Rightarrow AD=CF=3\text{cm}$	**1p**
	$\mathcal{P}_{ABCD}=AB+BC+CD+DA=16\text{cm}$	**1p**
	b) $CF\perp AB, EC\perp DC, AB\parallel DC\Rightarrow E,C,F$ coliniare	**1p**
	$AD\parallel EF\Rightarrow tg\left(AD,BE\right)=tg\left(EF,BE\right)=tgFEB$	**1p**
	$tgFEB=\frac{4}{5}$	**1p**
5.	**a)** $A_{ABCD}=AB^2=$	**1p**
	$=30^2=900\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\Delta DNM\sim\Delta BNA\Rightarrow\frac{DN}{NB}=\frac{DM}{AB}=\frac{AN}{NM}\Rightarrow NB=2DN$	**1p**
	Cum $DB=30\sqrt{2}\text{cm}\Rightarrow DN=10\sqrt{2}\text{cm}, NB=20\sqrt{2}\text{cm}\Rightarrow PN=4\sqrt{5}\text{cm}$ Fie $DE\perp AM, E\in AM\Rightarrow DE=\frac{DM\cdot AD}{AM}=6\sqrt{5}\text{cm}\Rightarrow NE=2\sqrt{5}\text{cm}$	**1p**
	Cum $\frac{PN}{NE}=2=\frac{NB}{DN}, \measuredangle DNE\equiv\measuredangle PNB\Rightarrow\Delta NED\sim\Delta NPB\Rightarrow\measuredangle NPB=90^\circ\Rightarrow BP\perp AM$	**1p**
6.	**a)** $MD\perp(ABCD)\Rightarrow MD\perp DB$	**1p**
	ΔMDB dreptunghic în $D\Rightarrow MB^2=MD^2+DB^2=88\Rightarrow MB=2\sqrt{22}\text{cm}$	**1p**
	b) Fie $MN\cap DC=\{P\}\Rightarrow(MNB)\cap(ABCD)=BP$	**1p**

	Cum $NC \parallel MD, NC = \frac{MD}{2} \Rightarrow NC$ este linie mijlocie în triunghiul $MPD \Rightarrow CP = 6cm$	
	$BC = CP \Rightarrow \Delta BCP$ dreptunghic isoscel, deci $\measuredangle DBP = \measuredangle DBC + \measuredangle CBP = 45° + 45° = 90°$	**1p**
	$MD \perp (ABCD), DB \perp BP, DB, BP \subset (ABCD) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} MB \perp BP \Rightarrow d(M, BP) = MB = 2\sqrt{22}$ cm	**1p**

Prezenta lucrare conține_____ pagini.

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: ……..
Prenumele:……..
……
Școala de proveniență: ……..
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: ……..
Județul: ……..

Nume și prenume asistent	Semnătura

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a

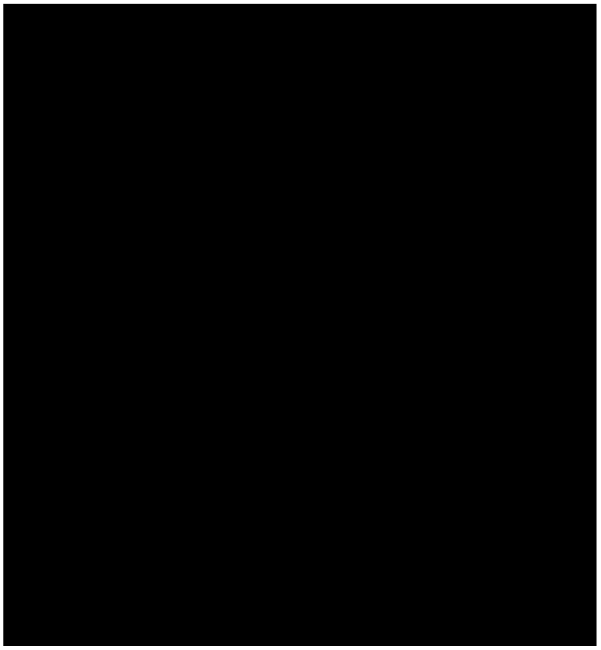
Mai 2024

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $44-4\cdot 4$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 28 **c)** 60 **d)** 160
5p	**2.** Numărul care reprezintă $\frac{3}{4}$ din 1600 este egal cu: **a)** 1200 **b)** 120 **c)** $\frac{6400}{3}$ **d)** 4800
5p	**3.** Într-un depozit sunt 2700 kg de fructe: mere, pere, gutui și struguri, după cum este prezentat în tabelul următor. mere — 900 kg pere — 500 kg gutui — 490 kg struguri — 810 kg Dintre fructele de mai sus, categoria care reprezintă 30% din cantitatea de fructe din acest depozit este: **a)** mere **b)** pere **c)** gutui **d)** struguri
5p	**4.** Suma numerelor întregi negative din intervalul $(-5;4]$ este egală cu: **a)** -10 **b)** -15 **c)** 0 **d)** 10

5p **5.** Se consideră numărul real $a=-\left(3+2\sqrt{2}\right)\left(3-2\sqrt{2}\right)$. Patru elevi au calculat a^{2024} și au scris rezultatele în tabelul următor.

Andrei	Valentina	Mihai	Răzvan
0	1	-1	2024

Dintre cei patru elevi, cel care a scris rezultatul corect este:
a) Andrei
b) Mihai
c) Valentina
d) Răzvan

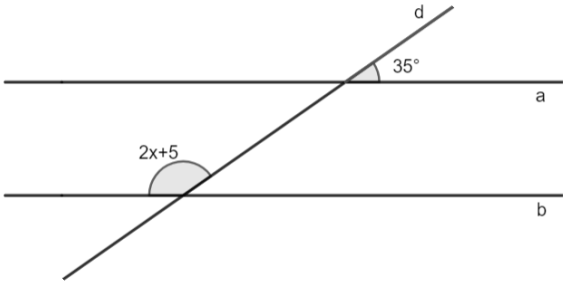
5p **6.** Un biciclist se deplasează cu viteza de 40 km pe oră. Andrei afirmă că biciclistul, păstrând viteza de deplasare, a parcurs 60 km în 60 de minute. Afirmația făcută de Andrei este:
a) Adevărată
b) Falsă

SUBIECTUL al II-lea

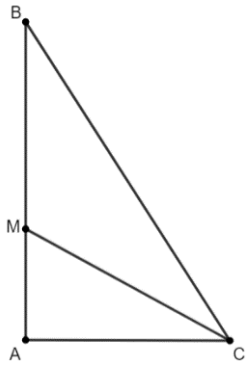
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

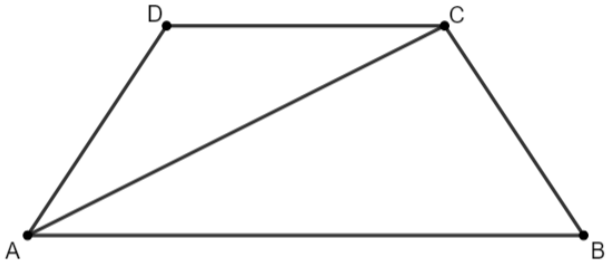
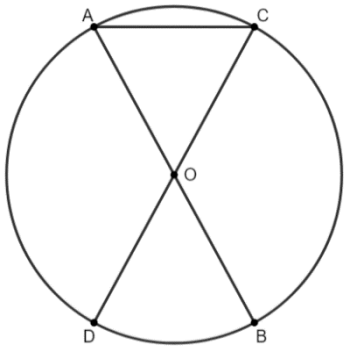
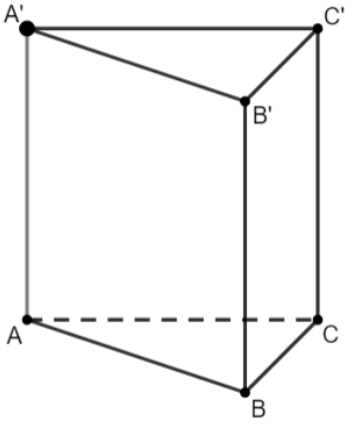
5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B și C, în această ordine. Punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul N este mijlocul segmentului BC. Știind că $MN=5\,\text{cm}$, lungimea segmentului AC este egală cu:
a) $2,5\,\text{cm}$
b) $5\,\text{cm}$
c) $10\,\text{cm}$
d) $20\,\text{cm}$

5p **2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt intersectate de secanta d, fiind evidențiate măsurile a două unghiuri de 35° și de $2x^o+5^o$. Valoarea lui x este de :
a) 70°
b) 25°
c) 15°
d) 75°



5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, cu măsura unghiului ABC de 30°. Bisectoarea unghiului ACB intersectează dreapta AB în punctul M și $AM=3\,\text{cm}$. Lungimea catetei AB este egală cu:
a) $3\,\text{cm}$
b) $6\,\text{cm}$
c) $9\,\text{cm}$
d) $12\,\text{cm}$



5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \| CD$. Diagonala AC este perpendiculară pe latura BC, $AB = 18$ cm, iar măsura unghiului ADC este egală cu 120°. Lungimea segmentului BC este egală cu: **a)** 6 cm **b)** 9 cm **c)** $6\sqrt{3}$ cm **d)** $9\sqrt{3}$ cm 
5p	**5.** În figura alăturată AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, măsura arcului mic AC este de 60°, iar lungimea coardei AC este egală cu 6 cm. Lungimea cercului de centru O și rază OA este egală cu: **a)** 6π cm **b)** 9π cm **c)** 12π cm **d)** 10π cm 
5p	**6.** În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$, de baze ABC și $A'B'C'$, cu muchiile AB și AA' egale. Știind că aria laterală a prismei reprezentate este egală cu 27 cm^2, volumul aceleiași prisme este egal cu: **a)** 3 cm^3 **b)** 9 cm^3 **c)** 27 cm^3 **d)** $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ cm^3 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Un test conține 20 de întrebări. Pentru fiecare răspuns corect se acordă 4 puncte. Pentru fiecare răspuns greșit se scad 2 puncte și nu se acordă puncte din oficiu. **(2p) a)** Este posibil ca Alexandru, după ce a parcurs integral testul și a răspuns la toate întrebările, să obțină 65 de puncte? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Maria a răspuns la toate întrebările testului și a obținut 50 de puncte. Determină numărul de întrebări din test la care Maria a răspuns corect.

5p

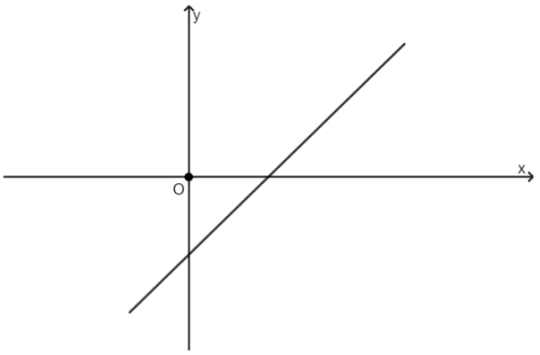
2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x-2}+\frac{x}{x+2}\right):\frac{x^2+4}{x^2-x-2}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

(2p) a) Arată că $E(x)=\frac{x+1}{x+2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,2\}$.

(3p) b) Determină numerele întregi a pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-2$.

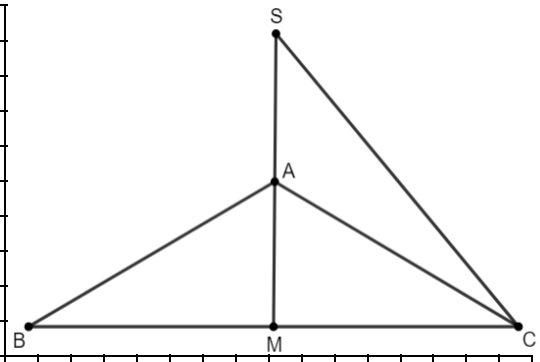
(2p) a) Arată că $f(3)-f(-3)=6$.



(3p) b) În sistemul de axe ortogonale xOy, determină distanța de la punctul $C(-2,0)$ la reprezentarea grafică a funcției f.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = AC = 10\,\text{cm}$ și $\sphericalangle BAC = 120^o$. Punctul M este mijlocul segmentului BC și punctul S este simetricul punctului M față de punctul A.

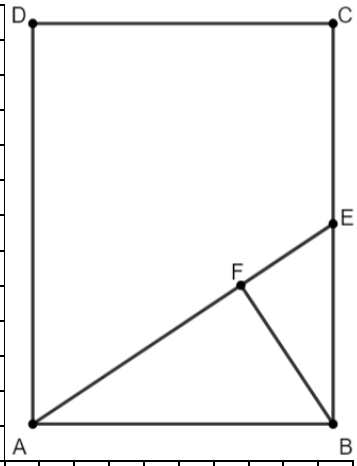
(2p) a) Arată că $BC = 10\sqrt{3}\,\text{cm}$.



(3p) b) Demonstrează că distanța de la punctul M la dreapta SC este mai mică decât 7 cm.

5p **5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 10\sqrt{2}$ cm și $BC = 20$ cm. Punctul E este mijlocul laturii BC și punctul F este situat pe segmentul AE, astfel încât $BF \perp AE$.

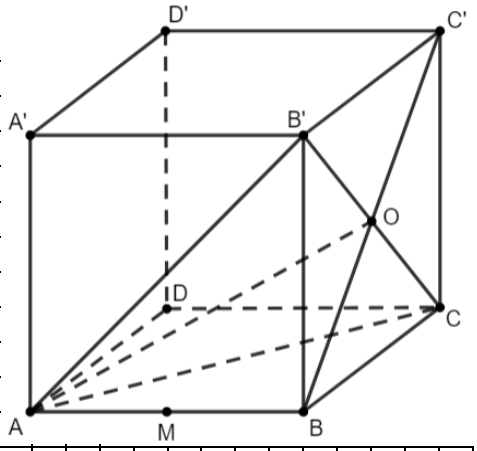
(2p) a) Arată că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu $200\sqrt{2}$ cm^2.



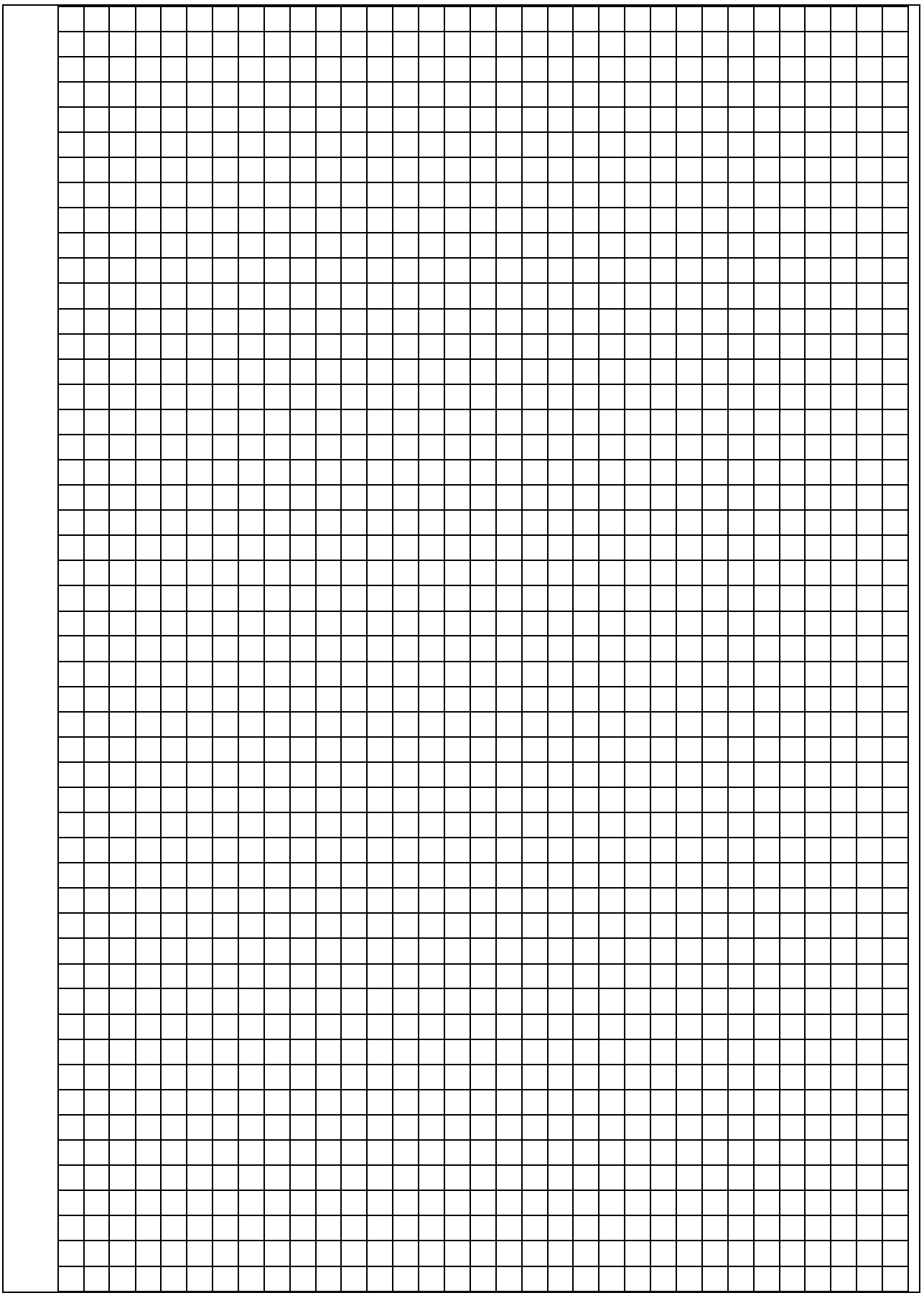
(3p) b) Demonstrează că punctele B, F și D sunt coliniare.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=6$ cm. Intersecția dreptelor BC' și $B'C$ este punctul O și punctul M este mijlocul segmentului AB.

(2p) a) Arată că $AO=3\sqrt{6}$ cm.



(3p) b) Determină distanța de la punctul M la planul $(AB'C)$.



Prezenta lucrare conține___pagini

SIMULARE JUDEȚEANĂ

EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2023 – 2024
aprilie 2024

Matematică
Varianta 1

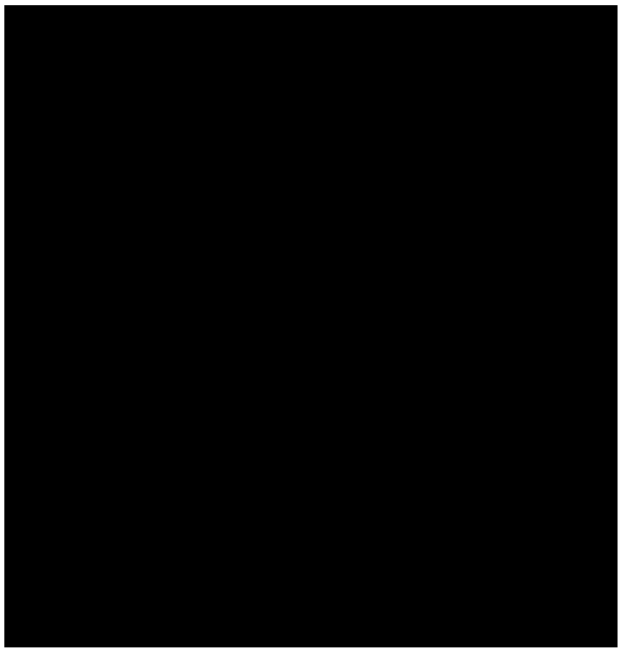
Numele:……..
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....……...……
Școala de proveniență: …….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….

Nume şi prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $2+(100:10-1):3$ este: **a)** 5; **b)** 3; **c)** 2; **d)** 10.
5p	**2.** Suma numerelor întregi din intervalul $(-3, 5]$ este: **a)** 10; **b)**12; **c)** 4; **d)** -12.
5p	**3.** Media geometrică a numerelor $a=\sqrt{5}+2$ și $b=\sqrt{5}-2$ este: **a)** 4; **b)** $\sqrt{5}$; **c)** 1; **d)** 2.
5p	**4.** Două numere naturale a și b sunt direct proporționale cu numerele 3 și 5, iar suma lor este egală cu 24. Produsul numerelor a și b este egal cu: **a)** 136; **b)** 120; **c)** 135; **d)** 132.

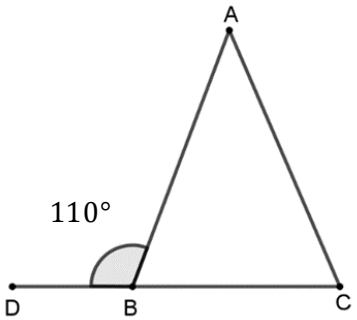
5p	**5.** Patru elevi, Maria, Cosmin, Vlad și Irina, rezolvă în mulțimea numerelor întregi următoarea ecuație: $(x+1)^2-\frac{7}{2}=\frac{1}{2}$. Soluția din mulțimea numerelor naturale a ecuației, obținută de fiecare elev, este trecută în tabelul următor: Elevul care a obținut rezultatul corect este: **a)** Maria; **b)** Cosmin; **c)** Vlad; **d)** Irina.

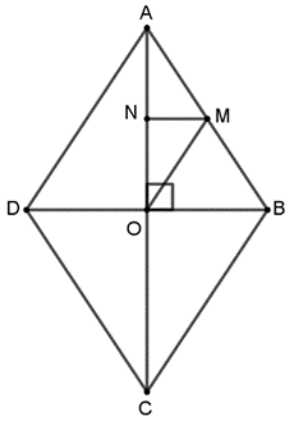
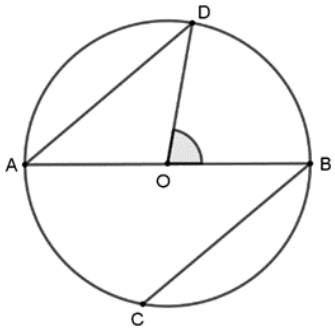
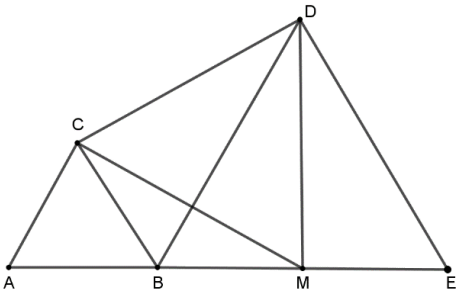
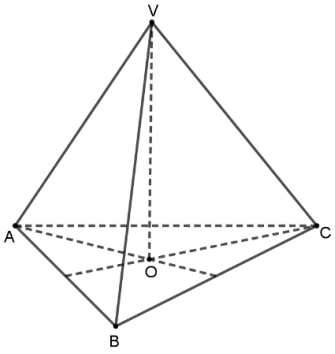
Maria	Cosmin	Vlad	Irina
1	2	4	3

5p	**6.** Dintre cei 25 de elevi ai unei clase, 14 elevi participă la cercul de literatură, iar 16 elevi participă la cercul de limbă engleză. Știind că fiecare elev participă la cel puțin un cerc, Ioana afirmă că 4 elevi au participat la ambele cercuri. Afirmația Ioanei este: **a)** adevărată; **b)** falsă.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată, punctele A, B și C sunt coliniare, în această ordine. Se știe că punctul M este mijlocul segmentului AB și N mijlocul lui BC. Dacă $AB=6$ cm și $NC=4$ cm, atunci lungimea segmentului MN este egală cu: **a)** 8 cm; **b)** 14 cm; **c)** 12 cm; **d)** 7 cm.
5p	**2.** În figura alăturată se consideră triunghiul isoscel ABC, cu $AB=AC$, punctul D este situat pe BC, iar $\sphericalangle ABD=110°$. Măsura unghiului $\sphericalangle BAC$ este:  **a)** 110°; **b)** 70°; **c)** 40°; **d)** 80°.

5p	**3.** Rombul $ABCD$ din figura alăturată are aria egală cu $64\ cm^2$, punctul M este mijlocul laturii AB, iar N mijlocul segmentului AO, unde $AC \cap BD = \{O\}$. Aria triunghiului MON este egală cu: **a)** $16\ cm^2$; **b)** $4\ cm^2$; **c)** $32\ cm^2$; **d)** $8\ cm^2$. 
5p	**4**. Punctele A, B, C și D aparțin cercului $\mathcal{C}(O, R)$, astfel încât A și B sunt puncte diametral opuse, $AD \parallel BC$ și măsura arcului mic $\widehat{BC}$ este egală cu $100°$. Măsura unghiului $\sphericalangle BOD$ este egală cu: **a)** $100°$; **b)** $40°$; **c)** $180°$; **d)** $80°$. 
5p	**5.** Fie triunghiurile ABC și BDE echilaterale, iar M mijlocul segmentului BE astfel încât $BM = AC = 4$ cm. Perimetrul triunghiului CMD este egal cu: **a)** $12\sqrt{3}$ cm; **b)** $4\sqrt{3}$ cm; **c)** 12 cm; **d)** 16 cm. 
5p	**6.** În figura alăturată se consideră $VABC$ piramidă triunghiulară regulată cu $AB = 12$ cm și $VA = 10$ cm. Aria laterală a piramidei $VABC$ este egală cu: **a)** $48\ cm^2$; **b)** $144\ cm^2$; **c)** $72\ cm^2$; **d)** $288\ cm^2$. 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Într-o clasă sunt 30 elevi. Numărul băieților reprezintă 40% din numărul elevilor clasei.

(2p) a) Este posibil ca în clasă să fie 18 fete? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Câți băieți ar trebui să plece din clasă astfel încât numărul băieților rămași să reprezinte 25% din numărul elevilor clasei?

5p

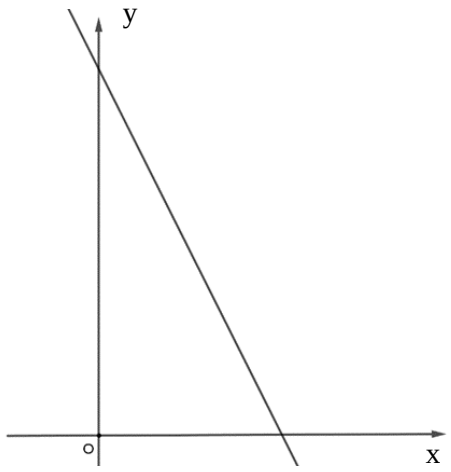
2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{4}{x-1}+\frac{5x-13}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right):\frac{7x-7}{x^2+2x+1}$, unde $x\in R\setminus\{-1,1\}$.

(2p) a) Arătați că $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

(3p) b) Arătați că numărul $A=[E(2)]^n+[E(2)]^{n+1}+[E(2)]^{n+2}$ este multiplu de 39, pentru orice număr natural nenul n.

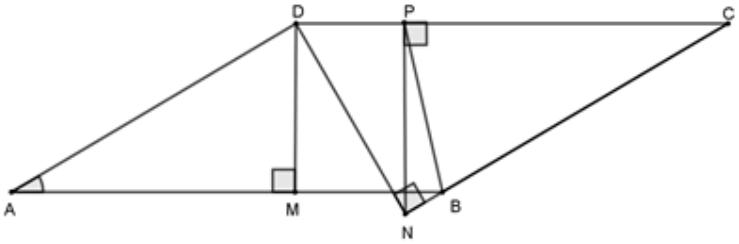
5p **3.** Fie funcția $f: R \to R, f(x) = 8 - 2x$.

(2p) a) Arătați că $f(2) + f(4) = 4$.



(3p) b) Știind că A și B sunt punctele de intersecție ale graficului funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy, determinați tangenta unghiului format de graficul funcției f cu axa Ox.

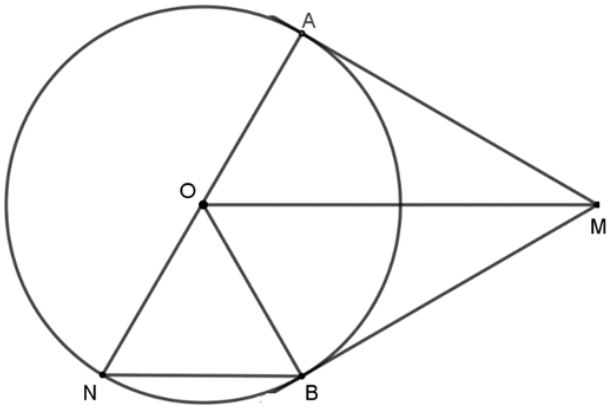
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$ cu $AD = 12$ cm, $AB = 16$ cm și $DM = 6$ cm, unde $DM \perp AB, M \in AB$.



(2p) a) Arătați că aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu $96\ cm^2$.

(3p) b) Dacă $DN \perp BC, N \in BC$ și $NP \perp DC, P \in DC$ arătați că semidreapta BP este bisectoarea $\sphericalangle ABC$.

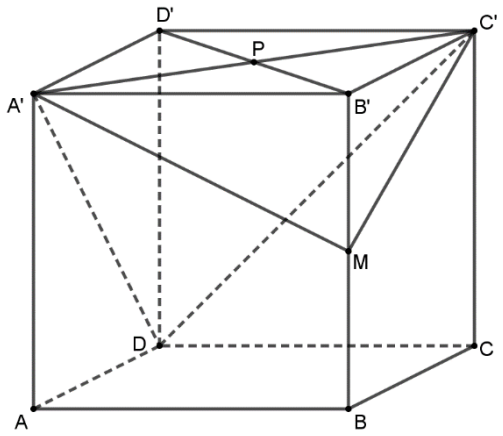
5p **5.** Figura alăturată reprezintă schița unui parc în formă de cerc cu centrul în punctul O. În punctele A și B de pe cerc se găsesc două porți de intrare în parc. Din punctul M, exterior parcului se construiesc două alei până la cele două porți. Dreptele MA și MB sunt tangente la cerc, $MA = 15\sqrt{3}$ dam, iar $MO = 30$ dam.



(2p) a) Arătați că lungimea cercului este egală cu 30π dam.

(3p) b) Știind că A și N sunt puncte diametral opuse, demonstrați că aria patrulaterului $AMBN$ este mai mare decât $450\ dam^2$.

5p **6.** În figura alăturată se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei $AB = 4$ cm, punctul M mijlocul muchiei BB' și $A'C' \cap B'D' = \{P\}$.



(2p) a) Arătați că $DM = 6$ cm.

(3p) b) Demonstrați că planele $(MA'C')$ și $(DA'C')$ sunt perpendiculare.

Prezenta lucrare conține____pagini

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2023-2024

Matematică

Numele: .....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele: .....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $20:10\cdot 2$ este egal cu: **a)** 1 **b)** 4 **c)** 10 **d)** 20
5p	**2.** Numărul care reprezintă 20% din 120 este egal cu: **a)** 20 **b)** 24 **c)** 30 **d)** 100
5p	**3.** Produsul tuturor numerelor întregi din intervalul $(-2,3]$ este egal cu: **a)** -6 **b)** 0 **c)** 6 **d)** 12
5p	**4.** Mulțimea valorilor întregi ale lui x pentru care $x^2+1\leq 5$ este: **a)** $\{0,1\}$ **b)** $\{-1,0,1\}$ **c)** $\{0,1,2\}$ **d)** $\{-2,-1,0,1,2\}$

5p **5.** Patru elevi, Adrian, Bogdan, Ciprian și Doru determină media aritmetică a numerelor reale $x=\sqrt{3}\cdot\left(3-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ și $y=3\sqrt{3}+\sqrt{2}$. Rezultatele obținute de ei sunt trecute în tabelul următor:

Adrian	$-3\sqrt{3}$
Bogdan	0
Ciprian	5
Doru	$3\sqrt{3}$

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică este:

a) Adrian
b) Bogdan
c) Ciprian
d) Doru

5p **6.** Elena are 18 ani, iar Mihai are 34 de ani. Afirmația: „În urmă cu doi ani, vârsta Elenei era jumătate din vârsta lui Mihai.” este:

a) adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, punctele A,B,M,C sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AM=2BM$, $MB=3MC$ și $AB=3\text{cm}$. Lungimea segmentului AC este egală cu:

a) 3cm

b) 6cm

c) 7cm

d) 14cm

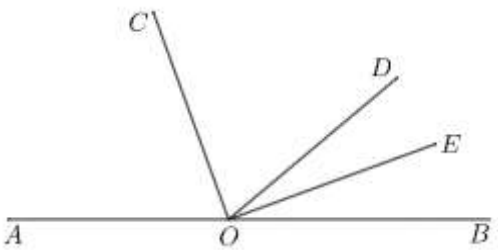
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A,O,B, iar punctele C,D,E sunt situate de aceeași parte a dreptei AB, astfel încât semidreapta OE este bisectoarea unghiului DOB. Dreptele OC și OE sunt perpendiculare, iar măsura unghiului AOC este $70°$. Măsura unghiului DOE este egală cu:

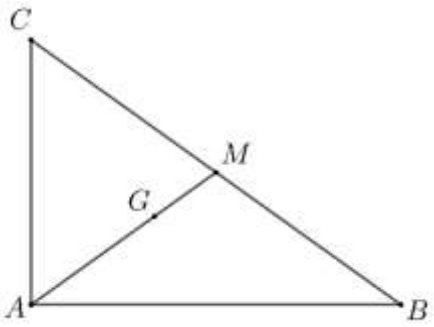
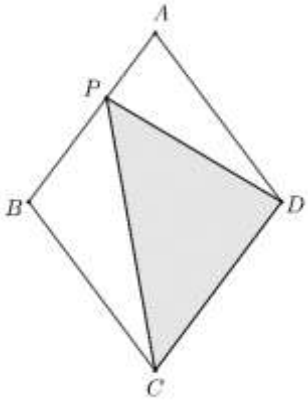
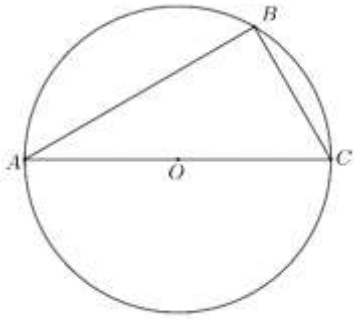
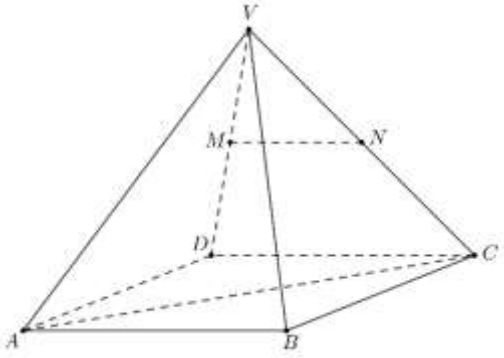
a) 20°

b) 30°

c) 50°

d) 70°



5p	**3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, cu ipotenuza $BC=12\sqrt{3}\,\text{cm}$. Dacă punctul M este mijlocul segmentului BC, iar punctul G este centrul de greutate al triunghiului ABC, atunci lungimea segmentului AG este: **a)** $2\sqrt{3}\,\text{cm}$ **b)** $3\sqrt{3}\,\text{cm}$ **c)** $4\sqrt{3}\,\text{cm}$ **d)** $6\sqrt{3}\,\text{cm}$ 
5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat rombul $ABCD$, iar punctul P este situat pe latura AB. Dacă aria rombului este egală cu $48\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, atunci aria triunghiului CDP este egală cu: **a)** $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **b)** $8\sqrt{6}\,\text{cm}^2$ **c)** $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **d)** $24\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 
5p	**5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centru O, diametrul AC, iar punctul B este situat pe cerc astfel încât măsura arcului mic AB este $120°$. Măsura unghiului BAC este egală cu: **a)** $15°$ **b)** $30°$ **c)** $60°$ **d)** $120°$ 
5p	**6.** În figura alăturată este reprezentată o piramidă regulată $VABCD$, cu baza pătratul $ABCD$. Dacă punctul M este mijlocul muchiei VD, iar punctul N este mijlocul muchiei VC, atunci măsura unghiului determinat de dreptele MN și AC este egală cu: **a)** $45°$ **b)** $60°$ **c)** $90°$ **d)** $135°$ 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 de puncte)**

5p **1.** Dacă elevii unei clase s-ar așeza câte 3 în bancă, ar rămâne 3 elevi în picioare, iar dacă s-ar așeza câte 4 elevi în bancă, ar rămâne o bancă liberă și o bancă cu un elev.

(2p) a) Este posibil ca în clasă să fie 6 bănci? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul elevilor din clasă.

5p

2. Se consideră numerele $a=\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{8}}+\frac{4}{\sqrt{18}}\right)\cdot\sqrt{32}$ și $b=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$.

(2p) a) Arată că numărul $a=2$.

(3p) b) Demonstrează că $\frac{1}{a\cdot b}\in\left(\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)$.

5p

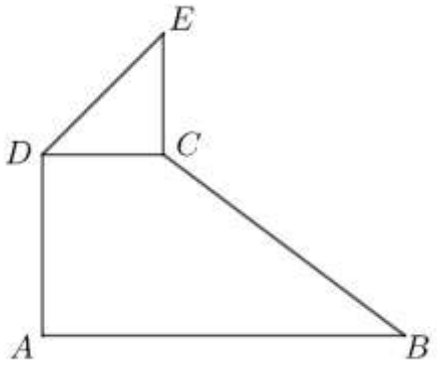
3. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+2}\right)\cdot\frac{x^2+5x+6}{4}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0\}$.

(2p) a) Arată că $E(1)=2$.

(3p) b) Determină valorile întregi ale lui n pentru care $E(n)$ este număr întreg.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \| CD$, $AB = 6\,\text{cm}$, $CD = 2\,\text{cm}$, $BC = 5\,\text{cm}$, iar triunghiul DCE este dreptunghic isoscel cu $DC = EC$.

(2p) a) Arată că perimetrul trapezului este egal cu 16 cm.

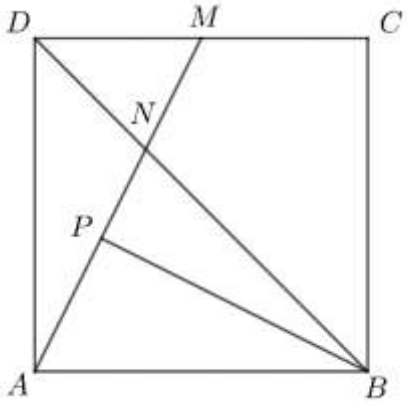


(3p) b) Calculează tangenta unghiului format de dreptele AD și BE.

5p

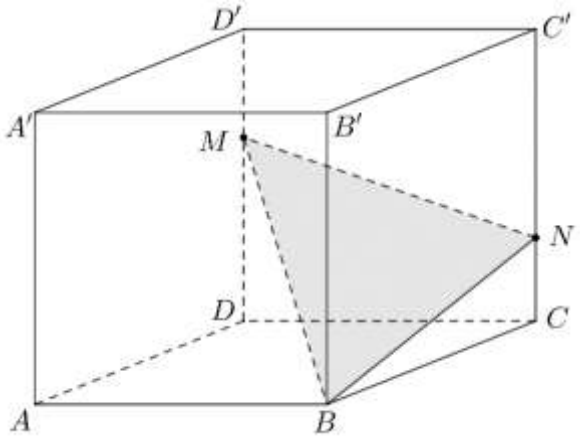
5. În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, cu $AB = 30\,\text{cm}$, iar punctul M este mijlocul lui CD. Dreptele AM și BD se intersectează în punctul N, iar punctul P este pe segmentul AN astfel încât $BN = PN\sqrt{10}$.

(2p) a) Calculează aria pătratului $ABCD$.



(3p) b) Arată că $BP \perp AM$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, iar $AB = 6\text{cm}$. Punctul M se află pe segmentul DD', astfel încât $DM = 4\text{cm}$, iar punctul N se află pe segmentul CC', astfel încât $CN = 2\text{cm}$.



(2p) a) Arată că $MB = 2\sqrt{22}\,\text{cm}$.

(3p) b) Calculează distanța de la punctul M la dreapta de intersecție a planelor (MBN) și $(ABCD)$.

Inspectoratul Școlar Județean Neamț

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele: .....

Inițiala prenumelui tatălui: .....

Prenumele: .....

Școala de proveniență: .....

Centrul de examen: .....

Localitatea: .....

Județul: .....

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2023 - 2024

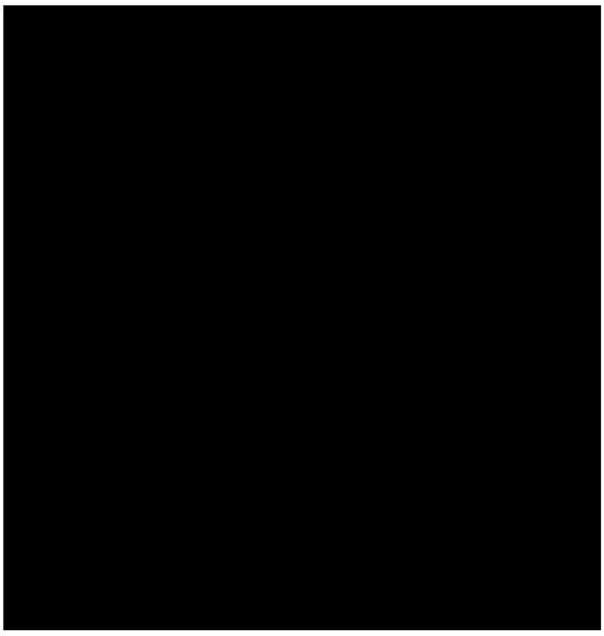
Matematica

Nume și prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I

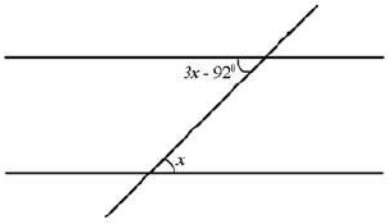
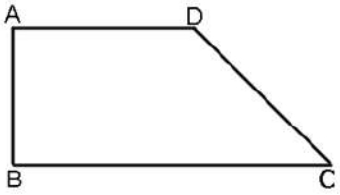
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. ***(30 de puncte)***

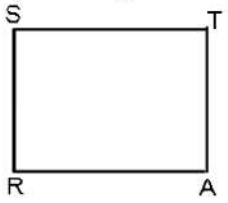
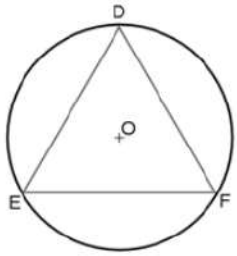
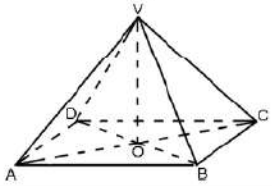
5p	1. Rezultatul calculului $20-5:5$ este : a) 3 b) 15 c) 21 d) 19
5p	2. Dacă 15 muncitori realizează o lucrare în 3 zile, atunci 5 muncitori vor realiza aceeași lucrare în: a) 45 zile b) 9 zile c) 1 zi d) 10 zile
5p	3. Suma divizorilor proprii naturali ai numărului 21 este: a) 0 b) 10 c) 32 d) -32
5p	4. Se consideră numărul $x=\left(7-5\sqrt{2}\right)\left(7+5\sqrt{2}\right)$. Calculând $\left(-\frac{5}{3}\right)^{x}$ obținem: a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{3}{5}$

	c) $-\frac{3}{5}$ d) $-\frac{5}{3}$
5p	5. Dacă suma a două numere reale este 10 și diferența lor este 4, atunci produsul lor este: a) 9 b) 16 c) 24 d) 21
5p	6. Andrei afirmă că "$x^2+4=(x-2)(x+2)$". Afirmația acestuia este: a) Adevărată b) Falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. ***(30 de puncte)***

5p	1. În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare *A, B, C* și *D,* în această ordine. Punctul *C* este simetricul punctului *A* față de punctul *B* și punctul *D* este simetricul punctului *B* față de punctul *C*. Dacă *BD* = 8 cm, atunci lungimea segmentului *AD* este egală cu: a) 6 cm b) 8 cm c) 12 cm d) 16 cm
5p	2. În figura alăturată dreptele *a* și *b* sunt paralele. Valoarea lui *x* este egală cu: a) 92^0 b) 46^0 c) 23^0 d) 41^0 
5p	3. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic *ABCD,* cu $AD\|\|BC$ și $\sphericalangle DCB = 45^0$. Dacă linia mijlocie a trapezului are lungimea egală cu 11 cm și baza mică are lungimea egală cu 8 cm, atunci aria trapezului este egală cu: a) 42 cm^2 b) 22 cm^2 c) 44 cm^2 d) 66 cm^2 

5p	4. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul *STAR*. Dacă perimetrul dreptunghiului este egal cu 28 dm și lungimea diagonalei este egală cu 10 dm, atunci perimetrul triunghiului *RAT* este egal cu: a) 24 cm b) 38 dm c) 24 dm d) 18 dm 
5p	5. În figura alăturată este reprezentat un triunghi echilateral *DEF* cu latura de 9 cm. Dacă punctul *O* este centrul cercului circumscris triunghiului, atunci raza cercului este egală cu: a) 3 cm b) $9\sqrt{3}$ cm c) $3\sqrt{3}$ cm d) $\frac{9\sqrt{3}}{6}$ cm 
5p	6. În figura alăturată este reprezentată o piramidă patrulateră regulată *VABCD* cu înălțimea egală cu $6\sqrt{2}$ cm. Dacă ΔVOA este isoscel, atunci volumul piramidei este egal cu: a) 288 cm^3 b) $72\sqrt{2}$ cm^3 c) $288\sqrt{2}$ cm^3 d) 864 cm^3 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. ***(30 de puncte)***

5p	1. Raportul dintre numărul de elevi din două grupe ale unei școli este $\frac{4}{5}$. Transferând 7 elevi din grupa a doua în prima grupă, numărul elevilor din prima grupă devine cu 6 mai mare decât numărul elevilor din grupa a doua. (2p) a) Este posibil ca în prima grupă să fie 30 elevi?

(3p) b) Să se afle câți elevi erau inițial în fiecare grupă.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x+2}+\frac{1}{x^2-4}\right)\left(\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+5}{1-x^2}\right):\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2x}\right)$, unde $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0;1;2\}$.

(2p) a) Arătați că $\frac{x+1}{x-1}+\frac{2x+5}{1-x^2}=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x+1)}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$.

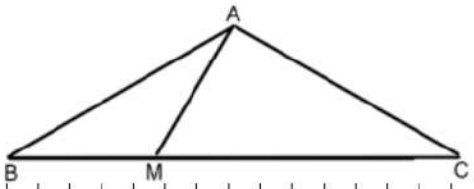
(3p) b) Arătați că $E(x)=2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;-1;0;1;2\}$.

5p 3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x-1$.

(2p) a) Arătați că $p=f\left(\sqrt{3}-2\right)-f\left(\sqrt{3}-3\right)$ este număr prim.

(3p) b) Calculați aria triunghiului determinat de graficul funcției și axele de coordonate.

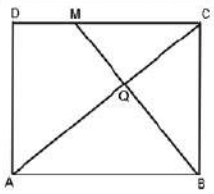
5p 4. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $\sphericalangle BAC = 120^0$. Perpendiculara în A pe AC intersectează latura BC în punctul M și $BM = 6cm$.



(2p) a) Arătați că $AM = 6cm$.

(3p) b) Calculați suma lungimilor înălțimilor AN, BP și CQ, $(N \in BC, P \in AC, Q \in AB)$ ale triunghiului ABC.

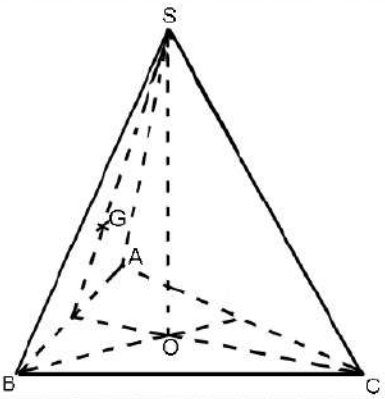
5p 5. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul *ABCD* cu *AB=15cm* și *AD=12cm*. Pe latura *CD* se ia un punct *M* astfel încât aria trapezului *DMBA* să fie dublul ariei triunghiului *MBC*.



(2p) a) Arătați că *DM = 5cm*.

(3p) b) Dacă *MB ∩ AC = {Q}*, arătați că *MQ ∈ (6,2; 6,3)*.

5p 6. În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată $SABC$ cu aria totală egală cu $108\sqrt{3}\,cm^2$ și aria laterală egală cu $72\sqrt{3}\,cm^2$. Punctul G este centrul de greutate al ΔSAB și O este centrul de greutate al ΔABC.



(2p) a) Arătați că $AB = 12\ cm$.

(3p) b) Calculați distanța de la punctul G la planul (SAC).

Evaluarea națională pentru absolvenții clasei a VIII-a
Decembrie 2024
Matematică
Barem de evaluare și de notare

Simulare județeană

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:
- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea:
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	**a)** $\overline{bc} = 41 \Rightarrow 41 \cdot 21 + 40 = 901$	**1p**
	$\overline{a41} \neq 901 \Rightarrow \overline{bc}$ nu poate fi 41	**1p**
	b) $\overline{abc} = \overline{bc} \cdot 21 + 40,\ \overline{bc} > 40$	**1p**
	$100a + \overline{bc} = \overline{bc} \cdot 21 + 40 \Leftrightarrow 100a = \overline{bc} \cdot 20 + 40 \Leftrightarrow 5a = \overline{bc} + 2$	**1p**
	$\overline{bc} > 40 \Rightarrow 5a > 42 \Rightarrow a = 9 \Rightarrow \overline{abc} = 943$	**1p**
2.	a) $-3 < 2x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 < 2x \leq 4$	**1p**
	$-1 < x \leq 2 \Leftrightarrow A = (-1; 2]$	**1p**
	b) $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} - \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{12}} = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$	**1p**
	$\left\|x - \frac{1}{2}\right\| = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1\ sau\ x = 0$	**1p**
	$-1 < 1 \leq 2 \Rightarrow 1 \in A; -1 < 0 \leq 2 \Rightarrow 0 \in A$	**1p**
3.	**a)** $(5x + 2)^2 = 25x^2 + 20x + 4, (4x - 3)^2 = 16x^2 - 24x + 9, (3x + 4)(3x - 4) = 9x^2 - 16$	**1p**
	$E(x) = 25x^2 + 20x + 4 - 16x^2 + 24x - 9 - 9x^2 + 16 - 48x + 9 = -4x + 20$	**1p**

	b) $\sqrt{[E(a)]^2} \leq 12 \Leftrightarrow |-4a+20| \leq 12$ $-12 \leq -4a + 20 \leq 12 \Leftrightarrow -32 \leq -4a \leq -8$ $2 \leq a \leq 8$, a este număr întreg $\Rightarrow a \in \{2;3;4;5;6;7;8\}$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** ΔABC echilateral $\Rightarrow \sphericalangle CAB = 60° \Rightarrow \sphericalangle DAC = 30°$ În ΔDAC, $\sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle DAC = 30° \Rightarrow AC = 2DC = 10 \Rightarrow AB = 10$	**1p** **1p**
	b) În ΔDAC, $\sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle DAC = 30° \Rightarrow \sphericalangle DCA = 60°$ $\sphericalangle DCA \equiv \sphericalangle ACB \Rightarrow$ CA bisectoarea $\sphericalangle DCB$ În ΔDCB, CA bisectoare, BE bisectoare, CA∩BE={I}, deci I este centrul cercului înscris în ΔDCB	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** ABCD paralelogram $\Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 2BD \Rightarrow BO = \sqrt{3}$ cm din RTP în $\Delta ABO \Rightarrow \sphericalangle ABD = 90° \Rightarrow$ din teorema lui Pitagora $AD = \sqrt{21}$ cm	**1p** **1p**
	b) $CE \parallel DB$, $DC \parallel BE$, $\sphericalangle DBE = 90° \Rightarrow$ DBEC dreptunghi $\Rightarrow CE = 2\sqrt{3}$ cm În ΔCAE, $\sphericalangle CEA = 90°$, $CE = \frac{AC}{2} \Rightarrow \sphericalangle CAB = 30° \Rightarrow \sphericalangle ACE = 60°$ $CE = OC, \sphericalangle OCE = 60° \Rightarrow \Delta OCE$ echilateral	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** MN linie mijlocie în $\Delta ABC \Rightarrow MN \parallel AC \Rightarrow \sphericalangle(MN;VA) = \sphericalangle(AC;VA) = \sphericalangle VAC$ $AC = l\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \Rightarrow AC = VA = VC \Longrightarrow \Delta VAC$ echilateral $\Rightarrow \sphericalangle VAC = 60^o$	**1p** **1p**
	b) E centru de greutate ΔVAB și VN mediană $\Rightarrow \frac{VE}{VN} = \frac{2}{3}$, F centru de greutate ΔVBC și VM mediană $\Rightarrow \frac{VF}{VM} = \frac{2}{3}$ În ΔVMN avem $\frac{VE}{VN} = \frac{VF}{VM} \Rightarrow EF \parallel MN$ Din $EF \parallel MN$ și $MN \parallel AC \Rightarrow EF \parallel AC$; $AC \subset (VAC)$, $EF \not\subset (VAC) \Rightarrow EF \parallel (VAC)$	**1p** **1p** **1p**

Prezenta lucrare conține_____ pagini

SIMULARE JUDEȚEANĂ

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Decembrie 2024

Matematică

Numele: .....

.....

Prenumele :.....

.....

Școala de proveniență: .....

.....

Centrul de examen:.....

Localitatea: .....

Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

Scanat cu CamScanner

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $7-7:7+7:7\cdot 7$ este egal cu: **a)** 7 **b)** 14 **c)** -7 **d)** 13
5p	**2.** Dacă 6 muncitori pot termina o lucrare în 8 ore, atunci 12 muncitori pot termina aceeași lucrare în: **a)** 16 ore **b)** 4 ore **c)** 8 ore **d)** 12 ore
5p	**3.** Jumătatea numărului 2^{2024} este egală cu: **a)** 2^{1012} **b)** 1^{2024} **c)** 2^{2023} **d)** 2^{2022}
5p	**4.** Dacă $A=\{x\in \boldsymbol{R}\mid -3<x\leq 5\}$ și $B=\{x\in \boldsymbol{R}\mid x\leq 2\}$, atunci $A\cap B$ este egală cu: **a)** $[2;5]$ **b)** $(-\infty;5]$ **c)** $(-3;2]$ **d)** $(-3;+\infty)$

Scanat cu CamScanner

5p **5.** Patru elevi, Ioana, Mihai, Maria și Rareș calculează media aritmetică a numerelor: $a = \sqrt{50}$ și $b = \left|5\sqrt{2} - 4\sqrt{5}\right|$. Răspunsurile date de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Ioana	Mihai	Maria	Rareș
$5\sqrt{2}$	$4\sqrt{5}$	$5\sqrt{2} - 2\sqrt{5}$	$2\sqrt{5}$

Dintre cei patru copii, cel care a calculat corect media aritmetică a celor două numere este:

a) Ioana
b) Mihai
c) Maria
d) Rareș

5p **6.** Daria afirmă că: „ Numărul $-3,(2)$ aparține intervalului $\left(-\frac{7}{2}; -\frac{16}{5}\right)$”. Afirmația Dariei este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

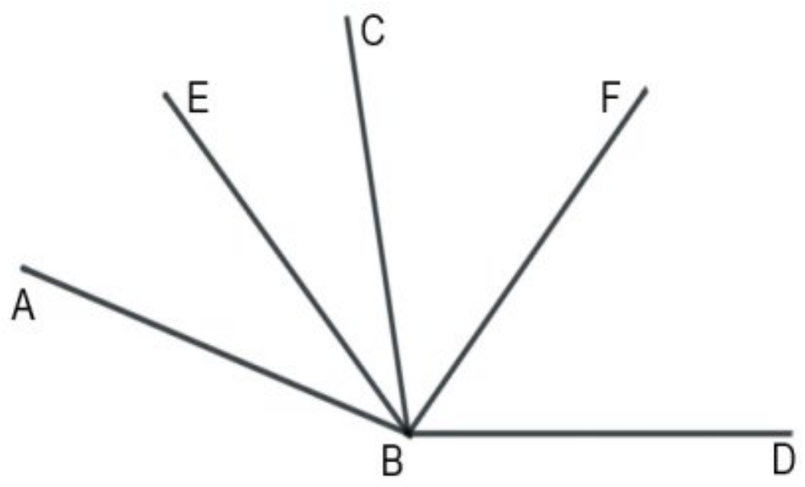
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C, D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = 2BC$, $BC = 3CD$ și $AC = 18$ cm. Lungimea segmentului BD este egală cu:

a) 2 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm

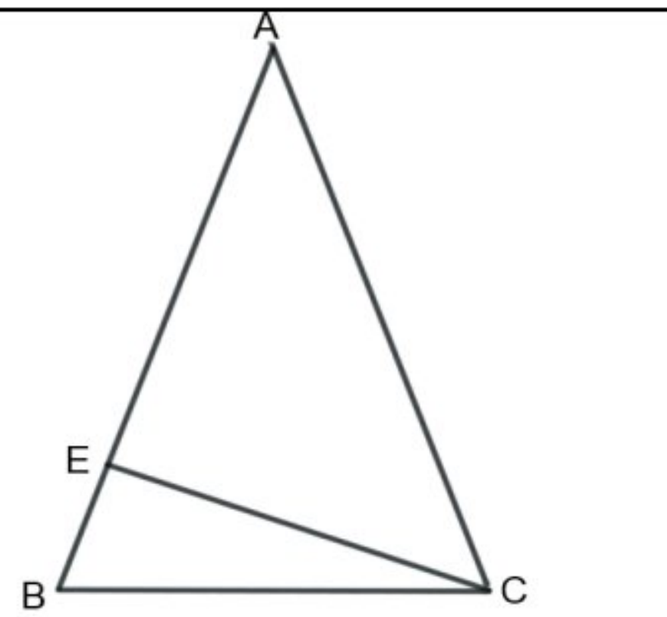
5p **2.** În figura alăturată, sunt reprezentate unghiurile adiacente ABC și CBD. Dacă BE este bisectoarea unghiului ABC, BF este bisectoarea unghiului CBD, măsura unghiului ABE este egală cu 30°, iar măsura unghiului EBF este egală cu 80°, atunci măsura unghiului EBD este egală cu:

a) 160^0
b) 130^0
c) 100^0
d) 60^0

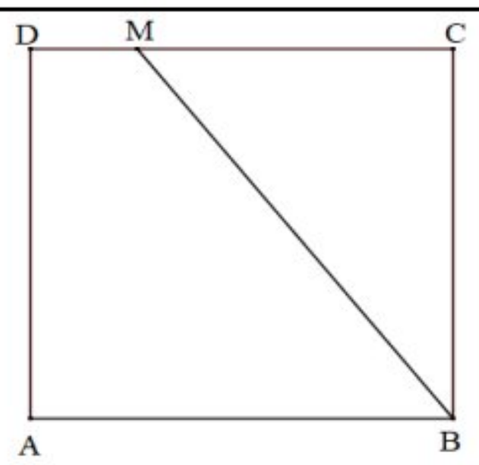
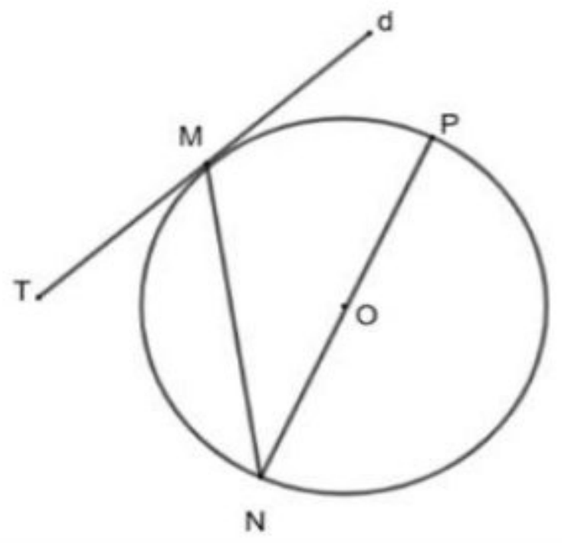
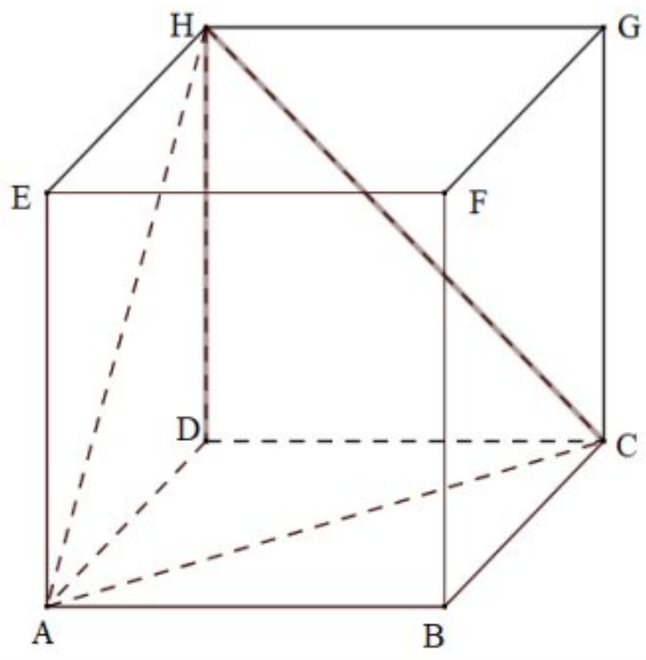


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC isoscel de bază BC și CE este înălțimea din C. Dacă măsura unghiului ECB este de 20°, atunci măsura unghiului BAC este egală cu:

a) 70°
b) 60°
c) 40°
d) 50°



Scanat cu CamScanner

5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul ABCD cu lungimea laturii de 8 cm și punctul M aparține segmentului CD astfel încât DM = 2 cm. Distanța de la punctul A la dreapta BM este egală cu: **a)** 6,4 cm **b)** 8 cm **c)** 8,2 cm **d)** 10 cm 
5p	**5.** În figura alăturată dreapta d este tangentă cercului cu centrul O în punctul M. Dacă măsura $\sphericalangle MNP = 35^0$, unghiul $\sphericalangle TMN$ are măsura: **a)** 60^0 **b)** 55^0 **c)** 65^0 **d)** 90^0 
5p	**6.** În figura alăturată este reprezentat cubul ABCDEFGH. Dacă perimetrul triunghiului ACH este $24\sqrt{2}$ cm, atunci suma tuturor muchiilor cubului ABCDEFGH este egală cu: **a)** $32\sqrt{2}$ cm **b)** 96 cm **c)** $96\sqrt{2}$ cm **d)** 48 cm 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p **1.** Dacă împărțim numărul $\overline{abc}$ la numărul $\overline{bc}$ se obține câtul 21 și restul 40.

(2p) a) Este posibil ca numărul natural $\overline{bc}$ să fie 41? Justificați răspunsul dat.

Scanat cu CamScanner

(3p) b) Determină numărul natural $\overline{abc}$ care îndeplinește condiția din enunț.

5p

2. Se consideră mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -1 < \frac{2x-1}{3} \leq 1\right\}$.

(2p) ***a)*** Arată că mulțimea A este egală cu intervalul $(-1; 2]$.

Scanat cu CamScanner

(3p) ***b)*** Arată că soluțiile ecuației $|x+a|=\frac{1}{2}$ aparțin mulțimii A știind că

$a=\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4}}{\sqrt{12}}$.

5p

3. Se consideră expresia

$$E(x)=(5x+2)^2-(4x-3)^2-(3x+4)(3x-4)-3(16x-3)$$

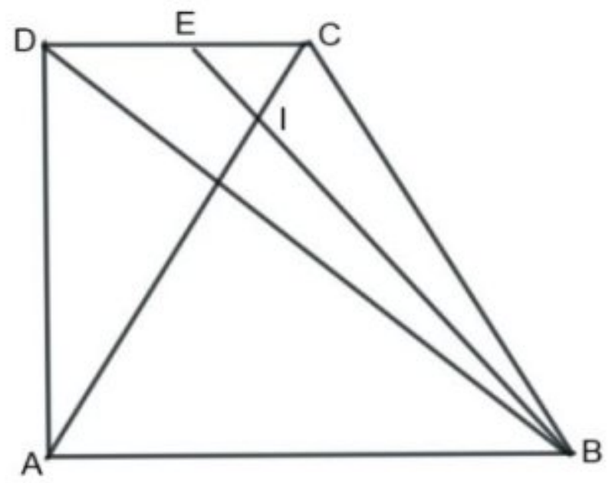
(2p) a) Arată că $E(x)=-4x+20$

(3p) b) Determină valorile numărului întreg a pentru care $\sqrt{[E(a)]^2}\leq 12$.

Scanat cu CamScanner

5p

4. În figura alăturată este reprezentat trapezul ABCD dreptunghic de baze AB și CD astfel încât triunghiul ABC este echilateral și DC este egal cu 5 cm.



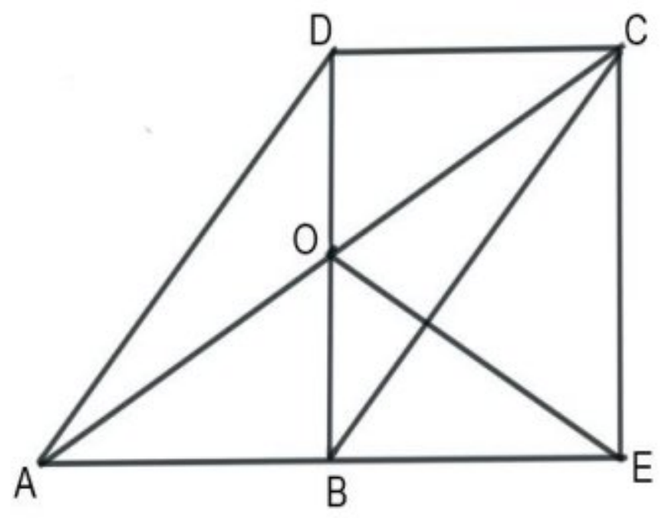
(2p) ***a)*** Arată că AB este egal cu 10 cm.

3p) ***b)*** Dacă BE este bisectoarea unghiului DBC și intersectează AC în punctul I, arată că I este centrul cercului înscris în triunghiul DCB.

Scanat cu CamScanner

5p

5. În figura alăturată este reprezentat paralelogramul ABCD cu AB = 3 cm și $AC = 2BD = 4\sqrt{3}$ cm.

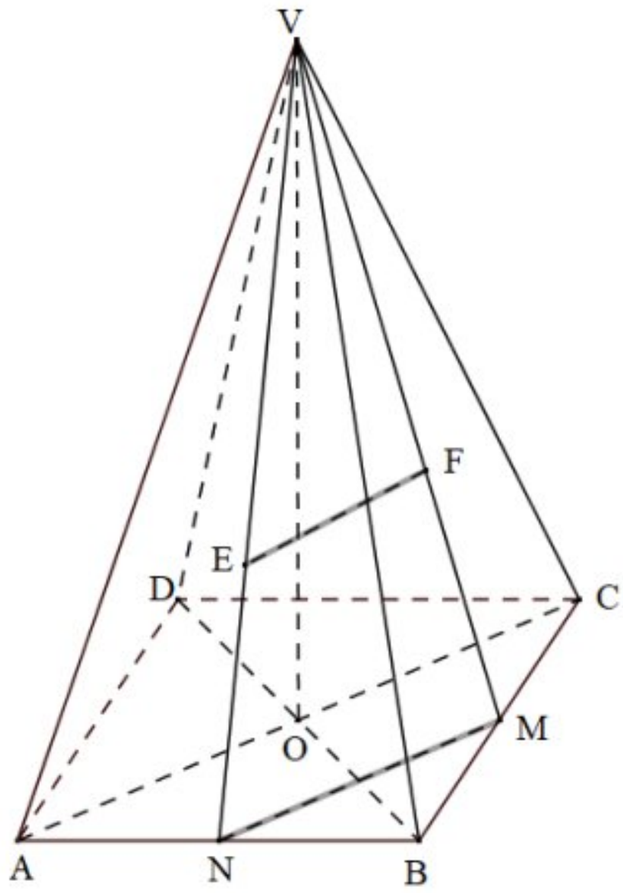


(2p) ***a)*** Arată că AD este egal cu $\sqrt{21}$ cm.

(3p) ***b)*** Paralela dusă prin C la DB intersectează AB în punctul E. Arată că triunghiul COE este echilateral, știind că O este punctul de intersecție al diagonalelor AC și BD.

Scanat cu CamScanner

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată VABCD cu AB = 12 cm și VA = $12\sqrt{2}$ cm. Punctele M și N sunt mijloacele laturilor BC și respectiv AB.



(2p) a) Arată că unghiul format de dreptele MN și VA are măsura egală cu 60°.

(3p) b) Dacă E și F sunt centrele de greutate ale triunghiurilor VAB și VBC, arată că dreapta EF este paralelă cu planul (VAC).

Scanat cu CamScanner

Scanat cu CamScanner

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2020 - 2021
Matematică

Varianta 3

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă distanța parcursă de turist în primele două zile reprezintă 50% din lungimea întregului traseu, atunci în a treia zi turistul ar parcurge 50% din 50% din lungimea întregului traseu	**1p**
	În a treia zi turistul ar parcurge 25% din lungimea întregului traseu, deci nu este posibil ca distanța parcursă de turist în primele două zile să reprezinte 50% din lungimea întregului traseu	**1p**
	b) În primele două zile turistul a parcurs $2\cdot 9=18\text{km}$	**1p**
	$x+(x-6)=18$, unde x reprezintă distanța parcursă de turist în prima zi	**1p**
	$x=12\text{km}$	**1p**
2.	**a)** $E(x)=4x^2-4x+1-(2x^2-8)+x^2+6x+9=$	**1p**
	$=3x^2+2x+18$, pentru orice număr real x	**1p**

	b) $A=3n^2+3n+18=$	**1p**
	$=3\left(n^2+n+6\right)$, pentru orice număr natural n	**1p**
	$n^2+n+6=n(n+1)+6$ este număr par, pentru orice număr natural n, deci A este multiplu de 6, pentru orice număr natural n	**1p**
3.	**a)** $f(3)=3-2=1$	**1p**
	$f(-3)=-5\Rightarrow f(3)-f(-3)=1-(-5)=6$	**1p**
	b) Punctele de intersecție a graficului funcției f cu axele Ox și Oy sunt $A(2,0)$ și $B(0,-2)$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\dfrac{AC\cdot OB}{2}=\dfrac{d(C,AB)\cdot AB}{2}$	**1p**
	Cum $AB=2\sqrt{2}$, obținem $d\left(C,AB\right)=\dfrac{4\cdot 2}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$	**1p**
4.	**a)** $MP\parallel AC$, deci ΔBMP este echilateral	**1p**
	$BM=2\text{cm}$, deci $P_{\Delta BMP}=3BM=6$ cm	**1p**
	b) AD este mediană în triunghiul echilateral ABC, deci $BD=1,5\text{cm}$	**1p**
	Triunghiul DPQ este dreptunghic în D, $\sphericalangle PQD=30°$, deci $PQ=2DP$	**1p**
	$DP=0,5\text{cm}\Rightarrow PQ=1\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** $AE=BF=3\text{cm}$, unde $DE\perp AB$, $E\in AB$ și $CF\perp AB$, $F\in AB$	**1p**
	$DCFE$ este dreptunghi, deci $EF=DC=6\text{cm}$, de unde obținem $AB=12\text{cm}$	**1p**
	b) $MB=MC$ și $\sphericalangle MBC=60°$, deci ΔMBC este echilateral $\Rightarrow\sphericalangle BMP=30°$ și $MB=6\text{cm}$	**1p**
	Triunghiul AMD este echilateral, deci $\sphericalangle AMD=60°$	**1p**
	$\sphericalangle DMP=180°-(60°+30°)=90°$, deci $DM\perp MP$	**1p**
6.	**a)** $V=AB^3=$	**1p**
	$=\left(6\sqrt{2}\right)^3=432\sqrt{2}\,\text{cm}^3$	**1p**
	b) Punctul M este mijlocul segmentului $D'Q$, unde $\{Q\}=AC\cap BD$, deci $OM\parallel AQ$	**1p**
	$AQ\perp BD$, $AQ\perp DD'$, $\{D\}=DD'\cap BD\Rightarrow AQ\perp(BDD')\Rightarrow OM\perp(BDD')$, deci $d\left(O,(BDD')\right)=OM$	**1p**
	$OM=\dfrac{AQ}{2}=\dfrac{6\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{4}=3\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2022-2023

Varianta 1

Probă scrisă
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Peste 2 ani vârsta Mariei va fi de $14+2=16$ ani, iar vârsta tatălui Mariei va fi de $40+2=42$ de ani	**1p**
	Cum $16+42=58\neq 60$, deducem că nu este posibil ca peste 2 ani suma dintre vârsta Mariei și vârsta tatălui ei să fie egală cu 60 de ani	**1p**
	b) $14+x=\frac{1}{2}\cdot(40+x)$, unde x reprezintă numărul de ani care vor trece până când vârsta Mariei va fi jumătate din vârsta tatălui ei	**1p**
	$28+2x=40+x$	**1p**
	$x=12$	**1p**
2.	**a)** $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{x+2}=\frac{1+x+1}{(x+1)(x+2)}=$	**1p**
	$=\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$ și $x\neq -1$	**1p**

	b) $E(x)=\frac{1}{x+1}\cdot\frac{5(x+1)}{x+3}=\frac{5}{x+3}$, unde x este număr real, $x\neq -3$, $x\neq -2$ și $x\neq -1$	**1p**
	$\frac{5}{x+3}=\frac{x-3}{8}$, de unde obținem $x^2=49$	**1p**
	$x=-7$ sau $x=7$, care convin, deci suma soluțiilor ecuației este egală cu 0	**1p**
3.	**a)** $f(4)=1$	**1p**
	$f(6)=-1\Rightarrow f(4)+f(6)=0$	**1p**
	b) $A(5,0)$ și $B(0,5)$	**1p**
	În triunghiul dreptunghic AOB, $AB=\sqrt{AO^2+OB^2}=5\sqrt{2}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta PAB}=\frac{d(P,AB)\cdot AB}{2}=\frac{AO\cdot PB}{2}=\frac{5\cdot 8}{2}=20$, de unde obținem $d(P,AB)=4\sqrt{2}$	**1p**
4.	**a)** BD bisectoarea $\sphericalangle ABC\Rightarrow \sphericalangle ABC=30^\circ$	**1p**
	$ABCD$ trapez, deci $\sphericalangle BCD=150^\circ$	**1p**
	b) $CD\parallel AB$, BD secantă $\Rightarrow \sphericalangle CDB=\sphericalangle ABD$, deci ΔBCD este isoscel cu $CD=BC=10\text{cm}$	**1p**
	$CE\perp AB$, $E\in AB\Rightarrow AECD$ dreptunghi, deci $AD=CE$, $AE=CD$ Triunghiul CEB este dreptunghic în E, $\sphericalangle CBE=30^\circ\Rightarrow CE=\frac{BC}{2}=5\text{ cm}$, $BE=5\sqrt{3}\text{ cm}$, deci $AB-AD=\left(5+5\sqrt{3}\right)\text{cm}$	**1p**
	Cum $5+5\sqrt{3}<14\Leftrightarrow 5\sqrt{3}<9\Leftrightarrow \sqrt{75}<\sqrt{81}$, obținem $AB-AD<14\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** Triunghiul ABC este dreptunghic, deci $BC^2=AC^2-AB^2$, de unde obținem $BC=3\sqrt{10}\text{ cm}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{ABCD}=AB\cdot BC=9\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}=270\text{cm}^2$	**1p**
	b) $\Delta MCE\equiv\Delta MDA$, de unde obținem $ME=MA$	**1p**
	CM și EO sunt mediane în triunghiul ACE, $CD\cap EO=\{P\}$, deci punctul P este centrul de greutate al triunghiului $ACE\Rightarrow\frac{MP}{MC}=\frac{1}{3}$ AM și DO sunt mediane în triunghiul ACD, $AM\cap DO=\{S\}$, deci punctul S este centrul de greutate al triunghiului $ACD\Rightarrow\frac{MS}{MA}=\frac{1}{3}$	**1p**
	$\frac{MP}{MC}=\frac{MS}{MA}=\frac{1}{3}$, $\sphericalangle SMP=\sphericalangle AMC\Rightarrow\Delta SMP\sim\Delta AMC\Rightarrow SP=\frac{1}{3}AC=10\text{cm}$	**1p**
6.	**a)** $AB'\parallel DC'$, deci $\sphericalangle(AB',BC')=\sphericalangle(DC',BC')$	**1p**
	Cum $BC'=DC'=DB$, obținem că triunghiul $BC'D$ este echilateral, deci $\sphericalangle(AB',BC')=$ $=\sphericalangle BC'D=60^\circ$	**1p**
	b) $AC\cap BD=\{O\}$, $CC'\perp(ABC)$, $BD\subset(ABC)$, deci $BD\perp CC'$ și, cum $BD\perp AC$, obținem $CC'\cap AC=\{C\}$, deci $BD\perp(CC'O)$	**1p**
	$CP\perp C'O$, $P\in C'O$, $CP\subset(CC'O)$, deci $CP\perp BD$, $C'O\cap BD=\{O\}$, obținem $CP\perp(BDC')$, deci CP reprezintă distanța de la punctul C la planul (BDC')	**1p**
	Triunghiul $C'CO$ este dreptunghic în $C\Rightarrow C'O=5\sqrt{6}\text{ cm}$ și $CP=\frac{CO\cdot CC'}{C'O}=\frac{10\sqrt{3}}{3}\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2022 - 2023
Matematică

Varianta 5

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Triunghiurile desenate de cei 7 elevi ar avea $7\cdot 3=21$ de laturi	**1p**
	Patrulaterele desenate ar avea $(25-7)\cdot 4=72$ de laturi, $72+21=93$ și, cum $93\neq 90$, obținem că nu este posibil ca 7 elevi să deseneze câte un triunghi	**1p**
	b) $a+b=25$, unde a reprezintă numărul de elevi care au desenat câte un triunghi și b reprezintă numărul de elevi care au desenat câte un patrulater	**1p**
	$3a+4b=91$	**1p**
	$b=16$	**1p**
2.	**a)** $(x+1)(x+2)=x^2+2x+x+2=$	**1p**
	$=x^2+3x+2$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=\dfrac{x^2+3x+2+2x^2+4x-3x^2-3x}{x(x+1)(x+2)}:\dfrac{2x+1}{(x+1)(x+2)}=$	**1p**
	$=\dfrac{2(2x+1)}{x(x+1)(x+2)}\cdot\dfrac{(x+1)(x+2)}{2x+1}=\dfrac{2}{x}$, unde x este număr real, $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq -2$ și $x\neq -\dfrac{1}{2}$	**1p**

	Dacă n este număr natural par, nenul, atunci numărul $N=\frac{1}{E(n)}=\frac{n}{2}$ este natural	**1p**
3.	**a)** $f(3)=0$	**1p**
	$f(9)=2\Rightarrow f(3)+f(9)=2$	**1p**
	b) $M(3,0)$ și $N(0,-1)$	**1p**
	Triunghiul MON este dreptunghic în O, deci $MN=\sqrt{10}$	**1p**
	$OP\perp MN$, unde $P\in MN$, $OP=\frac{OM\cdot ON}{MN}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$	**1p**
4.	**a)** CM este înălțime în triunghiul echilateral $ABC\Rightarrow CM=4\sqrt{3}$ cm	**1p**
	CN este înălțime în triunghiul echilateral $CDE\Rightarrow CN=2\sqrt{3}$ cm, deci $CM=2\cdot CN$	**1p**
	b) CM și CN sunt bisectoare în triunghiurile echilaterale ABC, respectiv CDE, deci $\sphericalangle BCM=\sphericalangle DCN=30^\circ$, de unde obținem $\sphericalangle MCN=120^\circ$	**1p**
	$\sphericalangle ACD=120^\circ$, deci $\sphericalangle MCN\equiv\sphericalangle ACD$ și, cum $\frac{CM}{AC}=\frac{CN}{CD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow \Delta MCN\sim\Delta ACD$	**1p**
	$\frac{\mathcal{A}_{MCN}}{\mathcal{A}_{ACD}}=\frac{3}{4}=\frac{75}{100}=75\%\Rightarrow p=75$	**1p**
5.	**a)** Triunghiul ABC este isoscel, AM mediană, deci AM este înălțime și bisectoare	**1p**
	Triunghiul AMC este dreptunghic în M, $\sin(\sphericalangle CAM)=\frac{CM}{AC}$, de unde obținem $CM=5\sqrt{3}$ cm, deci $BC=10\sqrt{3}$ cm	**1p**
	b) Triunghiul SMC este dreptunghic în M, $SC^2=MC^2+MS^2$, deci $SC=5\sqrt{7}$ cm	**1p**
	$MT\perp CS$, unde $T\in SC$, deci $d(M,SC)=MT=\frac{SM\cdot MC}{SC}=\frac{10\sqrt{21}}{7}$ cm	**1p**
	Cum $\frac{10\sqrt{21}}{7}<7\Leftrightarrow 10\sqrt{21}<49\Leftrightarrow 2100<2401$, obținem $MT<7$ cm	**1p**
6.	**a)** $\mathcal{V}=AB\cdot BC\cdot AA'=$	**1p**
	$=2\sqrt{3}\cdot 2\cdot 4=16\sqrt{3}\text{cm}^3$	**1p**
	b) $ABB'A'$ este dreptunghi, $A'B\cap AB'=\{O\}$, deci O este mijlocul segmentului $A'B$	**1p**
	În triunghiul $A'BC$, OM este linie mijlocie, de unde $OM\parallel A'C$	**1p**
	$OM\subset(AMB')$, deci $A'C\parallel(AMB')$	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……...
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....
Școala de proveniență: …….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

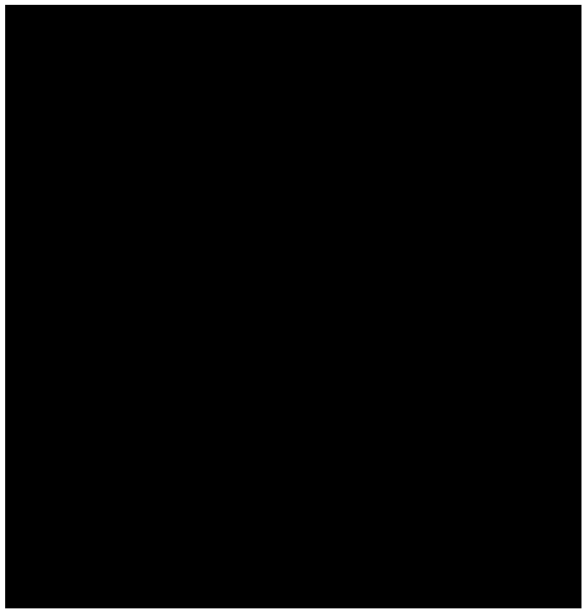
Anul școlar 2022 – 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $15-(3+4)$ este egal cu: **a)** 3 **b)** 8 **c)** 16 **d)** 22
5p	**2.** Știind că $\frac{x}{y}=\frac{5}{2}$, $y\neq 0$, rezultatul calculului $2x-5y+10$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 7 **c)** 10 **d)** 17
5p	**3.** Produsul dintre numărul 3 și opusul numărului 3 este egal cu: **a)** -9 **b)** -6 **c)** 0 **d)** 1
5p	**4.** Numărul care reprezintă $\frac{2}{3}$ din 12 este egal cu: **a)** 2 **b)** 4 **c)** 8 **d)** 12

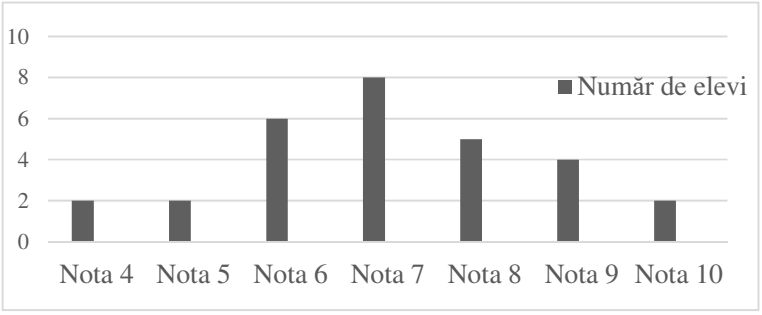
5p **5.** Profesorul întreabă care este cel mai mare număr întreg din intervalul $(-2,5)$. Răspunsurile date de elevii Andreea, Marina, David și Vlad sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Andreea	Marina	David	Vlad
-3	-2	5	4

Dintre cei patru elevi, cel care a răspuns corect la întrebarea profesorului este:

a) Andreea
b) Marina
c) David
d) Vlad

5p **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate rezultatele obținute la un test la matematică, de către elevii unei clase a VIII-a.



Afirmația: „Conform informațiilor din diagramă, la acest test, nota 7 a fost obținută de 10 elevi.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

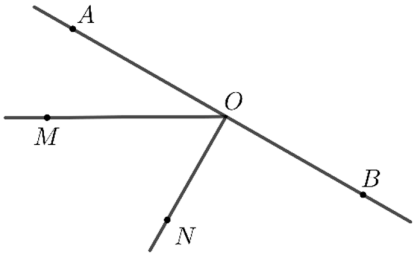
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C și D, în această ordine, astfel încât $AB = BC = CD$, iar lungimea segmentului AC este egală cu $10\,\text{cm}$. Lungimea segmentului AD este egală cu:

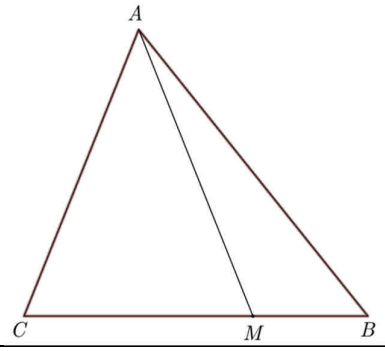
a) $5\,\text{cm}$
b) $10\,\text{cm}$
c) $15\,\text{cm}$
d) $20\,\text{cm}$

5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, O și B, în această ordine. Punctele M și N sunt de aceeași parte a dreptei AB, astfel încât măsura unghiului MOA este egală cu $30°$ și dreapta ON este perpendiculară pe dreapta AB. Măsura unghiului MON este egală cu:

a) $30°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $90°$

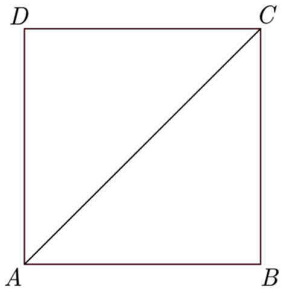


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu aria de $15\,\text{cm}^2$. Punctul M se află pe segmentul BC, astfel încât $BC = 3 \cdot BM$. Aria triunghiului AMC este egală cu:



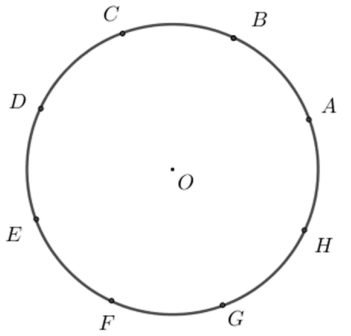
a) $5\,\text{cm}^2$
b) $7{,}5\,\text{cm}^2$
c) $10\,\text{cm}^2$
d) $12{,}5\,\text{cm}^2$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$ cu perimetrul egal cu $40\,\text{cm}$. Lungimea segmentului AC este egală cu:



a) $10\,\text{cm}$
b) $10\sqrt{2}\,\text{cm}$
c) $10\sqrt{3}\,\text{cm}$
d) $20\,\text{cm}$

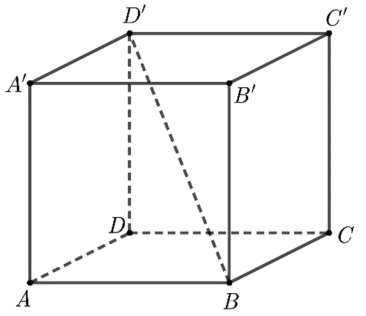
5p **5.** În figura alăturată, punctele distincte A, B, C, D, E, F, G și H sunt reprezentate pe cercul de centru O, astfel încât arcele mici AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH și HA sunt congruente.



Măsura arcului mic BC este egală cu:

a) $30°$
b) $45°$
c) $60°$
d) $75°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 5\,\text{cm}$. Lungimea segmentului BD' este egală cu:



a) $5\,\text{cm}$
b) $5\sqrt{2}\,\text{cm}$
c) $5\sqrt{3}\,\text{cm}$
d) $10\,\text{cm}$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Maria are 14 ani și tatăl ei are 40 de ani.

(2p) a) Este posibil ca, peste 2 ani, suma dintre vârsta Mariei și vârsta tatălui ei să fie egală cu 60 de ani? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină peste câți ani vârsta Mariei va fi jumătate din vârsta tatălui ei.

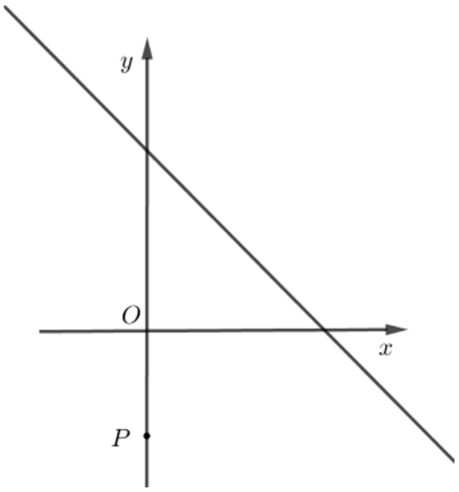
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{x+2}\right):\dfrac{x+3}{5(x+1)}$, unde x este număr real, $x\neq -3$, $x\neq -2$ și $x\neq -1$.

(2p) a) Arată că $\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x+1}$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$ și $x\neq -1$.

(3p) b) Determină suma soluțiilor ecuației $E(x)=\dfrac{x-3}{8}$, unde x este număr real, $x\neq -3$, $x\neq -2$ și $x\neq -1$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+5$.

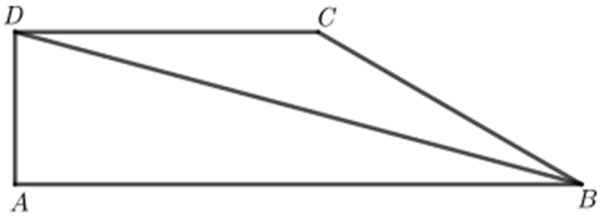
(2p) a) Arată că $f(4)+f(6)=0$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Calculează distanța de la punctul $P(0,-3)$ la dreapta AB.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $AB \| CD$ și $BC = 10$ cm. Semidreapta BD este bisectoarea unghiului ABC și măsura unghiului ABD este egală cu $15°$.

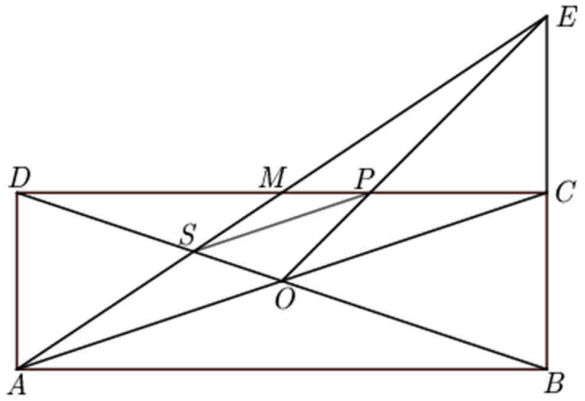
(2p) a) Determină măsura unghiului BCD.



(3p) b) Arată că $AB - AD < 14$ cm.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AB = 9\sqrt{10}$ cm și $AC = 30$ cm. Dreptele AC și BD se intersectează în punctul O, iar punctul M este mijlocul segmentului CD. Dreptele BC și AM se intersectează în punctul E, iar dreptele OE și CD se intersectează în punctul P.

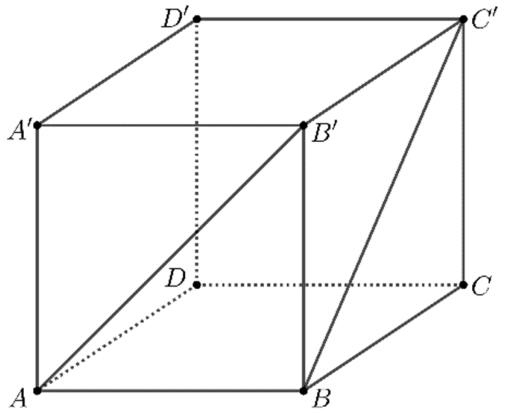
(2p) a) Arată că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu 270 cm^2.



(3p) b) Arată că lungimea segmentului SP este egală cu 10 cm, unde S este punctul de intersecție a dreptelor AM și BD.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=10\text{cm}$.

(2p) a) Arată că măsura unghiului dreptelor AB' și BC' este egală cu $60°$.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul C la planul (BDC').

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....
Școala de proveniență: …….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

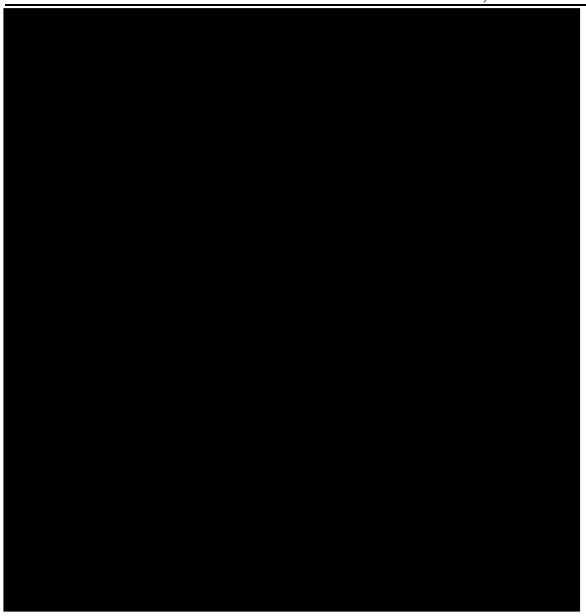
Anul școlar 2022 – 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $2+3\cdot 5$ este egal cu: **a)** 1 **b)** 10 **c)** 17 **d)** 25
5p	**2.** Dacă $\frac{1}{2}=\frac{a}{3}$, atunci numărul a este egal cu: **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** 1 **c)** $\frac{3}{2}$ **d)** 6
5p	**3.** Produsul numerelor -2 și 7 este egal cu: **a)** -14 **b)** -5 **c)** 5 **d)** 14
5p	**4.** Scris sub formă de fracție ordinară, numărul $2,3$ este egal cu: **a)** $\frac{23}{9}$ **b)** $\frac{23}{10}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{23}{100}$

5p **5.** În tabelul de mai jos sunt prezentate informații referitoare la rezultatele obținute de elevii unei clase la un test de matematică.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr de elevi	2	1	3	8	6	4	1

Conform informațiilor din tabel, numărul de elevi care au obținut note mai mari sau egale cu 8, la acest test, este egal cu:

a) 5
b) 6
c) 11
d) 14

5p **6.** Se consideră numerele reale $a = 2\sqrt{3}$ și $b = 3\sqrt{2}$. Radu afirmă că: „Numărul a este mai mic decât numărul b.” Afirmația lui Radu este:

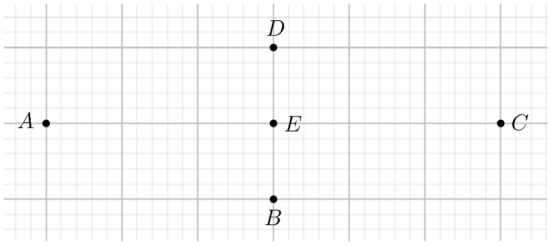
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

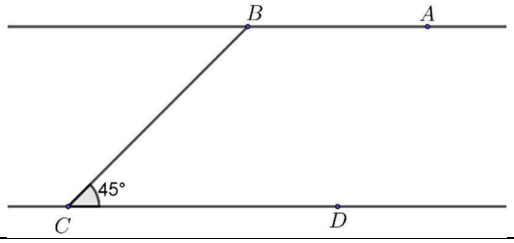
5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele A, B, C, D și E. Simetricul punctului B față de punctul E este punctul:

a) A
b) B
c) C
d) D



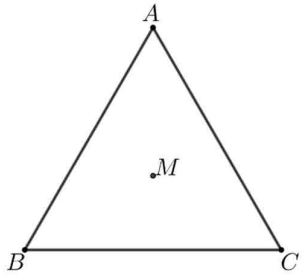
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele paralele AB și CD, cu punctele A și D de aceeași parte a dreptei BC. Măsura unghiului BCD este egală cu $45°$. Măsura unghiului ABC este egală cu:

a) 45°
b) 75°
c) 135°
d) 145°



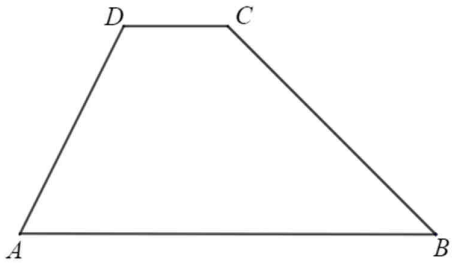
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu lungimea laturii de $12\,\text{cm}$. Punctul M se află în interiorul triunghiului ABC, la distanțe egale de laturile triunghiului. Distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu:

a) $4\sqrt{3}$ cm
b) 6 cm
c) 4 cm
d) $2\sqrt{3}$ cm



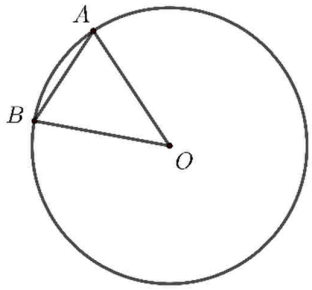
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $CD = 20$ cm și $AB = 4 \cdot CD$. Lungimea liniei mijlocii a acestui trapez este egală cu:

a) 30 cm
b) 50 cm
c) 80 cm
d) 100 cm



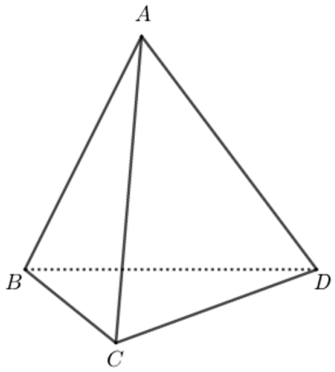
5p **5.** În figura alăturată, punctele A și B aparțin cercului de centru O. Măsura arcului mic AB este egală cu $46°$. Măsura unghiului BAO este egală cu:

a) 23°
b) 46°
c) 67°
d) 134°



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$ cu $AB = 6$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor acestui tetraedru este egală cu:

a) 18 cm
b) 24 cm
c) 30 cm
d) 36 cm



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** La ora de geometrie, fiecare dintre cei 25 de elevi ai unei clase a desenat pe caiet fie un triunghi, fie un patrulater.

(2p) a) Este posibil ca exact 7 elevi să fi desenat câte un triunghi și numărul total de laturi desenate de cei 25 de elevi să fie egal cu 90? Justifică răspunsul dat.

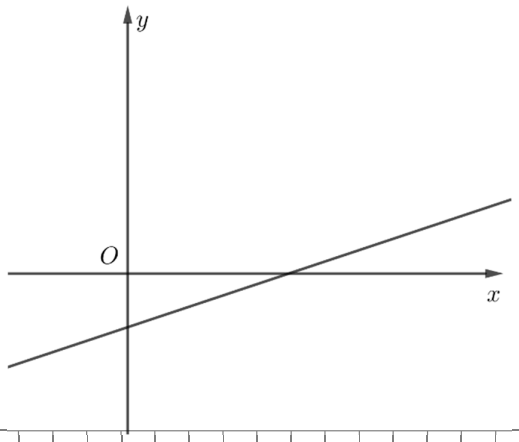
(3p) b) Determină numărul de elevi care au desenat câte un patrulater, știind că numărul total de laturi ale figurilor geometrice desenate de elevii clasei este egal cu 91.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}-\frac{3}{x+2}\right):\frac{2x+1}{x^2+3x+2}$, unde x este număr real, $x\neq 0$, $x\neq -1$, $x\neq -2$ și $x\neq -\frac{1}{2}$.

(2p) a) Arată că $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Dacă n este număr natural par, nenul, arată că numărul $N=\frac{1}{E(n)}$ este natural.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{3}-1$.

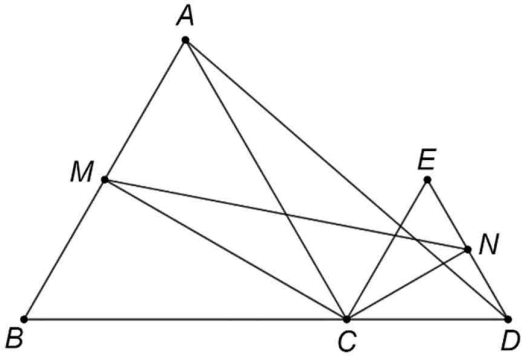


(2p) a) Arată că $f(3)+f(9)=2$.

(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele M, respectiv N. Calculează distanța de la punctul O la reprezentarea geometrică a graficului funcției f.

5p **4.** În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile echilaterale ABC și CDE, cu $AB = 8\text{cm}$, $CD = 4\text{cm}$, iar punctele B, C și D sunt coliniare, în această ordine. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv DE.

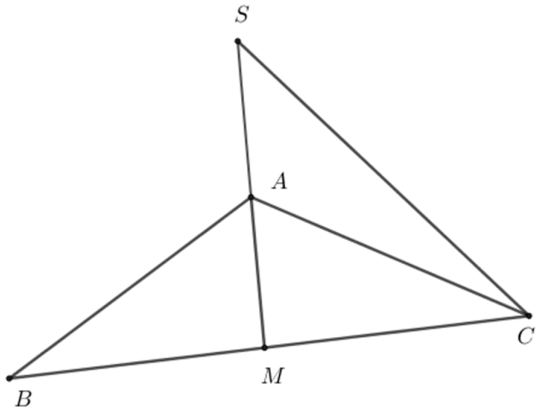
(2p) a) Arată că $CM = 2 \cdot CN$.



(3p) b) Aria triunghiului MCN reprezintă $p\%$ din aria triunghiului ACD. Determină valoarea lui p.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, cu $AB = AC = 10$ cm și $\measuredangle BAC = 120°$. Punctul M este mijlocul segmentului BC și punctul S este simetricul punctului M față de punctul A.

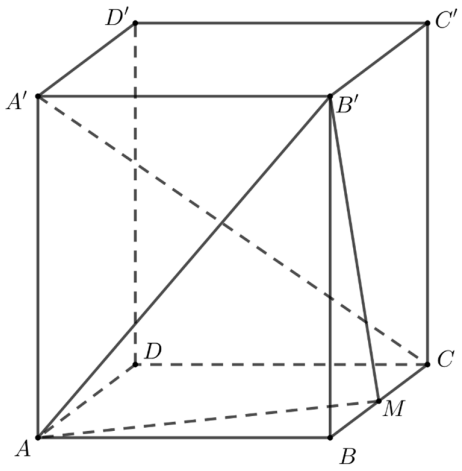
(2p) a) Arată că $BC = 10\sqrt{3}$ cm.



(3p) b) Demonstrează că distanța de la punctul M la dreapta SC este mai mică decât 7 cm.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 2\sqrt{3}\,\text{cm}$, $BC = 2\,\text{cm}$ și $AA' = 4\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului BC.

(2p) a) Arată că volumul paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ este egal cu $16\sqrt{3}\,\text{cm}^3$.



(3p) b) Demonstrează că dreapta $A'C$ este paralelă cu planul (MAB').

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2023 - 2024
Matematică

Varianta 2

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $205 \cdot 25 = 5125$ de lei	**1p**
	$5150 - 5125 = 25$, care nu este multiplu de 20, deci nu au fost vândute 205 bilete pentru adulți	**1p**
	b) $25 \cdot (225 - n) + 20n = 5150$, unde n reprezintă numărul biletelor pentru copii	**1p**
	$5625 - 5n = 5150$	**1p**
	$n = 95$	**1p**
2.	**a)** $\frac{2}{x-2} + \frac{x}{x+2} = \frac{2(x+2)+x(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$	**1p**
	$= \frac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$, pentru orice număr real x, $x \neq -2, x \neq 2$	**1p**
	b) $E(x) = \frac{x+2}{x-2}$, pentru orice număr real x, $x \neq -2, x \neq 2$	**1p**
	$N = \frac{4}{n-2}$, pentru orice număr natural $n \neq 2$	**1p**
	N este număr natural, deci $n-2=1$ sau $n-2=2$ sau $n-2=4$, de unde obținem $n=3$, $n=4$, $n=6$	**1p**
3.	**a)** $f(1) = 3$	**1p**
	$f(4) = 6$, de unde obținem $2 \cdot f(1) = f(4)$	**1p**

	b) $A(-2,0)$ și $B(0,2)$	**1p**
	Triunghiul AOB este dreptunghic în O, deci $AB=2\sqrt{2}$	**1p**
	$MN\perp AB$, $N\in AB$, $MN=\dfrac{MA\cdot BO}{AB}$ și, cum $MA=6\text{cm}$, obținem $MN=3\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**
4.	**a)** NP este bisectoarea unghiului ANM, deci $\sphericalangle PNM=45^\circ$	**1p**
	NQ este bisectoarea unghiului MNB, deci $\sphericalangle MNQ=45^\circ$, de unde obținem $\sphericalangle PNQ=90^\circ$	**1p**
	b) Triunghiurile PAN și NBQ sunt dreptunghice isoscele, deci $AN=AP$ și $NB=BQ$ și, cum $ABCD$ este pătrat, obținem $DP=BQ$	**1p**
	Cum $DP\parallel BQ$, obținem că $DPBQ$ este paralelogram	**1p**
	$AC\cap DB=\{O\}$, deci punctul O este mijlocul lui DB și, cum $DPBQ$ este paralelogram, rezultă că O este mijlocul segmentului PQ, deci punctele P, O și Q sunt coliniare	**1p**
5.	**a)** $CM\perp AB$, $M\in AB\Rightarrow CM=AD=2\text{cm}$	**1p**
	$\sphericalangle MBC=30^\circ\Rightarrow BC=2CM=4\text{cm}$	**1p**
	b) $BC=AB$, de unde obținem $\sphericalangle CAB=75^\circ$	**1p**
	$\sphericalangle CAE=120^\circ$, $BE=BG$, $\sphericalangle EBG=150^\circ\Rightarrow\sphericalangle BEG=15^\circ$, de unde obținem $\sphericalangle AEG=60^\circ$, deci $\sphericalangle CAE+\sphericalangle AEG=180^\circ\Rightarrow AC\parallel EG$	**1p**
	$ABEF, CBGH$ pătrate cu $AB=BC\Rightarrow AE=CG$ și, cum $AC\parallel EG$ și $AE\not\parallel CG\Rightarrow AEGC$ trapez isoscel	**1p**
6.	**a)** $\mathcal{V}_{ABCDA'B'C'D'}=AB^3=$	**1p**
	$=8^3=512\text{cm}^3$	**1p**
	b) $DC\perp MP$, $DC\perp OP$, $MP\cap OP=\{P\}$ și $MP, OP\subset(MOP)\Rightarrow DC\perp(MOP)$, unde punctul P este mijlocul segmentului DC	**1p**
	$ON\perp MP, N\in MP$ și, cum $ON\perp DC$, $MP\cap DC=\{P\}$, $MP, DC\subset(CMD)$, obținem $ON\perp(CMD)$, deci $d(O,(CMD))=ON$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta MOP}=\dfrac{ON\cdot MP}{2}=\dfrac{OP\cdot d(M,OP)}{2}$ și, cum $OP=4\text{cm}$, $d(M,OP)=8\text{cm}$ și $MP=8\sqrt{2}\text{cm}$, obținem $ON=2\sqrt{2}\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2023 - 2024
Matematică

Varianta 7

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**d)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $30-3=27$ de elevi ar trebui așezați câte doi în fiecare bancă	**1p**
	Cum 27 este număr impar, obținem că nu pot fi 30 de elevi	**1p**
	b) $a=2b+3$, unde a reprezintă numărul elevilor și b reprezintă numărul băncilor din laboratorul de fizică	**1p**
	$a=4(b-6)+1$	**1p**
	$b=13$	**1p**
2.	**a)** $x^2-3x+2=x^2-2x-x+2=$	**1p**
	$=x(x-2)-(x-2)=(x-2)(x-1)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=\left(\frac{1}{(x-1)(x-2)}+\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(x^2-4\right)=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\cdot\left(x^2-4\right)=$	**1p**
	$=\frac{x-1}{(x-1)(x-2)}\cdot(x-2)(x+2)=x+2$, pentru orice număr real x, $x\neq 1$ și $x\neq 2$	**1p**
	$E(n)=\frac{5}{n+2}$ este număr natural, deci $n+2\in\{1,5\}$, de unde obținem $n=-1$ și $n=3$	**1p**

3.	**a)** $f(0)=-1$	**1p**
	$f(1)=1$, de unde obținem $f(0)+f(1)=0$	**1p**
	b) $A\left(\frac{1}{2},0\right)$ și $B(0,-1)$	**1p**
	Triunghiul AOB este dreptunghic în O, deci $AB=\frac{\sqrt{5}}{2}$	**1p**
	$CD\perp AB$, $D\in AB$ și, cum $AC=1$, obținem $CD=\frac{AC\cdot OB}{AB}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$	**1p**
4.	**a)** $\sphericalangle DAC+\sphericalangle ACB=90^\circ$	**1p**
	$\sphericalangle ACB+\sphericalangle EBC=90^\circ$, de unde rezultă $\sphericalangle DAC=\sphericalangle EBC$	**1p**
	b) Triunghiul ABC este isoscel și $AD\perp BC$, deci $BD=DC=\frac{BC}{2}=\frac{AD}{2}$	**1p**
	$\sphericalangle HBD=\sphericalangle DAC$, $\sphericalangle BDH=\sphericalangle ADC=90^\circ$, deci $\Delta BHD\sim\Delta ACD$, de unde obținem $\frac{HD}{DC}=\frac{BD}{AD}$	**1p**
	$\frac{HD}{\frac{AD}{2}}=\frac{\frac{AD}{2}}{AD}\Rightarrow HD=\frac{AD}{4}$, de unde obținem $AH=\frac{3\cdot AD}{4}$, deci $AH=3\cdot HD$	**1p**
5.	**a)** CD este diametru, deci $\overset{\frown}{CD}=180^\circ$	**1p**
	$\sphericalangle CMD=\frac{1}{2}\cdot\overset{\frown}{CD}=90^\circ$	**1p**
	b) $\cos(\sphericalangle NDO)=\frac{OD}{ND}$, $\cos(\sphericalangle MDC)=\frac{MD}{CD}$, deci $\frac{OD}{ND}=\frac{MD}{CD}$	**1p**
	$ND=8\,\text{cm}$, $MD=12\,\text{cm}\Rightarrow\frac{OD}{8}=\frac{12}{2\cdot OD}\Rightarrow OD=4\sqrt{3}\,\text{cm}$	**1p**
	$ON=\sqrt{DN^2-OD^2}=4\,\text{cm}$ și obținem $\mathcal{A}_{\Delta DON}=\frac{ON\cdot OD}{2}=8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**1p**
6.	**a)** $\mathcal{A}_{ABB'A'}=AB\cdot AA'=36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\text{laterală}}=3\cdot\mathcal{A}_{ABB'A'}=3\cdot36\sqrt{3}=108\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**1p**
	b) $A'C=B'C$, deci $CN\perp A'B'$, unde punctul N este mijlocul segmentului $A'B'$ și, cum $MN\perp A'B'$, $CN\cap MN=\{N\}$ și CN, $MN\subset(CMN)$, obținem $A'B'\perp(CMN)$	**1p**
	$MP\perp CN$, $P\in CN$; $A'B'\perp(CMN)$, $MP\subset(CMN)$, deci $A'B'\perp MP$; cum $A'B'\cap CN=\{N\}$, $A'B'$ și $CN\subset(A'B'C)$, obținem $MP\perp(A'B'C)$, deci $d(M,(A'B'C))=MP$	**1p**
	Triunghiul MNC este dreptunghic în M, $MN=3\sqrt{3}\,\text{cm}$, $CM=6\sqrt{3}\,\text{cm}$, deci $CN=3\sqrt{15}\,\text{cm}$, de unde obținem $MP=\frac{6\sqrt{15}}{5}\,\text{cm}$	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:…….....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....……...……...
Școala de proveniență: .....…
….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

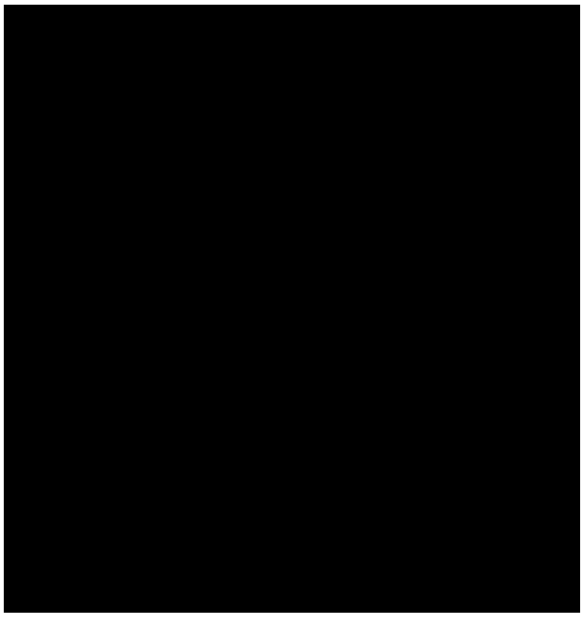
Anul școlar 2023 – 2024

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $14-14:(4-2)$ este: **a)** 0 **b)** 7 **c)** 14 **d)** 21
5p	**2.** Dacă $\frac{6}{a}=\frac{b}{2}$, $a\neq 0$, atunci raportul $\frac{a\cdot b}{a\cdot b+1}$ este egal cu: **a)** $\frac{12}{13}$ **b)** 1 **c)** $\frac{12}{11}$ **d)** 12
5p	**3.** Mulțimea divizorilor naturali ai numărului 15 este: **a)** $\{3,5\}$ **b)** $\{0,3,5,15\}$ **c)** $\{1,3,5,15\}$ **d)** $\{3,5,15\}$
5p	**4.** Mulțimea soluțiilor reale ale ecuației $2x^2=8$ este: **a)** $\{-2\}$ **b)** $\{-2,2\}$ **c)** $\{2\}$ **d)** $\{4\}$

5p **5.** Patru elevi, George, Anca, Marius și Alina, ordonează crescător numerele $a=\frac{2}{3}$, $b=0,5$, $c=0,1(3)$ și $d=\frac{1}{4}$. Răspunsurile date de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

George	Anca	Marius	Alina
$d<c<b<a$	$c<d<a<b$	$c<d<b<a$	$d<b<a<c$

Dintre cei patru elevi, cel care a răspuns corect este:

a) George

b) Anca

c) Marius

d) Alina

5p **6.** În prezent, Ioana și Maria au împreună 28 de ani. Afirmația „Peste 3 ani, Ioana și Maria vor avea împreună 31 de ani.” este:

a) adevărată

b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB<BC<CD$ și $BC=7\text{cm}$. Lungimile segmentelor AB, BC și CD, exprimate în centimetri, sunt trei numere naturale consecutive, iar punctul M este mijlocul segmentului AB. Lungimea segmentului MD este egală cu:

a) 10cm

b) 13cm

c) 18cm

d) 21cm

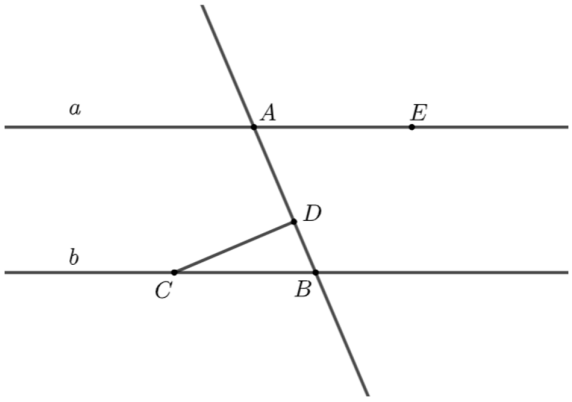
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele paralele a și b. Punctele A și E aparțin dreptei a, iar punctele B și C aparțin dreptei b. Dreapta CD este perpendiculară pe dreapta AB, punctul D aparține segmentului AB, iar măsura unghiului DAE este egală cu $67°$. Măsura unghiului DCB este egală cu:

a) $23°$

b) $33°$

c) $67°$

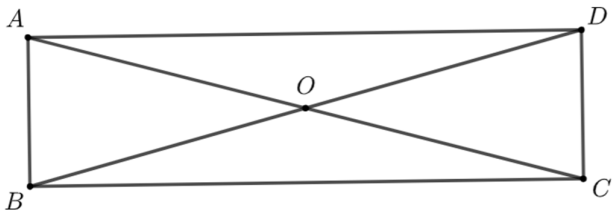
d) $113°$



5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu măsura unghiului C egală cu $75°$. Punctul E aparține semidreptei AC astfel încât semidreapta BC este bisectoarea unghiului ABE. Măsura unghiului BEC este egală cu:

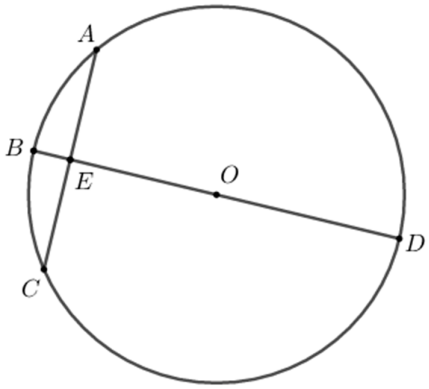
a) $15°$
b) $30°$
c) $60°$
d) $105°$

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AC = 20\,\text{cm}$ și O punctul de intersecție a dreptelor AC și BD. Măsura unghiului AOB este egală cu $30°$. Aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu:



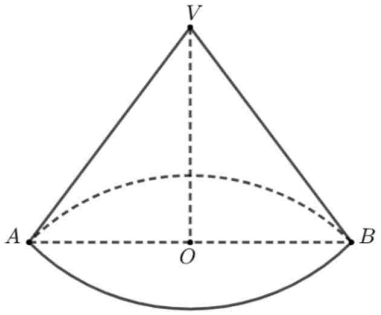
a) $20\ \text{cm}^2$
b) $25\ \text{cm}^2$
c) $100\ \text{cm}^2$
d) $200\ \text{cm}^2$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centrul în punctul O. Diametrul DB are lungimea egală cu $50\,\text{cm}$. Coarda AC are lungimea egală cu $30\,\text{cm}$ și este perpendiculară pe diametrul BD. Dacă E este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD, atunci lungimea segmentului OE este egală cu:



a) $20\,\text{cm}$
b) $15\,\text{cm}$
c) $12\,\text{cm}$
d) $10\,\text{cm}$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un con circular drept cu înălțimea $VO = 8\,\text{cm}$ și secțiunea axială triunghiul VAB, cu $VA = 10\,\text{cm}$. Volumul conului este egal cu:



a) $60\pi\,\text{cm}^3$
b) $96\pi\,\text{cm}^3$
c) $120\pi\,\text{cm}^3$
d) $360\pi\,\text{cm}^3$

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Pentru un concert s-au vândut în total 225 de bilete pentru adulți și copii. Prețul unui bilet pentru adulți a fost de 25 de lei, iar prețul unui bilet pentru copii a fost de 20 de lei. Suma obținută din vânzarea biletelor a fost de 5150 de lei.

(2p) a) Verifică dacă au fost vândute 205 bilete pentru adulți. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul biletelor pentru copii care au fost vândute.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}\right):\dfrac{x^2+4}{x^2+4x+4}$, unde x este număr real, $x\neq -2$ și $x\neq 2$.

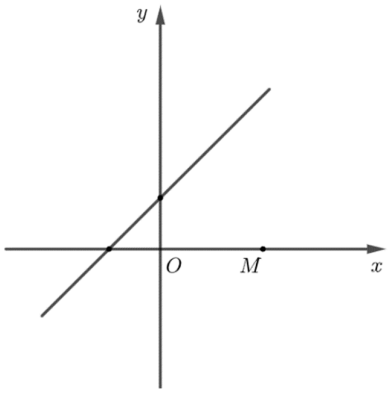
(2p) a) Arată că $\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x+2)}$, pentru orice număr real x, $x\neq -2$ și $x\neq 2$.

(3p) b) Determină numerele naturale n, $n \neq 2$, pentru care $N = E(n) - 1$ este număr natural.

5p

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$.

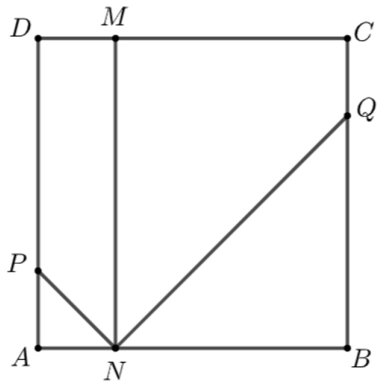
(2p) a) Arată că $2 \cdot f(1) = f(4)$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Determină distanța de la punctul $M(4,0)$ la dreapta AB.

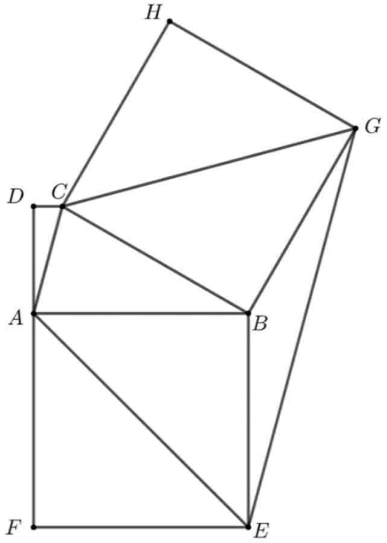
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$. Punctul M aparține laturii CD, iar paralela prin M la dreapta AD intersectează latura AB în punctul N. Bisectoarea unghiului ANM intersectează latura AD în punctul P, iar bisectoarea unghiului MNB intersectează latura BC în punctul Q.

(2p) a) Arată că măsura unghiului PNQ este egală cu $90°$.



(3p) b) Demonstrează că punctele P, O și Q sunt coliniare, unde O este punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul $ABCD$ cu $AB \| CD$, $AB = 2 \cdot AD = 4\text{cm}$, măsura unghiului BAD egală cu $90°$ și măsura unghiului ABC egală cu $30°$. În exteriorul trapezului se construiesc pătratele $ABEF$ și $BCHG$.

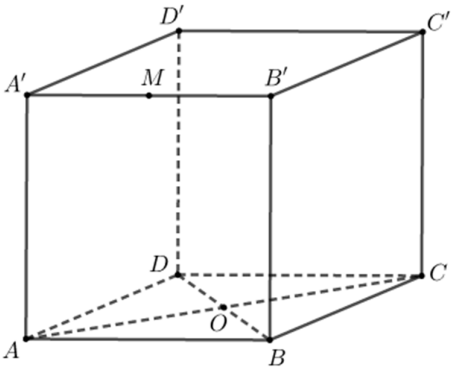


(2p) a) Arată că $BC = 4\text{cm}$.

(3p) b) Demonstrează că patrulaterul $AEGC$ este trapez isoscel.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB=8\text{cm}$ și O punctul de intersecție a dreptelor AC și BD.

(2p) a) Calculează volumul cubului $ABCDA'B'C'D'$.



(3p) b) Determină distanța de la punctul O la planul (CMD), unde punctul M este mijlocul segmentului $A'B'$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:…….....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....……...…….....
Școala de proveniență: .....…
….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

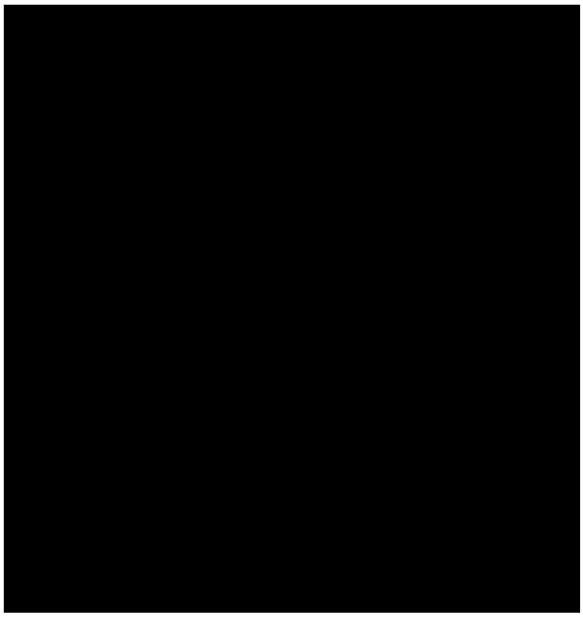
Anul școlar 2023 – 2024

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $8+14:2$ este egal cu: **a)** 22 **b)** 15 **c)** 11 **d)** 6
5p	**2.** Un album costă 200 de lei. După o reducere cu 20%, prețul albumului este egal cu: **a)** 20 de lei **b)** 40 de lei **c)** 160 de lei **d)** 180 de lei
5p	**3.** Se consideră intervalele de numere reale $I=(-\infty,6]$ și $J=(4,+\infty)$. Intersecția intervalelor I și J este intervalul: **a)** $(-\infty,4]$ **b)** $[4,6)$ **c)** $(6,+\infty)$ **d)** $(4,6]$
5p	**4.** Cel mai mare număr din mulțimea $A=\{5,(024);\ 5,(24);\ 5,2(4);\ 5,24\}$ este: **a)** $5,(024)$ **b)** $5,(24)$ **c)** $5,2(4)$ **d)** $5,24$

5p **5.** Patru elevi, Alin, Ioana, Dana și Vlad, calculează suma numerelor reale a și b pentru care $|a+3|+|b-4|=0$. Răspunsurile date de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Alin	Ioana	Dana	Vlad
-7	-1	1	7

Rezultatul corect a fost obținut de către:

a) Alin
b) Ioana
c) Dana
d) Vlad

5p **6.** Afirmația: „Numărul 1 este soluția ecuației $2x+3=4x+1$.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

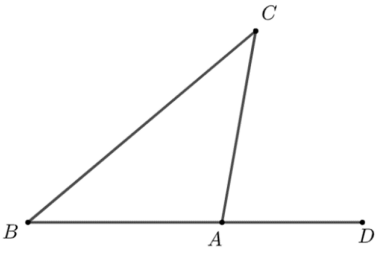
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $BC=4\,\text{cm}$, $AD=4\cdot BC$ și $AB=CD$. Lungimea segmentului AB este egală cu:

a) $4\,\text{cm}$
b) $6\,\text{cm}$
c) $8\,\text{cm}$
d) $12\,\text{cm}$

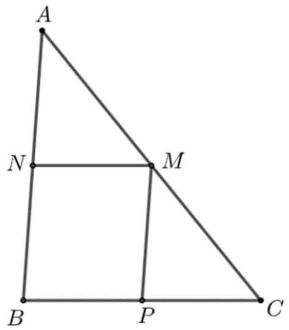
5p **2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC, cu $AB=AC$ și măsura unghiului C egală cu $40°$. Punctele B, A și D sunt coliniare, în această ordine. Măsura unghiului CAD este egală cu:

a) $40°$
b) $60°$
c) $80°$
d) $100°$



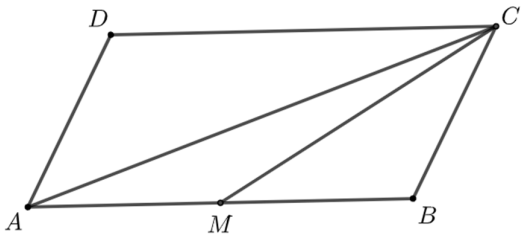
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu măsura unghiului A egală cu $43°$ și măsura unghiului C egală cu $51°$. Punctele M, N și P aparțin laturilor AC, AB respectiv BC, astfel încât dreapta MN este paralelă cu dreapta BC și dreapta MP este paralelă cu dreapta AB. Măsura unghiului NMP este egală cu:

a) $43°$
b) $51°$
c) $86°$
d) $94°$



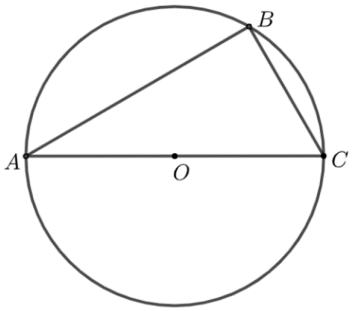
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$. Punctul M este mijlocul segmentului AB și aria triunghiului ACM este egală cu $10\,\text{cm}^2$. Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu:

a) $10\ \text{cm}^2$
b) $20\ \text{cm}^2$
c) $30\ \text{cm}^2$
d) $40\ \text{cm}^2$



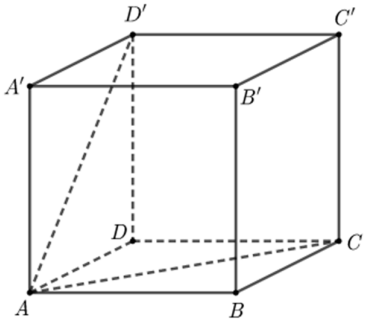
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centrul în punctul O și raza egală cu $6\,\text{cm}$. Punctele A, B și C aparțin cercului, AC este diametru și măsura unghiului BAC este egală cu $30°$. Lungimea coardei BC este egală cu:

a) $6\,\text{cm}$
b) $6\sqrt{3}\,\text{cm}$
c) $12\,\text{cm}$
d) $8\sqrt{3}\,\text{cm}$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$. Unghiul dreptelor AC și AD' are măsura egală cu:

a) 45°
b) 60°
c) 90°
d) 120°



SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dacă elevii unei clase se așază câte 2 în fiecare bancă din laboratorul de fizică, atunci rămân 3 elevi în picioare. Dacă elevii se așază câte 4 în bancă, atunci rămân 5 bănci libere și o bancă în care stă un singur elev.

(2p) a) Verifică dacă în acea clasă pot fi 30 de elevi. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină numărul băncilor din laboratorul de fizică.

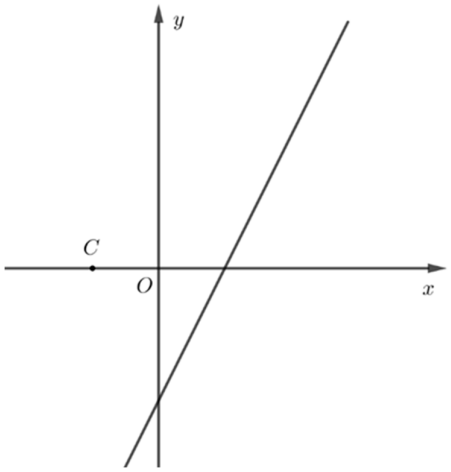
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x^2-3x+2}+\frac{1}{x-1}\right)\cdot\left(x^2-4\right)$, unde x este număr real, $x\neq 1$ și $x\neq 2$.

(2p) a) Arată că $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Determină numerele întregi n, $n\neq 1$ și $n\neq 2$, pentru care $N=\frac{5}{E(n)}$ este număr natural.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

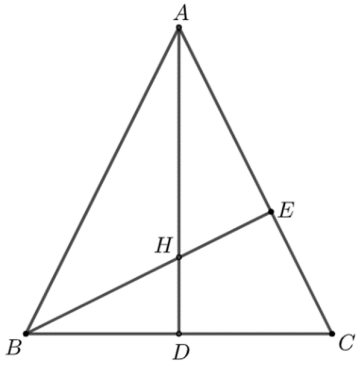
(2p) a) Arată că $f(0)+f(1)=0$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Determină distanța de la punctul $C\left(-\frac{1}{2},0\right)$ la dreapta AB.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$. Înălțimea din vârful A intersectează latura BC în punctul D și $AD = BC$. Înălțimea din vârful B intersectează latura AC în punctul E. Înălțimile AD și BE se intersectează în punctul H.

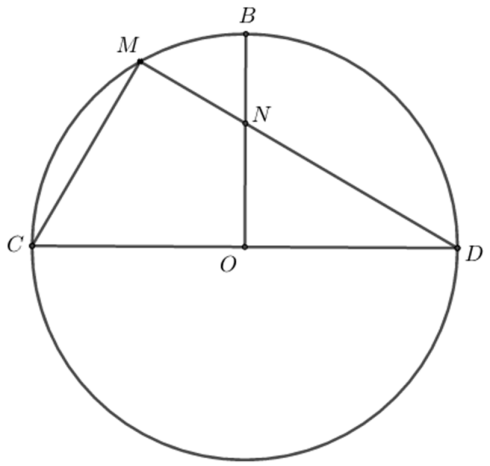
(2p) a) Arată că unghiurile DAC și EBC au aceeași măsură.



(3p) b) Demonstrează că $AH = 3 \cdot HD$.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul de centru O, în care CD este diametru. Punctul B aparține cercului astfel încât dreptele BO și CD sunt perpendiculare. Punctul M aparține arcului mic BC, dreptele DM și BO se intersectează în punctul N, $DN = 2 \cdot MN$ și $MN = 4\,\text{cm}$.

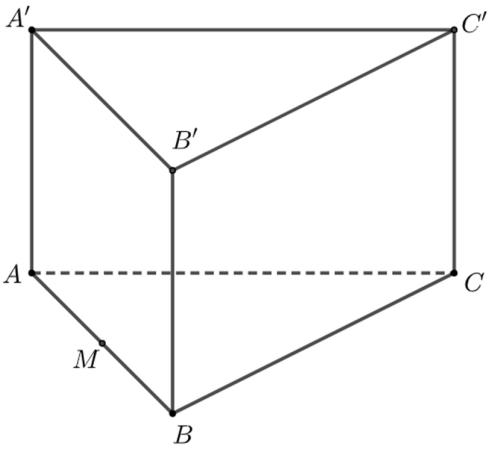
(**2p**) **a)** Arată că măsura unghiului CMD este egală cu $90°$.



(**3p**) **b)** Calculează aria triunghiului DON.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC, $AB=12\,\text{cm}$ și $AA'=3\sqrt{3}\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AB.

(2p) a) Arată că aria laterală a prismei $ABCA'B'C'$ este egală cu $108\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.



(3p) b) Determină distanța de la punctul M la planul $(A'B'C)$.

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2024 - 2025
Matematică

Model

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $\frac{30}{100}\cdot x$ se construiește în prima zi, unde x este lungimea pistei	**1p**
	$\frac{60}{100}\cdot\frac{70}{100}\cdot x=\frac{42}{100}\cdot x$ se construiește în a doua zi și, cum $\frac{42x}{100}>\frac{30x}{100}$, obținem că în a doua zi echipa a construit mai mult decât în prima zi	**1p**
	b) În a treia zi echipa a construit $\frac{42x}{100}-7$	**1p**
	$\frac{30x}{100}+\frac{42x}{100}+\frac{42x}{100}-7=x$	**1p**
	$14x=700$, de unde obținem $x=50\,\text{km}$	**1p**
2.	**a)** $x^2+x-12=x^2-3x+4x-12=$	**1p**
	$=x(x-3)+4(x-3)=(x-3)(x+4)$, pentru orice număr real x	**1p**
	b) $E(x)=\frac{(x+4)^2-(x-3)^2+49}{(x-3)(x+4)}\cdot\frac{x-3}{7}=$	**1p**
	$=\frac{14x+56}{7(x+4)}=2$, pentru orice număr real x, $x\neq -4$ și $x\neq 3$	**1p**
	$N=\sqrt{2\cdot 8}=4$, care este număr natural	**1p**

3.	**a)** $f(3)=0$	**1p**
	$f(3)\cdot f(2025)=0\cdot f(2025)=0$	**1p**
	b) $A(3,0)$ și $B(0,-6)$	**1p**
	$AM=2\cdot AO$, deci $AM=6$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABM}=\dfrac{AM\cdot OB}{2}=18$	**1p**
4.	**a)** $P_{ABCD}=2(AB+BC)=$	**1p**
	$=2(12+6)=36\,\text{cm}$	**1p**
	b) Cum CE este bisectoarea unghiului $BCD\Rightarrow \sphericalangle BCE=45^\circ$, deci triunghiul BCE este dreptunghic isoscel $\Rightarrow BE=BC=6\,\text{cm}\Rightarrow BE=AE$	**1p**
	$AC\cap BD=\{O\}$, deci punctul O este mijlocul segmentului AC $BO\cap CE=\{F\}$, deci punctul F este centrul de greutate a triunghiului ABC	**1p**
	$AF\cap BC=\{M\}$, deci punctul M este mijlocul segmentului BC, de unde obținem $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=3\sqrt{17}\,\text{cm}$	**1p**
	Cum $AF=\dfrac{2}{3}AM$, obținem $AF=2\sqrt{17}\,\text{cm}$	
5.	**a)** $CM=6\,\text{cm}$, $\sphericalangle ACB=\sphericalangle MCN=60^\circ$	**1p**
	$\sphericalangle CMN=30^\circ$, de unde obținem $CN=\dfrac{CM}{2}=3\,\text{cm}$	**1p**
	b) $AP\cap BC=\{Q\}$ și, cum CQ este mediatoarea segmentului AP, obținem $CP=CA$ și $\sphericalangle PCQ=\sphericalangle ACQ=60^\circ$	**1p**
	$\sphericalangle NCP=180^\circ-\sphericalangle PCQ-\sphericalangle ACQ=60^\circ$, deci $\sphericalangle NCP=\sphericalangle NCM$ și, cum $CP=CM$, obținem $\Delta CPN\equiv\Delta CMN$, deci $\sphericalangle CNP=\sphericalangle CNM=90^\circ$	**1p**
	$\sphericalangle MNP=\sphericalangle CNM+\sphericalangle CNP=180^\circ$, deci punctele M, N și P sunt coliniare	**1p**
6.	**a)** $V_{ABCDEFGH}=AB^3=$	**1p**
	$=6^3=216\,\text{cm}^3$	**1p**
	b) Punctul Q este mijlocul segmentului $GC\Rightarrow HQ\parallel NC$, $NC\subset(MNC)$, deci $HQ\parallel(MNC)$, de unde obținem $d(H,(MNC))=d(Q,(MNC))$	**1p**
	$QR\perp NC, R\in NC$, $MN\parallel BC$, $BC\perp(DCG)\Rightarrow MN\perp(DCG)$, deci $MN\perp QR$ Cum $MN\cap CN=\{N\}$, $MN,CN\subset(MNC)$, obținem $QR\perp(MNC)$, deci $d(Q,(MNC))=QR$	**1p**
	ΔNQC dreptunghic în Q, de unde obținem $QR=\dfrac{NQ\cdot QC}{NC}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\,\text{cm}$	**1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2024-2025

Probă scrisă
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă Ana ar primi de la bunicul ei 40 de lei, atunci Bogdan și Costin ar primi împreună de la bunicul lor 80 de lei	**1p**
	$40+80=120\neq 126$, de unde deducem că Ana nu poate primi de la bunicul ei 40 de lei	**1p**
	b) $b=c+\frac{1}{10}c=\frac{11}{10}c$, unde b și c reprezintă sumele pe care le vor primi Bogdan, respectiv Costin, de la bunicul lor	**1p**
	Suma pe care o va primi Ana este egală cu $\frac{b+c}{2}$ lei, deci $\frac{b+c}{2}+b+c=126$, de unde rezultă că $b+c=84$	**1p**
	$\frac{11}{10}c+c=84 \Rightarrow 21c=840$, deci $c=40$ de lei, de unde $b=44$ de lei	**1p**
2.	**a)** $(x-1)(x+2)=x(x+2)-(x+2)=$	**1p**
	$=x^2+2x-x-2=x^2+x-2$, pentru orice număr real x	**1p**

	b) $E(x)=\dfrac{(x-1)^2+(x+1)^2-2(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)}:\dfrac{4}{(x-1)(x+2)}=$	**1p**
	$=\dfrac{\big((x-1)-(x+1)\big)^2}{(x-1)(x+1)}\cdot\dfrac{(x-1)(x+2)}{4}=\dfrac{4}{x+1}\cdot\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{x+2}{x+1}$, pentru orice x număr real, $x\neq-2$, $x\neq-1$ și $x\neq1$	**1p**
	$E(2)\cdot E(3)\cdot\ldots\cdot E(10)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\dfrac{12}{11}=\dfrac{12}{3}=4$, deci $N=\sqrt{4}=2$, care este număr natural	**1p**
3.	**a)** Punctul $C(6,0)$ este proiecția punctului B pe axa Ox, deci $AC=4$, $BC=3$	**1p**
	$AB^2=AC^2+BC^2=16+9=25$, deci $AB=\sqrt{25}=5$	**1p**
	b) $AM=3$	**1p**
	$d(B,AM)=BC\Rightarrow\mathcal{A}_{\Delta AMB}=\dfrac{1}{2}\cdot AM\cdot BC=\dfrac{9}{2}$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta AMB}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot d(M,AB)\Rightarrow\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot5\cdot d(M,AB)$, deci $d(M,AB)=\dfrac{9}{5}=1{,}8$	**1p**
4.	**a)** $\mathcal{A}_{ABCD}=AB^2=100\text{ cm}^2$	**1p**
	$\mathcal{A}_{\Delta CDM}=\mathcal{A}_{\Delta ABM}=\dfrac{5\cdot10}{2}=25\text{ cm}^2\Rightarrow\mathcal{A}_{MBC}=100-(25+25)=50\text{cm}^2$	**1p**
	b) AM este linie mijlocie în triunghiul TBC, unde $AB\cap MC=\{T\}\Rightarrow$ punctul A este mijlocul segmentului TB, deci NA este mediană în triunghiul dreptunghic $BNT\Rightarrow NA=\dfrac{TB}{2}=10\text{cm}$	**1p**
	$TC=\sqrt{TB^2+BC^2}=10\sqrt{5}\text{cm}$, $BC^2=CN\cdot CT\Rightarrow CN=2\sqrt{5}\text{ cm}$, deci $MN=3\sqrt{5}\text{ cm}$	**1p**
	$P_{\Delta MAN}=AM+MN+NA=5+3\sqrt{5}+10=\big(15+3\sqrt{5}\big)\text{cm}$ și, cum $3\sqrt{5}=\sqrt{45}<\sqrt{49}=7$, obținem $P_{\Delta MAN}<22\text{cm}$	**1p**
5.	**a)** În triunghiul ABC dreptunghic în A, $BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=$	**1p**
	$=\sqrt{9^2+12^2}=15\text{cm}$	**1p**
	b) Punctul G este centrul de greutate a triunghiului $ABC\Rightarrow\dfrac{AG}{AE}=\dfrac{2}{3}$ și, cum $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{2}{3}$, obținem $\dfrac{AG}{AE}=\dfrac{AM}{AB}$, deci $MG\parallel BE\Rightarrow\Delta AMG\sim\Delta ABE\Rightarrow\dfrac{MG}{BE}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MG=5\text{cm}$	**1p**
	$MR\perp BP$, $R\in BP\Rightarrow MR=\dfrac{12}{5}\text{cm}$, $PE=BE-BP$ și, cum E mijlocul lui $BC\Rightarrow PE=\dfrac{5}{2}\text{cm}$	**1p**
	$MGEP$ trapez $\Rightarrow\mathcal{A}_{MGEP}=\dfrac{(MG+PE)\cdot MR}{2}=9\text{cm}^2$	**1p**
6.	**a)** CM și DM sunt înălțimi în triunghiurile echilaterale ABC și ABD, deci $CM=DM=10\sqrt{3}\text{cm}$	**1p**
	MN este înălțime în triunghiul isoscel CMD, deci $MN=\sqrt{CM^2-CN^2}=10\sqrt{2}\text{ cm}$	**1p**
	b) PN este linie mijlocie în triunghiul DBC, unde P este mijlocul lui BC, deci $PN\parallel BD$, de unde $\sphericalangle(MN,BD)=\sphericalangle(MN,PN)$	**1p**
	Cum $PN=\dfrac{BD}{2}=10\text{ cm}$, $MP=\dfrac{AC}{2}=10\text{ cm}$, rezultă că $MP^2+PN^2=MN^2$, deci triunghiul MPN este dreptunghic isoscel, cu $\sphericalangle MPN=90°$	**1p**
	Obținem $\sphericalangle(MN,PN)=\sphericalangle MNP=45°$, deci $\sphericalangle(MN,BD)=45°$	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:…….....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....……...……....
Școala de proveniență: .....…
….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

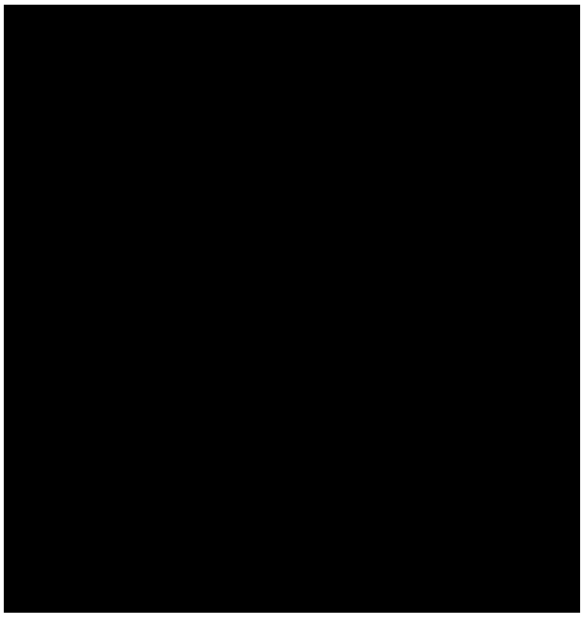
Anul școlar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $(40+2\cdot 5):5$ este: **a)** 6 **b)** 10 **c)** 38 **d)** 42
5p	**2.** Dacă $\frac{x}{9}=\frac{2}{3}$, atunci numărul x este egal cu: **a)** $\frac{27}{2}$ **b)** 6 **c)** 2 **d)** $\frac{1}{6}$
5p	**3.** Se consideră mulțimile $A=\{0,1,2,3,4,5\}$ și $B=\{2,4,6,8\}$. Reuniunea mulțimilor A și B este mulțimea: **a)** $\{2,4\}$ **b)** $\{0,1,3,5\}$ **c)** $\{1,2,3,4,5,6,8\}$ **d)** $\{0,1,2,3,4,5,6,8\}$
5p	**4.** Scrierea sub formă de fracție zecimală a fracției $\frac{5}{6}$ este: **a)** $0,8$ **b)** $0,83$ **c)** $0,8(3)$ **d)** $0,(83)$

5p **5.** Patru elevi, Alina, Bogdan, Corina și Dan, au calculat media aritmetică a numerelor $a=\sqrt{3^2+4^2}$ și $b=45$. Răspunsurile date de cei patru elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Alina	Bogdan	Corina	Dan
15	25	26	50

Rezultatul corect a fost obținut de către:

a) Alina
b) Bogdan
c) Corina
d) Dan

5p **6.** Se consideră numărul real $a=11-5\sqrt{5}$. Enunțul „Numărul real a este pozitiv.” este:

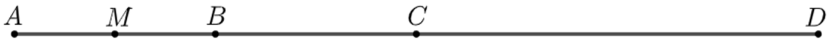
a) adevărat
b) fals

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

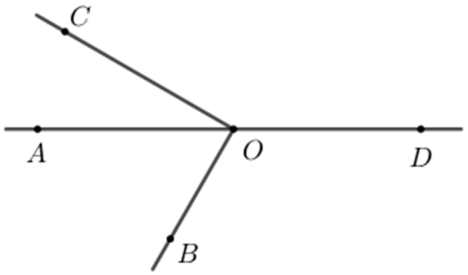
5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C și D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AC=2\cdot AB$ și $AD=2\cdot AC$. Punctul M este mijlocul segmentului AB și $AM=2\,\text{cm}$. Lungimea segmentului MD este egală cu:

a) $4\,\text{cm}$
b) $6\,\text{cm}$
c) $14\,\text{cm}$
d) $16\,\text{cm}$



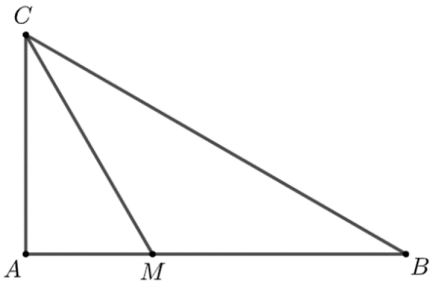
5p **2.** În figura alăturată punctele A, O și D sunt coliniare, unghiul BOC este drept, iar măsura unghiului AOC este egală cu $30°$. Măsura unghiului BOD este egală cu:

a) $120°$
b) $130°$
c) $150°$
d) $180°$

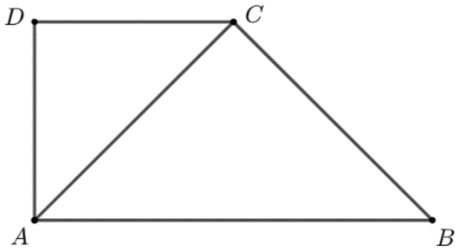


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, cu măsura unghiului ACB egală cu $60°$. Semidreapta CM este bisectoarea unghiului ACB și $CM=8\,\text{cm}$. Lungimea laturii AB este egală cu:

a) $4\sqrt{3}\,\text{cm}$
b) $8\,\text{cm}$
c) $12\,\text{cm}$
d) $8\sqrt{3}\,\text{cm}$



5p **4.** În figura alăturată este reprezentat patrulaterul $ABCD$. Triunghiurile ADC și ABC sunt dreptunghice isoscele, cu $AD = CD$ și $AC = BC$. Aria triunghiului ABC este egală cu $288\,\text{cm}^2$. Aria triunghiului ADC este egală cu:



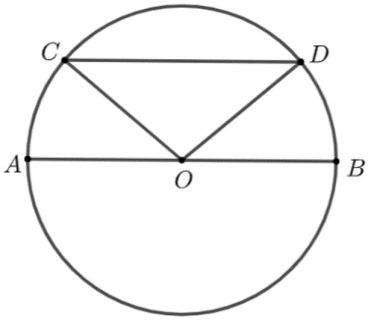
a) $72\ \text{cm}^2$

b) $144\,\text{cm}^2$

c) $288\ \text{cm}^2$

d) $576\,\text{cm}^2$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat cercul cu centrul în punctul O. Punctele A, B, C și D aparțin cercului, punctul O aparține segmentului AB și dreptele AB și CD sunt paralele. Dacă măsura arcului mic BD este egală cu $40°$, atunci măsura unghiului COD este egală cu:



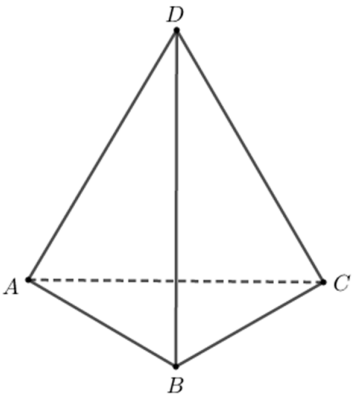
a) $40°$

b) $60°$

c) $80°$

d) $100°$

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$. Dacă $AB = 4\,\text{cm}$, atunci aria totală a tetraedrului $ABCD$ este egală cu:



a) $4\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

b) $8\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

c) $24\,\text{cm}^2$

d) $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** O echipă de muncitori a construit o pistă pentru biciclete în 3 zile. În prima zi a construit 30% din lungimea pistei, în a doua zi 60% din ce a rămas și în ultima zi cu $7\,\text{km}$ mai puțin decât în a doua zi.

(2p) a) Verifică dacă în a doua zi echipa a construit mai mult decât în prima zi. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină lungimea pistei construite de echipă în cele trei zile.

5p

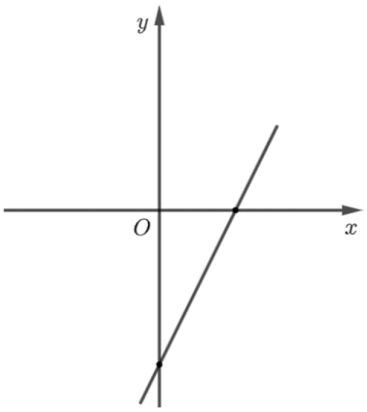
2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\dfrac{x+4}{x-3}-\dfrac{x-3}{x+4}+\dfrac{49}{x^2+x-12}\right):\dfrac{7}{x-3}$, unde x este număr real, $x\neq -4$ și $x\neq 3$.

(2p) a) Arată că $x^2+x-12=(x-3)(x+4)$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arată că numărul $N=\sqrt{E(2)+E(4)+E(6)+...+E(16)}$ este natural.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$.

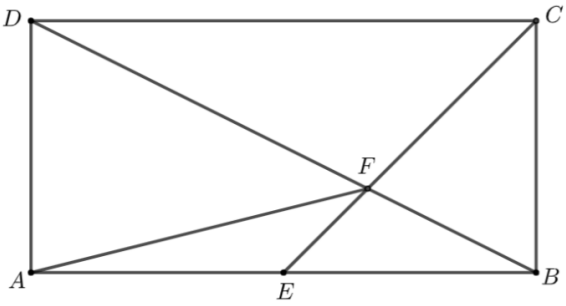
(2p) a) Arată că $f(3)\cdot f(2025)=0$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției f intersectează axele Ox și Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy în punctele A, respectiv B. Determină aria triunghiului ABM, unde punctul M este simetricul punctului A față de punctul O.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$, cu $AB = 12\,\text{cm}$ și $BC = 6\,\text{cm}$. Bisectoarea unghiului BCD intersectează latura AB în punctul E și diagonala BD în punctul F.

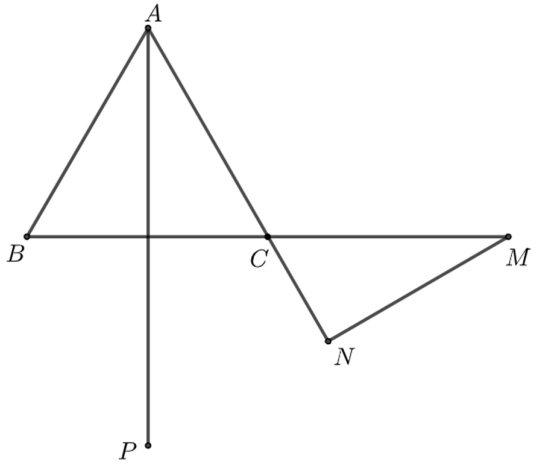
(2p) a) Arată că perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este egal cu $36\,\text{cm}$.



(3p) b) Calculează lungimea segmentului AF.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC cu $AB = 6\,\text{cm}$. Punctele B, C și M sunt coliniare și punctul C este mijlocul segmentului BM. Punctul N este proiecția punctului M pe dreapta AC, iar dreapta BC este mediatoarea segmentului AP.

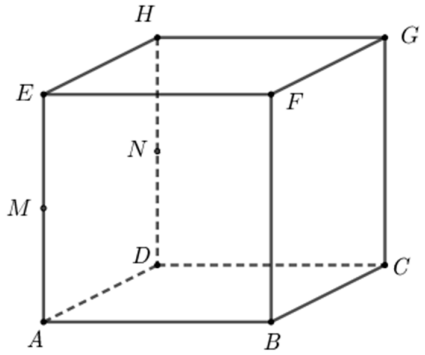
(**2p) a)** Arată că lungimea segmentului NC este egală cu $3\,\text{cm}$.



(3p) b) Demonstrează că punctele M, N și P sunt coliniare.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDEFGH$ cu $AB = 6\,\text{cm}$. Punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AE și DH.

(2p) a) Arată că volumul cubului $ABCDEFGH$ este egal cu $216\,\text{cm}^3$.



(3p) b) Calculează distanța de la punctul H la planul (CMN).

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:…….....
…….....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
…….....……..……
Școala de proveniență: .....…
…….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

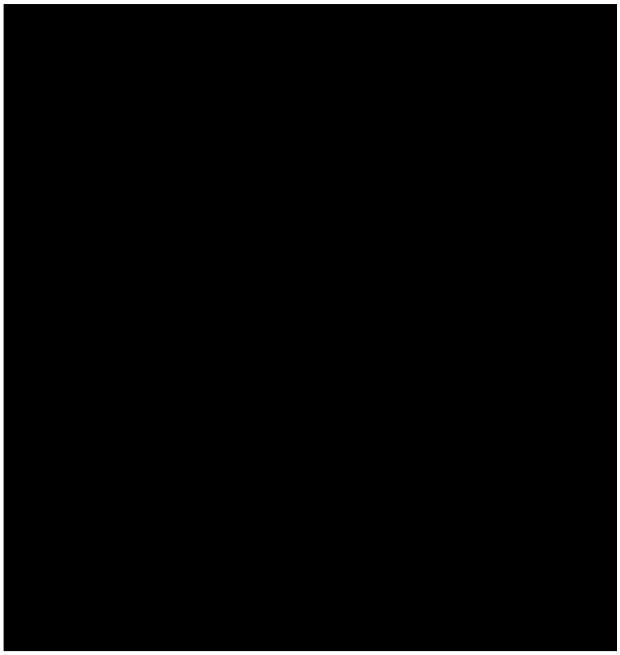
Anul școlar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $25-2\cdot 5$ este egal cu: **a)** 10 **b)** 15 **c)** 35 **d)** 115
5p	**2.** Numărul care reprezintă 10% din 50 este egal cu: **a)** 40 **b)** 10 **c)** 5 **d)** 1
5p	**3.** Într-o zi, dimineața, temperatura aerului a fost de $-1°C$, iar la prânz a fost de $+2°C$. În acea zi, temperatura măsurată la prânz a fost mai mare decât temperatura măsurată dimineața cu: **a)** $-3°C$ **b)** $-1°C$ **c)** $1°C$ **d)** $3°C$
5p	**4.** Soluția ecuației $x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ este: **a)** $\frac{1}{6}$ **b)** $\frac{1}{4}$ **c)** $\frac{1}{2}$ **d)** $\frac{3}{4}$

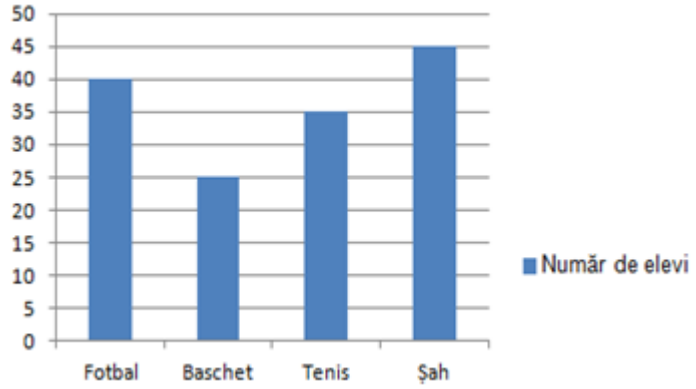
5p **5.** Patru elevi, Andreea, Iris, Mihai și Radu, calculează media aritmetică a numerelor $a=4-\sqrt{2}$ și $b=4+\sqrt{2}$. Rezultatele calculelor făcute de cei patru elevi sunt evidențiate în tabelul de mai jos:

Andreea	Iris	Mihai	Radu
4	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{14}$

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media aritmetică a numerelor a și b este:

a) Andreea
b) Iris
c) Mihai
d) Radu

5p **6.** În diagrama de mai jos sunt prezentate informații despre numărul de elevi care au făcut opțiuni pentru practicarea sporturilor de tip fotbal, baschet, tenis și șah, în cadrul unui club sportiv școlar.



Afirmația „Conform informațiilor din diagramă, în acest club sportiv școlar, numărul elevilor care au făcut opțiuni pentru practicarea fotbalului este egal cu numărul elevilor care au făcut opțiuni pentru practicarea șahului.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

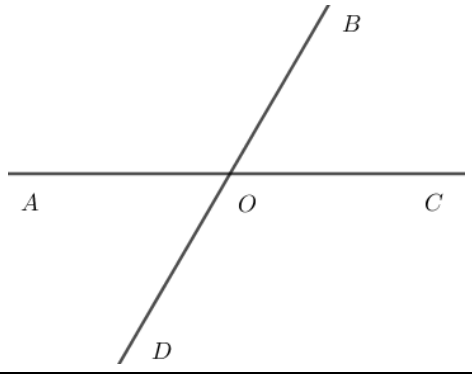
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele distincte și coliniare A, B, C și D, în această ordine. Segmentele AB, BC și CD sunt congruente, iar lungimea segmentului AD este egală cu 24 cm. Lungimea segmentului CD este egală cu:

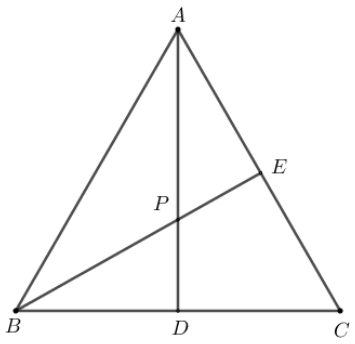
a) 4 cm
b) 6 cm
c) 8 cm
d) 12 cm

5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente suplementare AOB și BOC. Știind că $\sphericalangle BOC=60°$ și că semidreapta OD este opusă semidreptei OB, măsura unghiului DOC este egală cu:

a) 160°
b) 120°
c) 60°
d) 30°

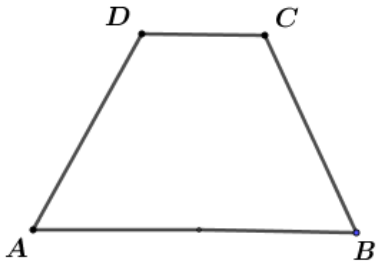


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC. Semidreapta BE este bisectoarea unghiului ABC și punctul D este mijlocul segmentului BC. Dreptele AD și BE se intersectează în punctul P. Măsura unghiului DPE este egală cu:



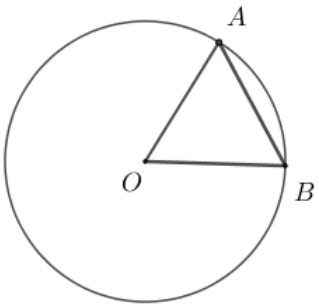
a) 30°
b) 60°
c) 120°
d) 150°

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel $ABCD$, cu $AB \| CD$, $CD = 40$ cm și $AB = 100$ cm. Lungimea liniei mijlocii a trapezului $ABCD$ este egală cu:



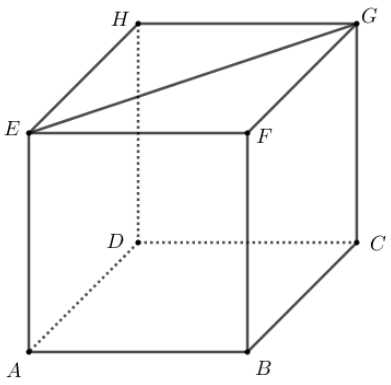
a) 20 cm
b) 50 cm
c) 70 cm
d) 140 cm

5p **5.** În figura alătură este reprezentat cercul de centru O. Punctele A și B sunt situate pe cerc, astfel încât măsura unghiului AOB este egală cu $60°$ și $AB = 12$ cm. Aria discului de centru O și rază OA este egală cu:



a) 288π cm^2
b) 144π cm^2
c) 36π cm^2
d) 24π cm^2

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul $ABCDEFGH$. Lungimea segmentului EG este egală cu $4\sqrt{2}$ cm. Suma lungimilor tuturor muchiilor cubului este egală cu:



a) 96 cm
b) 72 cm
c) 48 cm
d) 16 cm

SUBIECTUL al III-lea

Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un bunic dorește să împartă suma de 126 de lei celor trei nepoți ai săi: Ana, Bogdan și Costin. Ana va primi jumătate din suma pe care o vor primi împreună Bogdan și Costin.
(2p) a) Verifică dacă Ana poate primi de la bunicul ei 40 de lei. Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină suma pe care o va primi Bogdan de la bunicul său, știind că este cu 10% mai mare decât suma pe care o va primi Costin de la bunicul său.

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{x+1}{x-1}-2\right):\frac{4}{x^2+x-2}$, unde x este număr real, $x\neq -2$, $x\neq -1$ și $x\neq 1$.

(2p) a) Arată că $(x-1)(x+2)=x^2+x-2$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Arată că numărul $N=\sqrt{E(2)\cdot E(3)\cdot ...\cdot E(9)\cdot E(10)}$ este natural.

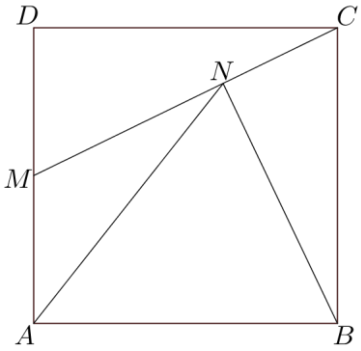
5p **3.** În sistemul de axe ortogonale xOy se consideră punctele $A(2,0)$ și $B(6,3)$.

(2p) a) Arată că $AB = 5$.

(3p) b) Calculează distanța de la punctul $M(5,0)$ la dreapta AB.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat pătratul $ABCD$, cu $AB=10\,\text{cm}$. Punctul M este mijlocul segmentului AD și punctul N este proiecția punctului B pe dreapta CM.

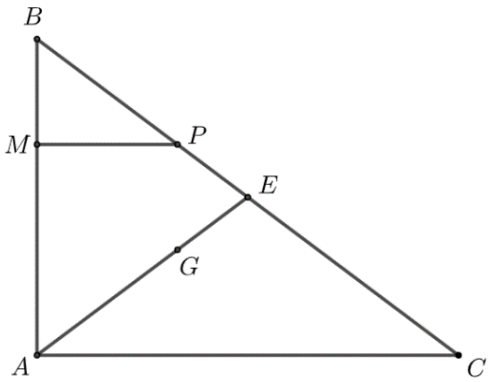
(2p) a) Arată că aria triunghiului MBC este egală cu $50\,\text{cm}^2$.



(3p) b) Arată că perimetrul triunghiului MAN este mai mic decât 22 cm.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm. Punctul M se află pe latura AB, $BM = 3$ cm. Paralela prin M la dreapta AC intersectează dreapta BC în punctul P, punctul G este centrul de greutate a triunghiului ABC și E este punctul de intersecție a dreptelor AG și BC.

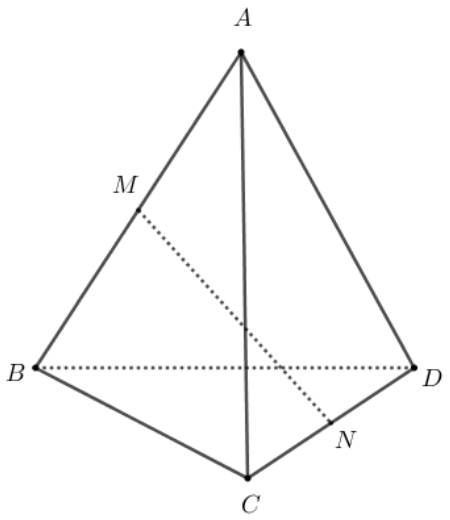
(**2p) a)** Arată că lungimea segmentului BC este egală cu 15 cm.



(3p) b) Calculează aria patrulaterului $MGEP$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$, cu $AB = 20\,\text{cm}$, iar punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AB, respectiv CD.

(2p) a) Arată că lungimea segmentului MN este egală cu $10\sqrt{2}\,\text{cm}$.



(3p) b) Determină măsura unghiului dreptelor MN și BD.

TESTARE JUDEŢEANĂ
CLASA a VIII-a
11 decembrie
Anul şcolar 2024 – 2025
Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.
SUBIECTUL I ŞI SUBIECTUL al II-lea:
• Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.
• Nu se acordă punctaje intermediare.
SUBIECTUL al III-lea:
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se acordă punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	c)	**5p**
2.	d)	**5p**
3.	d)	**5p**
4.	d)	**5p**
5.	a)	**5p**
6.	a)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	c)	**5p**
2.	a)	**5p**
3.	a)	**5p**
4.	b)	**5p**
5.	c)	**5p**
6.	a)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) $x \geq -1$ $A = [-1, \infty)$	**1p** **1p**
	b) $B = [-4, 6)$ $A \cap B = [-1, 6)$ Suma este 15	**1p** **1p** **1p**

2.	a) $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $(a - b + \sqrt{8})^{2025} = 0$	**1p** **1p**
	b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2\sqrt{7}}{5}$ $\frac{4}{5} < \frac{2\sqrt{7}}{5} < \frac{6}{5}$ $\frac{\sqrt{16}}{5} < \frac{2\sqrt{7}}{5} < \frac{\sqrt{36}}{5}$	**1p** **1p** **1p**
3.	a) $E(x) = 4x^2 + 4x + 1 - 4x^2 + 4x - 1 - 8x - 12x + 2.$ $E(x) = 2 - 12x$	**1p** **1p**
	b) $E(a) = 2 - 12a$ $2a \leq 2\sqrt{3}$ $a \in \{0, 1\}$	**1p** **1p** **1p**
4.	a) $MN // B'C$ $B'C // A'D \Rightarrow MN // A'D \subset (ADD') \Rightarrow MN // (ADD')$	**1p** **1p**
	b) $O_1O_2 // A'D // B'C$, $D'D // B'B$ $\sphericalangle(O_1O_2, DD') = \sphericalangle(B'C, B'B) = \sphericalangle BB'C$ $tg\sphericalangle BB'C = \frac{1}{4}$	**1p** **1p** **1p**
5.	a) ΔABC echilateral $\Rightarrow A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ $A=18\sqrt{3}$ cm^2	**1p** **1p**
	b) N mijlocul lui AB $BP=4\sqrt{3}\ cm \Rightarrow$ BP este înălțime în $\Delta ABC \Rightarrow$ P mijlocul lui AC NP linie mijlocie $\Rightarrow NP // BC$ şi cum $BC \subset (BCD) \Rightarrow NP // (BCD)$	**1p** **1p** **1p**
6.	a) $A'D' // B'C' \Rightarrow \sphericalangle(B'C, A'D') = \sphericalangle(B'C, B'C') = \sphericalangle B'C'B$ $\sphericalangle B'C'B = 45^0$	**1p** **1p**
	b) $MN // DC'$(reciproca teoremei lui Thales în $\Delta BDC'$) $DC' // AB' \Rightarrow MN // AB'$ $MNB'A$ trapez şi , deci AM şi B'N sunt concurente	**1p** **1p** **1p**

Prezenta lucrare conține _____pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

TESTARE JUDEȚEANĂ
CLASA a VIII-a
11 decembrie
Anul școlar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $-2\sqrt{3}+10\sqrt{6}:(-5\sqrt{2})$ este egal cu: a) 0 b) $-4\sqrt{6}$ c) $-4\sqrt{3}$ d) -4
5p	**2.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 14; 21; 42 este : a) 7 b) 14 c) 21 d) 42
5p	**3.** Cel mai mare număr întreg mai mic decât $-3\sqrt{5}$ este: a) - 8 b) - 5 c) – 6 d) – 7
5p	**4.** Scrisă sub formă de interval mulțimea $A=\{x \in R / -1< 3-2x \leq 5\}$ este: a) (-2;1) b) (-2;1] c) (-1;2)\ d) [-1:2)
5p	**5.** Patru elevi, Dan, Marius, Ion, George au calculat media geometrică a numerelor $a=6-2\sqrt{5}$ și $b=6+2\sqrt{5}$ Conform indicațiilor din tabel , dintre cei patru elevi , cel care a răspuns corect este:

	a) Dan b) Marius c) Ion **d)** George

Dan	+4
Marius	0
Ion	+6
George	+16

5p **6.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile înregistrate la ora 8 , la o stație meteo, în fiecare zi a unei săptămâni.

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (^{0}C)	-1	-8	-10	-5	1	3	8

Afirmația ”Conform indicațiilor din tabel, media aritmetică a temperaturilor pozitive este egală cu 4” este:

a) adevărată
b) falsă

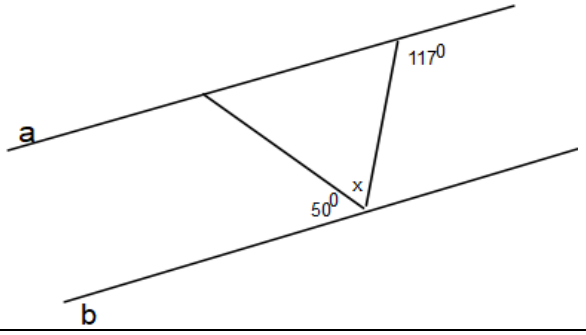
SUBIECTUL I I **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura următoare se dă segmentul AB =10 cm . Dacă M este mijlocul lui AB iar C este simetricul lui M față de B, atunci lungimea segmentului AC este egală cu:

a) 5 cm
b) 10 cm
c) 15 cm
d) 20 cm

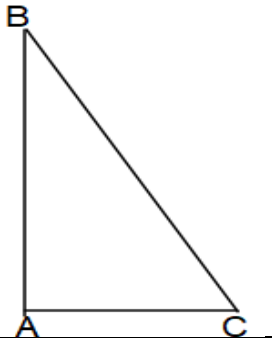
5p **2.** În figura alăturată , dreptele a și b sunt paralele.Valoarea lui x este egală cu :

a) 67^0
b) 117^0
c) 63^0
d) 113^0



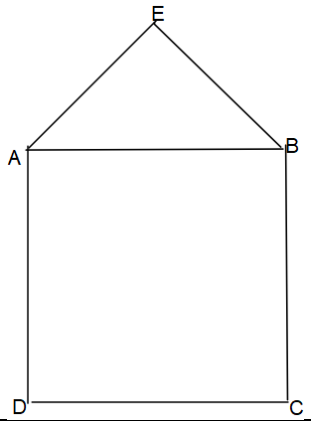
5p **3.** Figura alăturată reprezintă schema unui loc de joacă, sub forma unui triunghi ABC, dreptunghic în A. Dacă AC= 20 m și unghiul C este dublul unghiului B, atunci perimetrul locului de joacă este egal cu:

a) $(60+20\sqrt{3})$ m
b) 200 m
c) $400\sqrt{3}$ m
d) $200\sqrt{3}$ m



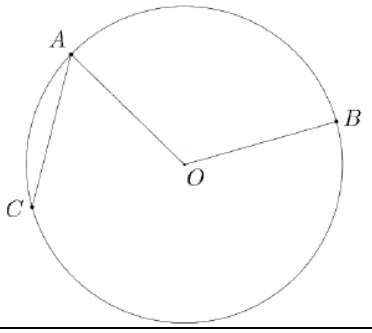
5p **4.** În figura următoare este reprezentat un depozit format din pătratul ABCD și triunghiul dreptunghic isoscel ABE cu $\measuredangle E=90^0$ și AE= 6 m. Suprafața depozitului este egală cu:

a) 108 m^2
b) 90 m^2
c) $(18\sqrt{2}+12)$ m^2
d) 54 m^2



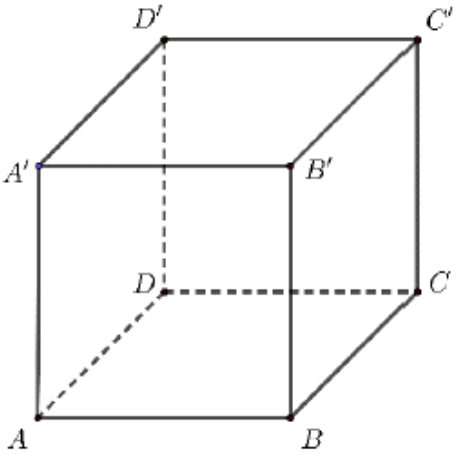
5p **5.** În figura alăturată se dă cercul $\mathcal{C}$ (O;10 cm) cu punctele A,B,C ∈ $\mathcal{C}$ (O;10 cm) și măsura arcului mic AB =120^0. Dacă punctele C, B puncte diametral opuse , atunci distanța dintre punctele A și B este egală cu:

a) 10 cm
b) 20 cm
c) $10\sqrt{3}$ cm
d) $10\sqrt{2}$ cm



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub ABCDA`B`C`D`. Suma lungimilor tuturor muchiilor cubului este egală cu 120 cm. Aria unei fețe a cubului este egală cu:

a) 100 cm^2
b) 400 cm^2
c) 600 cm^2
d) 1000 cm^3



SUBIECTUL I I I ***Scrieți rezolvările complete:*** **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră mulţimile A = { x∈R / 4·(x – 1) + 5 ≥ – 3 } şi B = { x∈R / $-2 \leq \frac{3x+2}{5} < 4$ }.

(2p) a) Deteminaţi mulţimea A.

(3p) b) Calculați suma numerelor naturale din mulțimea A∩B.

5p **2.** Fie numărul a = $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ şi b = $\sqrt{7} + \sqrt{2}$

(2p) a) Calculați valoarea numărului (a – b + $\sqrt{8}$)^{2025} .

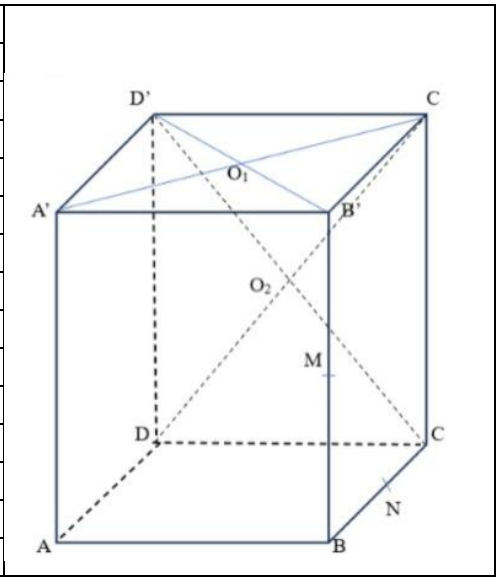
(3p) b) Arătaţi că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\in(\frac{4}{5},\frac{6}{5})$.

5p **3.** Fie $E(x) = (2x + 1)^2 – (2x - 1)^2 – 4(2x + 3x) + 2$, unde $x\in R$.
(2p) a) Arătați că $E(x) = 2 – 12x$, pentru orice număr real x **.**

(3p) b) Determinați numerele naturale a pentru care $-10a + 2 - E(a) \leq 2\sqrt{3}$.

5p **4.** In paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu CC'=12cm, AB'=$4\sqrt{10}$ si BC=3, se consideră M si N mijloacele muchiilor BB' şi , respectiv BC.

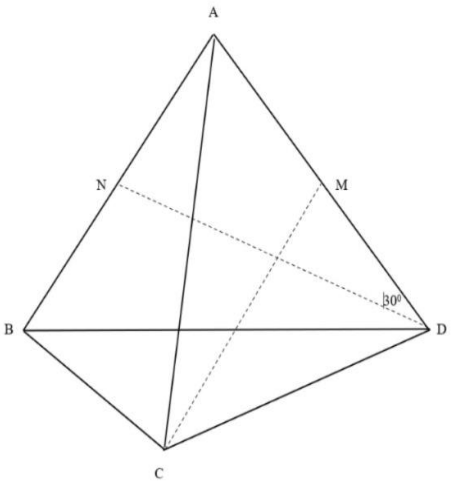
2p) a) Arătaţi ca MN//(ADD');



(3p) b) Calculati tangenta unghiului format de dreptele O_1O_2 şi DD', unde O_1 si O_2 sunt centrele feţelor A'B'C'D' şi , respectiv CDD'C'.

5p **5.** In tetraedrul regulat ABCD, cu AB=8cm, se consideră punctul N pe muchia AB astfel încât măsura unghiul ADN să fie de 30^0. Fie P un punct pe muchia AC astfel încât BP=$4\sqrt{3}cm$.

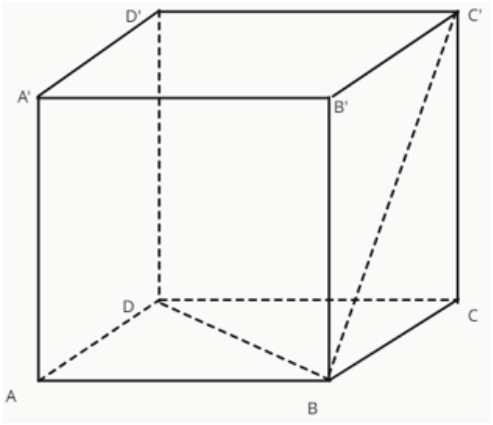
(2p) a) Arătaţi că aria triunghiului BCD este de $16\sqrt{3}$ cm^2 ;



(2p) b) Demonstraţi că NP // (BCD) .

5p **6.** Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' şi punctele M şi N pe diagonalele BD şi respectiv BC', astfel încât BM = $\frac{3}{4}$BD, C'N = $\frac{1}{4}$BC'.

(2p) a) Arătaţi că unghiul dintre dreptele B'C si A'D' are măsura de 45^0;



(3p) b) Demonstraţi că dreptele AM şi B'N sunt concurente.

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2024-2025
Matematică
BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	**a)** Dacă Maria ar cheltui 55 lei pentru primul cadou, atunci suma sa inițială ar fi $(55-30)\cdot 3=75$ lei.	**1p**
	Cum $55+70>75\Rightarrow$ nu este posibil ca ea s[fi cheltuit 55 lei pentru primul cadou.	**1p**
	b) $\frac{s}{3}+30+\frac{30}{100}\cdot\left(\frac{2s}{3}-30\right)+70=s$,unde s este suma inițială a Mariei	**1p**
	$\frac{s}{3}+\frac{s}{5}+91=s$	**1p**
	s = 195 lei	**1p**
2.	**a)** $a=5\sqrt{2}+6\sqrt{2}+9\sqrt{2}-7\sqrt{2}-8\sqrt{2}$	**1p**
	$a=5\sqrt{2}$	**1p**
	b) $b=\frac{1}{3}\cdot 24\sqrt{2}-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{7}{\sqrt{2}}-\frac{9}{\sqrt{2}}\right):\frac{1}{2}=$	**1p**

	$=8\sqrt{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot 2=5\sqrt{2}$	**1p**
	$m_g=\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$	**1p**
3.	**a)** $-2\le\frac{x+3}{5}<1\Leftrightarrow -10\le x+3<5\Leftrightarrow -13\le x<2$	**1p**
	$A=[-13;2)$.	**1p**
	b) $B=[-1;4]$	**1p**
	$A\cap B=[-1;2)$	**1p**
	$A\cap B$ conține exact 3 numere întregi: – 1, 0 și 1.	**1p**
4.	**a)** BD este perpendiculară pe AM și bisectoare în ΔBAM, deci ΔBAM este isoscel de bază AM, de unde $AB = BM$ AM este mediana corespunzătoare ipotenuzei în triunghiul ABC dreptunghic în A, deci $AM=\frac{BC}{2}=BM$, de unde $AM = MB = BA$, deci ΔBAM este echilateral.	**1p** **1p**
	b) ΔBAM echilateral $\Rightarrow \sphericalangle ABC=60^\circ\Rightarrow \sphericalangle ABD=\sphericalangle DBC=30^\circ$ În ΔABC dreptunghic în A: $\sphericalangle ABC=60^\circ\Rightarrow\sphericalangle ACB=30^\circ$, de unde $\sphericalangle DCB=\sphericalangle DBC$ și ΔDCB este isoscel cu $DC = DB$.	**1p**
	În ΔDAB dreptunghic în A: $\cos 30^\circ=\frac{AB}{BD}\Rightarrow BD=2\sqrt{3}$ cm.	**1p**
	În ΔABC dreptunghic în A: $\sphericalangle ACB=30^\circ$, deci $BC=2\cdot AB=6$ cm. $P_{\Delta CDB}=CD+DB+BC=4\sqrt{3}+6$ cm, iar $P_{\Delta CDB}<13\Leftrightarrow 4\sqrt{3}+6<13\Leftrightarrow 4\sqrt{3}<7\Leftrightarrow 48<49$.	**1p**
5.	**a)** Din $\sphericalangle DCB=90^\circ$ și $\sphericalangle FCB=60^\circ$ obținem $\sphericalangle FCD=30^\circ$, de unde $\sphericalangle FCE=30^\circ+60^\circ=90^\circ$, deci ΔFCE este dreptunghic în C. $FC = BC = CD = CE$, deci ΔFCE este dreptunghic isoscel de bază EF, de unde $\sphericalangle FEC=45^\circ$.	**1p** **1p**
	b) În ΔFCE dreptunghic isoscel de bază EF, $\sphericalangle EFC=45^\circ$, deci $\sphericalangle EFB=45^\circ+60^\circ=105^\circ$.	**1p**
	În ΔECP dreptunghic în C, $EC=\sqrt{3}$ cm și $CP = 1$ cm, de unde $EP = 2$ cm și $\sphericalangle CEP=30^\circ$	**1p**
	Cum $\sphericalangle FEP=45^\circ+30^\circ=75^\circ$, deducem că $\sphericalangle PEF+\sphericalangle EFB=75^\circ+105^\circ=180^\circ$, deci $FB\parallel EP$ și cum $FB\neq EP$, obținem că patrulaterul $BFEP$ este trapez de baze FB și EP.	**1p**
6.	**a)** $BM = MC = 10$ cm, de unde prin aplicarea teoremei lui Pitagora în ΔSMB dreptunghic în M obținem $SM^2=SB^2-BM^2=200\Rightarrow SM=10\sqrt{2}$ cm. În ΔSBC isoscel de bază BC, SM este mediană și înălțime, de unde $A_{\Delta SBC}=\frac{SM\cdot BC}{2}=\frac{10\sqrt{2}\cdot 20}{2}=100\sqrt{2}$ cm^2	**1p** **1p**
	b) Fie N mijlocul laturii AB; atunci MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, de unde $MN=\frac{AC}{2}=\frac{AB\sqrt{2}}{2}=10\sqrt{2}$ cm și $MN\parallel AC$. Cum fețele laterale ale unei piramide regulate sunt triunghiuri isoscele congruente, obținem că $SN = SM = 10\sqrt{2}$ cm.	**1p**
	$MN\parallel AC\Rightarrow \sphericalangle(SM,AC)=\sphericalangle(SM,MN)=\sphericalangle SMN$	**1p**
	$SM = MN = NS\Rightarrow \Delta SNM$ echilateral $\Rightarrow \sphericalangle SMN=60^\circ$, $\sin(\sphericalangle(SM,AC))=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.	**1p**

Prezenta lucrare conține____pagini

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2024-2025

Matematică

Numele: .....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele: .....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

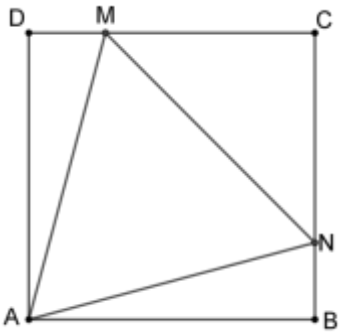
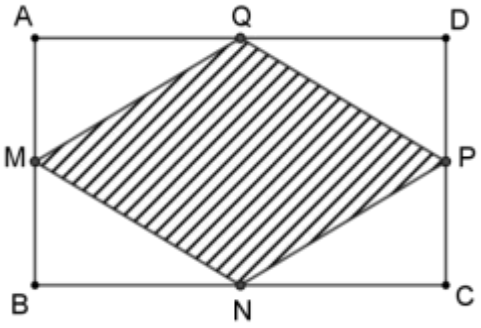
5p	**1.** Rezultatul calculului $24:6-4:2$ este egal cu: **a)** 6 **b)** 2 **c)** 0 **d)** 4
5p	**2.** Valoarea numărului real *x* din proporția $\frac{x+1}{6}=\frac{2}{3}$ este egală cu: **a)** 1 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 4
5p	**3.** Numărul pătratelor perfecte din mulțimea $\{0,1,2,...30\}$ este egal cu: **a)** 5 **b)** 6 **c)** 30 **d)** 4
5p	**4**. Suma numerelor naturale *n*, pentru care numărul real $2\sqrt{n}$ aparține intervalului $\left[\sqrt{15};3\sqrt{3}\right]$, este egală cu: **a)** 9 **b)** 15 **c)** 53 **d)** 20

5p	**5.** Suma a trei numere naturale este 54, cel mijlociu este egal cu jumătate din suma celorlalte două, iar cel mai mic este cu 28 mai mic decât suma celorlalte două numere. După ce au calculat cele trei numere, Andrei, Bogdan, Cătălin și Doru au oferit răspunsurile de mai jos: Andrei: 24, 18, 12 Bogdan: 22, 18, 14 Cătălin: 23, 18, 13 Doru: 25, 18, 11 Dintre cei patru elevi, cel care a aflat corect cele trei numere este: **a)** Andrei **b)** Bogdan **c)** Cătălin **d)** Doru
5p	**6.** Afirmația: „Numărul divizorilor naturali ai numărului 24 este 8.” este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C, D și E astfel încât B este mijlocul lui AC, C este mijlocul lui BD și D este mijlocul lui CE. Simetricul punctului D față de punctul C este: **a)** A **b)** B **c)** C **d)** E
5p	**2.** În figura alăturată, punctele *A, B, C* reprezintă trei pensiuni, iar punctul *M* de pe segmentul *BC*, situat la distanța de 4 km față de fiecare dintre cele trei pensiuni, este poziția lui Matei, un excursionist ce dorește să ajungă de la pensiunea *B* la pensiunea *A*, pe drumul cel mai scurt. Dacă $AC = 4\sqrt{3}$ km, atunci lungimea drumului pe care trebuie să-l parcurgă Matei este egală cu: **a)** 4 km **b)** $4\sqrt{3}$ km **c)** 8 km **d)** $2\sqrt{3}$ km
5p	**3.** În figura alăturată, dreptele *a* și *b* sunt paralele. Valoarea lui *x* este egală cu: **a)** 20 **b)** 25 **c)** 2,5 **d)** 12,5

5p	**4**. Fie pătratul *ABCD* și punctele *M* și *N* situate pe laturile *DC*, respectiv *BC*, astfel încât triunghiul *AMN* este echilateral. Dacă măsura unghiului *CNM* este egală cu $(3x+18)^\circ$, atunci numărul *x* este egal cu: **a)** 9 **b)** 30 **c)** 45 **d)** 15 
5p	**5.** În figura alăturată este reprezentată schematic suprafața unei grădini în care sunt plantate flori pe zona hașurată și gazon în rest. Dacă laturile grădinii au lungimile *AD* = 30 m și *DC* = 15 m, iar punctele *M*, *N*, *P* și *Q* sunt, respectiv, mijloacele laturilor dreptunghiului *ABCD*, atunci aria suprafeței gazonului este egală cu: **a)** $450\,\text{m}^2$ **b)** $200\,\text{m}^2$ **c)** $225\,\text{m}^2$ **d)** $250\,\text{m}^2$ 
5p	**6.** Pentru a împacheta o consolă PS5 Pro de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 40 cm, 30 cm și 20 cm, se utilizează o cutie, tot de forma unui paralelipiped dreptunghic, astfel încât distanța dintre pereții consolei și pereții cutiei să fie, peste tot, de 5 cm (spațiul dintre consolă și cutie se umple cu material ce poate prelua șocurile mecanice). Suprafața de carton necesară pentru confecționarea cutiei în care se ambalează consola este egală cu: **a)** $52\,\text{dm}^2$ **b)** $94\,\text{dm}^2$ **c)** $71{,}5\,\text{dm}^2$ **d)** $24\,\text{dm}^2$

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 de puncte)**

5p **1.** Maria cumpără câte un cadou pentru fiecare dintre cele trei prietene ale sale. Pentru primul cadou ea cheltuiește o treime din întreaga sumă disponibilă și încă 30 lei, pentru al doilea cadou cheltuiește 30% din rest, iar ultimul cadou costă 70 de lei. La final, Maria constată că a cheltuit toți banii.

(2p) a) Este posibil ca suma cheltuită de Maria pentru primul cadou să fie egală cu 55 de lei? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Află suma pe care a avut-o Maria la început pentru cadouri.

5p **2.** Se consideră numerele reale $a=\sqrt{50}+\sqrt{72}+3\sqrt{18}-\sqrt{98}-2\sqrt{32}$ și

$b=0,(3)\cdot 12\sqrt{8}-\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+\frac{21}{\sqrt{18}}-\frac{99}{\sqrt{242}}\right):0,5$.

(2p) a) Arată că $a=5\sqrt{2}$.

(3p) b) Calculează media geometrică a numerelor *a* și *b*.

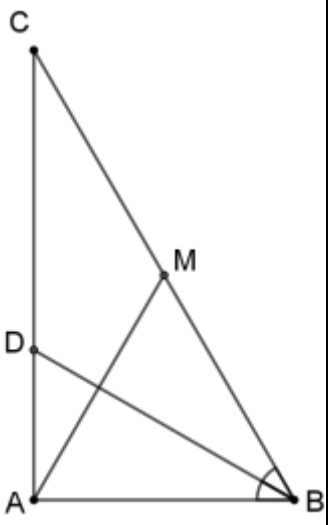
5p

3. Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,-2\leq\frac{x+3}{5}<1\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,|\,x-2\leq 2\leq x+3\right\}$.

(2p) a) Scrie ca interval mulțimea *A*.

(3p) b) Află numărul de numere întregi care se află în mulțimea $A\cap B$.

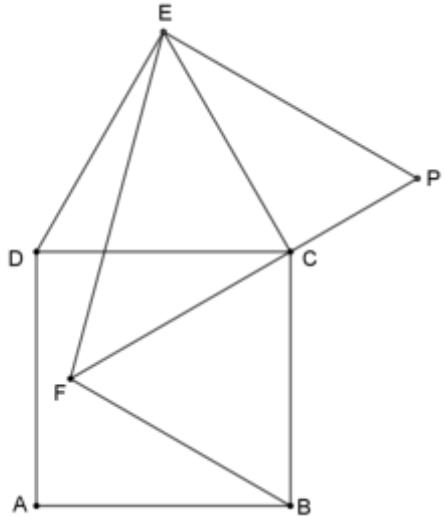
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul *ABC* dreptunghic cu $\sphericalangle A = 90°$, punctul *M* este mijlocul laturii *BC*, iar *BD* este bisectoarea unghiului *ABC*, cu $D \in AC$, astfel încât dreptele *BD* și *AM* sunt perpendiculare.



(2p) a) Arată că triunghiul *AMB* este echilateral.

(3p) b) Dacă *AB* = 3 cm, demonstrează că perimetrul triunghiului *CDB* este mai mic decât 13 cm.

5p **5**. În figura alăturată, *ABCD* este un pătrat cu latura de lungime egală cu $\sqrt{3}$ cm, iar triunghiurile echilaterale *CFB*, respectiv *CDE*, sunt construite în interiorul, respectiv în exteriorul pătratului. Punctele *F*, *C* și *P* sunt coliniare în această ordine, iar *CP* = 1 cm.

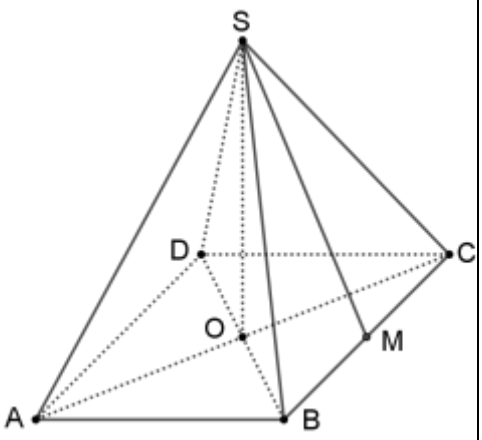


(2p) a) Arată că măsura unghiului *FEC* este egală cu $45°$.

(3p) b) Demonstrează că patrulaterul *BFEP* este trapez.

5p **6.** Darius împachetează un cadou într-o cutie de forma unei piramide patrulatere regulate *SABCD*, cu $SA = 10\sqrt{3}$ cm și *AB* = 20 cm. Notăm cu *M* mijlocul muchiei *BC*.

(2p) a) Arată că aria uneia dintre fețele laterale ale cutiei este egală cu $100\sqrt{2}$ cm^2.



(3p) b) Află sinusul unghiului determinat de dreptele *SM* și *AC*.

Prezenta lucrare conține_____ pagini

Numele: .....

.....

Prenumele :.....

.....

Școala de proveniență: .....

.....

Centrul de examen:.....

Localitatea: .....

Județul: .....**……**

Nume și prenume asistent	Semnătura

SIMULARE JUDEȚEANĂ

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII

CLASEI a VIII-a

Februarie 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

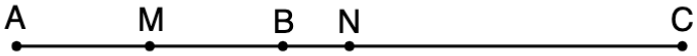
5p	**1.** Rezultatul calculului $40 - 2 \cdot 3^2$ este: **a)** 4 **b)** 22 **c)** 342 **d)** 28
5p	**2.** Numărul întreg x care verifică ecuația $2^{x-6} = 1$ este: **a)** 0 **b)** -6 **c)** 6 **d)** 2
5p	**3.** Suma numerelor naturale prime, mai mici decât 10, este: **a)** 25 **b)** 18 **c)** 17 **d)** 12
5p	**4.** Ordinea crescătoare a numerelor $x = -3\sqrt{5},\ y = -5\sqrt{3}$ și $z = -2\sqrt{15}$ este: **a)** $y; z; x$ **b)** $x; y; z$ **c)** $x; z; y$ **d)** $z; y; x$

5p	**5.** Calculând 15% din 420 se obține: **a)** 60 **b)** 42 **c)** 62 **d)** 63
5p	**6.** Andrei afirmă că valoarea absolută a numărului -8,2 este 8,2. Afirmația lui Andrei este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

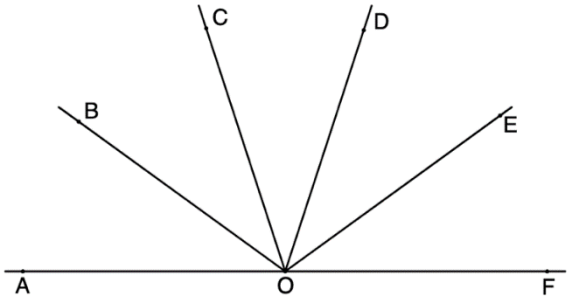
5p **1.** În figura alăturată, punctele A, B și C sunt coliniare în această ordine, astfel încât $AB = 2\ cm$ și $BC = 3\ cm$. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB, respectiv AC. Lungimea segmentului MN este egală cu:



a) 0,5 cm
b) 1 cm
c) 1,5 cm
d) 2 cm

5p **2.** În figura alăturată, unghiurile AOB, BOC, COD, DOE și EOF sunt congruente, astfel încât punctele A, O și F sunt coliniare.

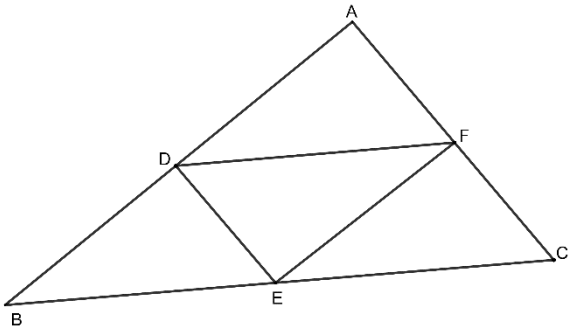
Măsura unghiului BOD este egală cu:



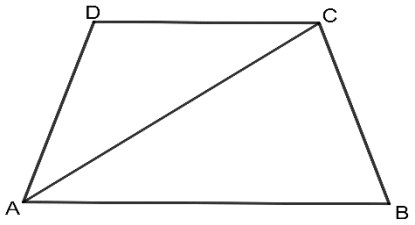
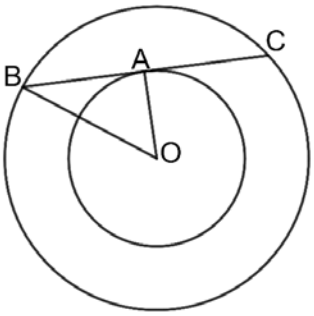
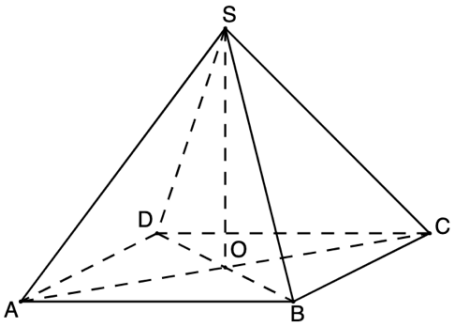
a) 90°
b) 72°
c) 36°
d) 30°

5p **3.** Punctele D, E și F sunt mijloacele laturilor triunghiului ABC cu perimetrul egal cu 36 cm.

Perimetrul triunghiului DEF este egal cu:



a) 12 cm
b) 16 cm
c) 24 cm
d) 18 cm

5p	**4.** Trapezul $ABCD$ are baza mare AB egală cu diagonala AC și $AD=DC=CB$. Măsura unghiului ABC este egală cu: **a)** 60° **b)** 75° **c)** 36° **d)** 72° 
5p	**5.** În figura alăturată sunt reprezentate două cercuri concentrice de centru O și raze OA și OB. Coarda BC este tangentă în punctul A la cercul mai mic. Știind că $OA = 6\ cm$ și $OB=10\ cm$, lungimea segmentului BC este egală cu: **a)** $4\sqrt{34}\ cm$ **b)** $8\sqrt{3}\ cm$ **c)** $16\ cm$ **d)** $10\sqrt{2}\ cm$ 
5p	**6.** Piramida patrulateră regulată $SABCD$ are toate muchiile congruente. Măsura unghiului dintre dreptele SA și BC este de: **a)** 30° **b)** 60° **c)** 90° **d)** 120° 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p	**1.** Media aritmetică a două numere naturale este 25. Împărțind un număr la celălalt, se obține câtul 11 și restul egal cu 2. **(2p) a)** Poate fi numărul mai mare egal cu 45? Justificați răspunsul.

(3p) b) Aflați cele două numere.

5p **2.** Fie numărul $a=\frac{2}{3\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}-\left(\sqrt{1,8}\right)^{-1}$

(2p) a) Arătați că $a=-1$.

(3p) b) Dacă $b=2\sqrt{3}-5$, calculați $\left(6a-b+2\sqrt{3}\right)^{2023}$.

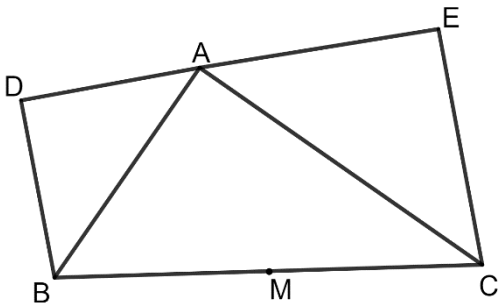
5p **3.** Fie $E(x)=\left(\frac{x-6}{x^2-25}+\frac{x}{x-5}-\frac{2}{x+5}\right):\frac{2x+4}{x^2-25}$, $x\in\mathcal{R}-\{-5;-2;5\}$

(2p) a) Arătați că $E(x)=\frac{x+2}{2}$.

(3p) b) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația $|4\cdot E(x)-5|=5$.

5p **4.** În exteriorul triunghiului dreptunghic *ABC*, cu catetele *AB=12 cm* și *AC=16 cm*, se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele *ABD* și *ACE* cu ipotenuzele *AB* și respective *AC*.

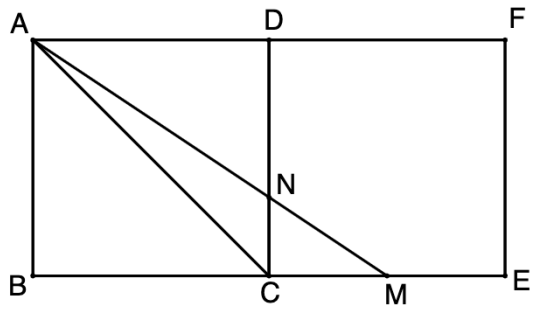
(2p) a) Arătați că punctele D, A și E sunt puncte coliniare.



(3p) b) Dacă *M* este mijlocul laturii *BC*, $DM \cap AB = \{P\}$ $şi$ $EM \cap AC = \{Q\}$, calculați aria patrulaterului *APMQ*.

5p **5.** În figura alăturată sunt reprezentate două pătrate, $ABCD$ și $CDFE$, având laturile de $18\ cm$. Punctul M este mijlocul lui CE, iar $AM \cap CD = \{N\}$.

(2p) a) Arătați că $NC = 6\ cm$.

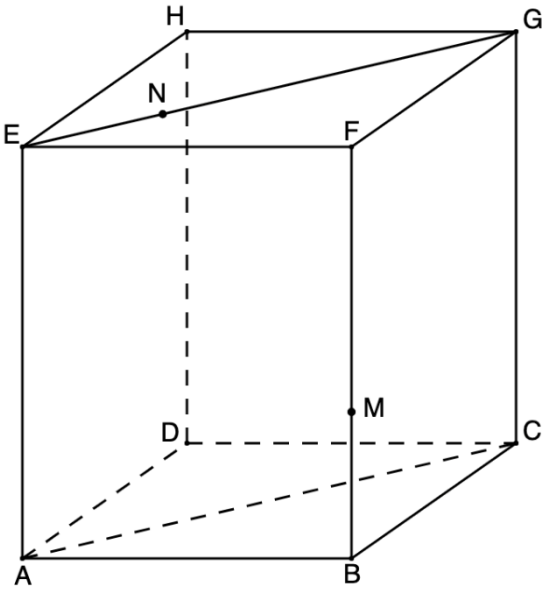


(3p) b) Calculați sinusul unghiului CAM.

5p

6. În figura alăturată este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDEFGH$ cu $AB = 20\ cm$, $BC = 15\ cm$ și $ACGE$ este pătrat.

(2p) a) Arătați că $AE = 25\ cm$.



(3p) b) Punctele M și N aparțin segmentelor BF și respectiv EG, astfel încât $BM = EN = 5\ cm$. Calculați tangenta unghiului format de dreapta *MN* cu planul (*BFC*)

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

ANUL ȘCOLAR 2022 - 2023

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

VARIANTA 2

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea:

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL II **(30 de puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**c)**	**5p**

SUBIECTUL III **(30 de puncte)**

1.	**a)** $25=3\cdot 8+1$, restul împărțirii lui 25 la 3 este 1 $1\neq 4$, deci nu este posibil să fie 25 de elevi în clasă	**1p** **1p**
	b) Notăm cu b numărul băncilor din parc și cu e numărul elevilor din clasă; $3b+4=e$ $5(b-2)+2=e$	**1p** **1p** **1p**

	$3b+4=5(b-2)+2 \Leftrightarrow 3b+4=5b-10+2 \Leftrightarrow b=6; e=22$	
2.	**a)** $E(x)=(x+3-x-2)(x+3+x+2)=2x+5$	**1p**
	$E(\sqrt{3}-1)=2(\sqrt{3}-1)+5=2\sqrt{3}-2+5=2\sqrt{3}+3$	**1p**
	b) $E(1)=2\cdot 1+5; E(2)=2\cdot 2+5; \ldots; E(n)=2\cdot n+5$	**1p**
	$A=2(1+2+\ldots+n)+5\cdot n+9=2\cdot\frac{n(n+1)}{2}+5\cdot n+9=n^2+n+5\cdot n+9$	**1p**
	$A=n^2+6n+9=(n+3)^2$ pătrat perfect	**1p**
3.	**a)** $-3<2x+3<3\Rightarrow A=(-3,0)$; $-1<\frac{2x+5}{3}<1\Rightarrow B=(-4,-1)$	**1p**
	$(A\cup B)\cap\mathbb{Z}=(-4,0)$; suma elementelor va fi $-3-2-1=-6$	**1p**
	b) $\left\|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right\|=-\sqrt{2}+\sqrt{3}; \frac{12}{\sqrt{48}}=\frac{12}{4\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$	**1p**
	$2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}-2(-\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$	**1p**
	$-2\sqrt{3}=-\sqrt{12}\in(-\sqrt{16},-1)\Leftrightarrow b=-2\sqrt{3}\in(-4,-1)$	**1p**
4.	**a)** ΔMET obtuzunghic, $A_{\Delta MET}=\frac{ET\cdot MV}{2}$, unde $MV\perp ET$	**1p**
	$A_{\Delta MET}=\frac{8\cdot 10\sqrt{3}}{2}=40\sqrt{3}\ cm^2$	**1p**
	b) Construim $TS\perp MA$; în $\Delta TAS, \sphericalangle A=60^0, tg60^0=\frac{TS}{SA}\Rightarrow SA=10\ cm$	**1p**
	Construim $EN\perp MA$, $ENST$ - dreptunghi, $EN=TS$; $MN=6\ cm, MA=24\ cm$	**1p**
	$A_{MATE}=\frac{(MA+TE)\cdot TS}{2}=160\sqrt{3}\ cm^2$	**1p**
5.	**a)** $\sphericalangle FAB=90^0$ (jumătate din măsura arcului de cerc FNB)	**1p**
	$\Delta FOA\equiv\Delta FON(L.L.L.)\Rightarrow\sphericalangle AFO\equiv NFO\Rightarrow FO$ bisectoarea $\sphericalangle AFN; O, M\in FB, \Delta AFN$ isoscel $\Rightarrow FM$ înălțime $\Rightarrow FM\perp AN$	**1p**
	$\sphericalangle FAB\equiv\sphericalangle FMA, \sphericalangle AFB\equiv\sphericalangle MFA\Rightarrow\Delta FAB\sim\Delta FMA(U.U.)$	
	b) În $\Delta FAB, \sphericalangle A=90^0, AB=6\ cm$	**1p**
	$AM\perp FB\Rightarrow AM=\frac{AB\cdot AF}{FB}=4,8\ cm$	**1p**
	$FB\perp AN\Rightarrow AM\equiv MN\Rightarrow AN=2\cdot AM=9,6\ cm$	**1p**

6.	**a)** $\frac{ME}{MA}=\frac{MF}{MB}=\frac{1}{4}\Rightarrow EF \parallel AB; AB\subset(ABC)\Rightarrow EF\parallel(ABC)$ $\frac{MG}{MC}=\frac{MF}{MB}=\frac{1}{4}\Rightarrow FG\parallel BC; BC\subset(ABC)\Rightarrow FG\parallel(ABC); EF\cap FG=\{F\}; EF, FG\subset(EFG)$ Finalizare	**1p** **1p**
	b) $EC\cap AG=\{P_1\}; EG\parallel AC\Rightarrow \Delta EP_1G\sim\Delta CP_1A\Rightarrow \frac{EG}{AC}=\frac{EP_1}{P_1C}=\frac{GP_1}{P_1A}=\frac{1}{4}$ $EC\cap BH=\{P_2\}; EH\parallel BC\Rightarrow \Delta EHP_2\sim\Delta CBP_2\Rightarrow \frac{EH}{CB}=\frac{EP_2}{P_2C}=\frac{HP_2}{P_2B}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow P_1=P_2$ $HB\cap FD=\{P_3\}; HF\parallel BD\Rightarrow \Delta HFP_3\sim\Delta BDP_3\Rightarrow \frac{HF}{BD}=\frac{HP_3}{P_3B}=\frac{FP_3}{P_3D}=\frac{1}{4}$ $\frac{HP_2}{P_2B}=\frac{1}{4}$ $\Rightarrow P_2=P_3$ $P_1=P_2=P_3\Rightarrow$ dreptele AG, BH, CE și DF sunt concurente	**1p** **1p** **1p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2024 - 2025
Matematică

Simulare

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea:

- Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.
- Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al III-lea

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5 p**
2.	**d)**	**5 p**
3.	**c)**	**5 p**
4.	**c)**	**5 p**
5.	**d)**	**5 p**
6.	**b)**	**5 p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5 p**
2.	**c)**	**5 p**
3.	**b)**	**5 p**
4.	**d)**	**5 p**
5.	**d)**	**5 p**
6.	**d)**	**5 p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $48\cdot 5=240(lei)$	**1p**
	$645-240=405(lei)$, care nu este multiplu de 10, deci nu pot fi 48 bancnote de 5 lei.	**1p**
	b) Notăm cu x numărul de bancnote de 5 lei și cu y numărul de bancnote de 10 lei.	**1p**
	Avem $5x+10y=645$ și $x+y=70$	**1p**
	$y=59$	**1p**
	$x=11$	
2.	**a)** $E(-1)=(-1+2)^2-2(-1+2)+(1+1)(1-1)$	**1p**
	$E(-1)=-1$	**1p**
	b) $E(x)=2x+1$	**1p**
	$\frac{3}{E(n)}=\frac{3}{2n+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow(2n+1)/3$	**1p**
	$n\in\{-2,-1,0,1\}$ dar $n\in\mathbb{N}$, deci $n\in\{0,1\}$	**1p**

3.	**a)** $\lvert 2x-3\rvert \le 9$ implică $-9 \le 2x-3 \le 9$ și de aici rezultă că $-3 \le x \le 6$	**1p**
	$A=[-3,6]$ și suma numerelor întregi din A este 15.	**1p**
	b) $3x+7<16$	**1p**
	$B=(-\infty,3)$	**1p**
	$A \cap B=[-3,3)$	**1p**
4.	**a)** Aflăm $MB=30\ m$ și cu teorema înălțimii $CM^2=AM\cdot MB$ avem $CM=30\sqrt{3}\ m$	**1p**
	$A_{ABCD}=2700\sqrt{3}\ m^2$ și obținem $A_{ABCD}<0,5\ ha$	**1p**
	b) $BM=MN=30\ m$ și $BN=60\ m$. Cum $DC \parallel NB$ și $DC=NB$ avem $DCBN$ paralelogram, deci $DN \parallel BC$	**1p**
	Cum $DN \parallel BC$ și $AC \perp BC$, obținem $DN \perp AC$	**1p**
	Din $DC=AN=60\ m$ și $DC \parallel AN$, $ANCD$ paralelogram și $DN \perp AC$ ceea ce implică faptul că $ANCD$ este romb, deci (DN este bisectoarea unghiului ADC.	**1p**
5.	**a)** În ΔABC aplicăm teorema lui Pitagora și obținem $BC=13\ cm$	**1p**
	$\sin(\sphericalangle ACB)=\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{5}{13}$	**1p**
	b) $DC=3AD$ și $AC=12\ cm$ rezultă $CD=9\ cm$	**1p**
	$\Delta CED \sim \Delta CAB$ (cazul U.U.) și de aici $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{DE}{AB}$	**1p**
	$DE=\dfrac{45}{13}\ cm$	**1p**
6.	**a)** AM și RT necoplanare. Cum $AG \parallel RT \Rightarrow$	**1p**
	$m(\sphericalangle AM,RT)=m(\sphericalangle AM,AG)=60^\circ$, pentru că ΔMAG este echilateral	**1p**
	b) Cea mai scurtă distanță dintre A și T este AT, pe desfășurarea suprafeței laterale a cubului de latură $2\sqrt{2}\ m$	**1p**
	În ΔAGT aplicăm teorema lui Pitagora și avem $AT=\sqrt{40}\ m$	**1p**
	Prin urmare $AT<7\ m$	**1p**

Prezenta lucrare conține____pagini

Numele:…….....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de provenienţă: …….....
.....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

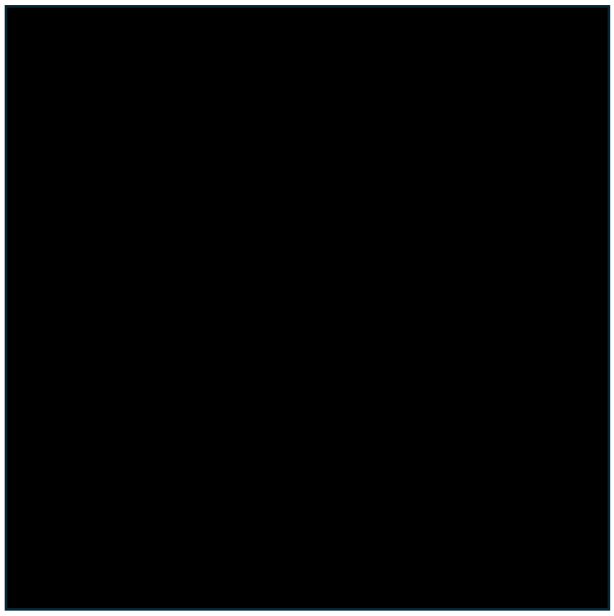
Anul școlar 2024 – 2025

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA(CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA(CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA(CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. ***(30 de puncte)***

5p	**1.** Cel mai mic număr întreg din intervalul $(-2,5)$ este: **a)** -2 **b)** -1 **c)** -3 **d)** 4
5p	**2.** Calculând 10% din 2400, obținem: **a)** 24 **b)** $2,4$ **c)** $0,24$ **d)** 240
5p	**3.** Dezvoltarea expresiei $(2+x)^2$ este egală cu: **a)** $4+x^2$ **b)** $4+2x+x^2$ **c)** x^2+4x+4 **d)** $4-4x+x^2$
5p	**4.** Diferența dintre opusul numărului 2 și inversul numărului $\frac{1}{2}$ este egală cu: **a)** $-\frac{5}{2}$ **b)** 0 **c)** -4 **d)** 4

5p **5.** Patru elevi calculează produsul numerelor $-2\sqrt{2}, -3\sqrt{6}$ și $\sqrt{12}$ și obțin rezultatele înregistrate în tabelul alăturat.

Cristi	Delia	Maria	Bogdan
-72	$-6\sqrt{12}$	$6\sqrt{12}$	72

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect produsul celor trei numere este:

a) Cristi
b) Delia
c) Maria
d) Bogdan

5p **6.** O lucrare este finalizată de 8 muncitori în 6 ore. Mihai afirmă că 4 muncitori vor termina aceeași lucrare în 3 ore. Afirmația lui Mihai este:

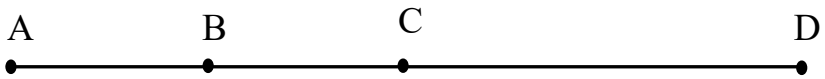
a) Adevărată
b) Falsă

SUBIECTUL AL II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. ***(30 de puncte)***

5p **1.** În figura alăturată punctele A, B, C, D sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = 6\ cm$, B este mijlocul segmentului AC și punctul D este simetricul lui A față de punctul C. Lungimea segmentului AD este egală cu:

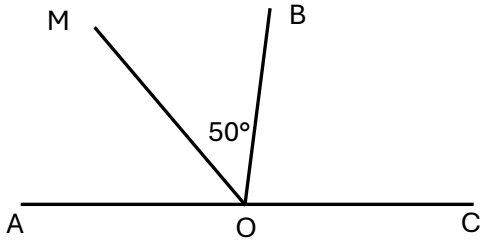
a) $24\ cm$
b) $18\ cm$
c) $12\ cm$
d) $6\ cm$



5p **2.** Unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ sunt adiacente și suplementare.

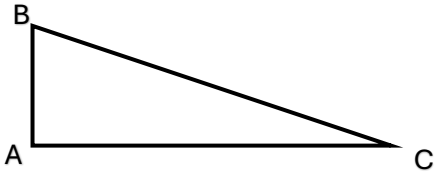
Dacă semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și $m(\sphericalangle MOB) = 50^\circ$, atunci măsura unghiului BOC este egală cu:

a) 100°
b) 130°
c) 80°
d) 50°



5p **3.** În triunghiul ABC avem $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$, $m(\sphericalangle B) = 60^\circ$, $AC = 6$. Atunci aria triunghiului ABC este egală cu:

a) $2\sqrt{3}$
b) $6\sqrt{3}$
c) 18
d) $12\sqrt{3}$



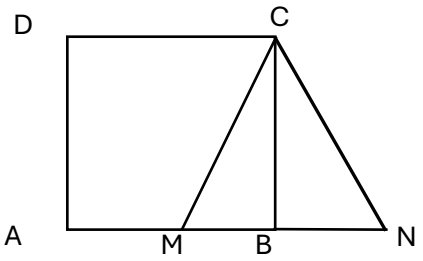
5p **4.** În figura alăturată sunt reprezentate pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral CMN, unde $M, N \in AB$. Dacă $MC = 4\,cm$, atunci aria pătratului este egală cu:

a) $20\,cm^2$

b) $4\sqrt{3}\,cm^2$

c) $16\,cm^2$

d) $12\,cm^2$



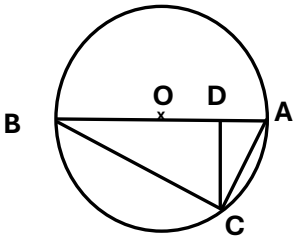
5p **5.** Punctele A, B și C sunt situate pe un cerc de centru O, astfel încât punctele A și B sunt diametral opuse și măsura arcului mic AC este egală cu 80°. Dacă punctul D este piciorul perpendicularei din C pe AB, atunci măsura unghiului ACD este egală cu:

a) 60°

b) 30°

c) 80°

d) 40°



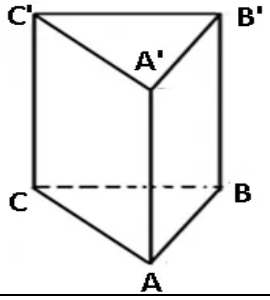
5p **6.** În figura alăturată este o cutie în formă de prismă triunghiulară regulată dreaptă $ABCA'B'C'$. Dacă $AA' = 20\,cm$ și triunghiul ABC are aria egală cu $36\sqrt{3}\,cm^2$, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor cutiei este egală cu:

a) $60\,cm$

b) $96\,cm$

c) $120\,cm$

d) $132\,cm$



SUBIECTUL AL III-lea

Scrieţi rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Ștefan are suma de 645 lei în bancnote de 5 lei și de 10 lei.

(2p) a) Este posibil ca Ștefan să aibă 48 de bancnote de 5 lei? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Știind că Ștefan are 70 de bancnote, aflați numărul de bancnote de 10 lei.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(x+2\right)^2-2(x+2)+(1-x)(1+x)$, unde x este număr real.

(2p) a) Calculează $E(-1)$.

(3p) b) Determină $n\in\mathbb{N}$, pentru care $\dfrac{3}{E(n)}\in\mathbb{Z}$.

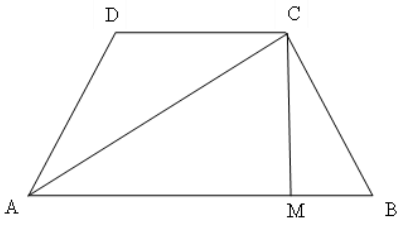
5p **3** Se consideră mulțimile $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|2x-3|+3\leq 12\right\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,\dfrac{3x+7}{8}<2\right\}$.

(2p) a) Calculați suma numerelor întregi din A.

(3p) b) Calculaţi $A\cap B$.

5p **4.** În figura alăturată este schița unei grădini în formă de trapez isoscel $ABCD$, având $AB = 120\ m$, $CD = 60\ m$, AC perpendiculară pe BC, iar punctul M este proiecția punctului C pe AB.

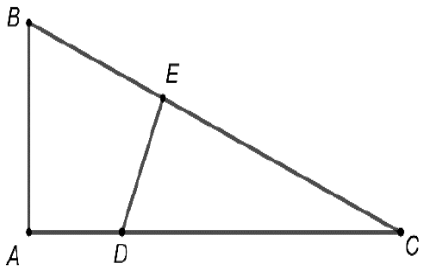
(2p) a) Arătați că aria grădinii este mai mică decât o jumătate de hectar.



(3p) b) Dacă N este simetricul lui B față de M, demonstrează că DN este bisectoarea unghiului ADC.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A, $AB = 5\,cm$ și $AC = 12\,cm$. Punctul D aparține segmentului AC astfel încât $DC = 3AD$. Perpendiculara din punctul D pe dreapta BC intersectează latura BC în punctul E.

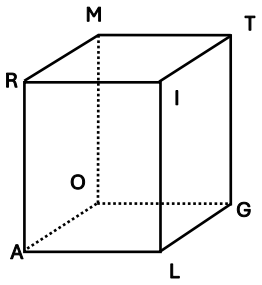
(2p) a) Arată că sinusul unghiului ACB este egal cu $\frac{5}{13}$.



(3p) b) Aflați lungimea segmentului DE.

5p **6.** În cubul *ALGORITM* din figura de alăturată, suma tuturor muchiilor este egală cu $24\sqrt{2}$ *m.*

(2p) a) Calculați măsura unghiului format de dreptele *AM* și *RT*.



(3p) b) Arătați că distanța cea mai scurtă de la vârful *A* la vârful *T*, mergând pe suprafața exterioară a cubului, este mai mică decât 7 m.

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\left(4+\sqrt{3}\right)=12+3\sqrt{3}$	**2p**
	$12+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=12\in\mathbb{N}$	**3p**
2.	$f(1)+f(2)+...+f(10)=2\left(1+2+...+10\right)+30=$	**2p**
	$=140$	**3p**
3.	$x^2+8=6x\Rightarrow x^2-6x+8=0$	**2p**
	Rezultă $x_1=2$ şi $x_2=4$, care verifică ecuaţia	**3p**
4.	Se notează cu x preţul înainte de scumpire $\Rightarrow x+30\%\cdot x=325$	**2p**
	$x=250$	**3p**
5.	R mijlocul lui $(PQ)\Rightarrow x_R=\frac{x_P+x_Q}{2}$ şi $y_R=\frac{y_P+y_Q}{2}$	**1p**
	$x_Q=5$	**2p**
	$y_Q=3$	**2p**
6.	$\sin 170^\circ=\sin 10^\circ$	**2p**
	$\sin 10^\circ+\sin 30^\circ-\sin 170^\circ=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6-2=$	**3p**
	$=4$	**2p**
b)	$B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$	**2p**
	$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow B\cdot A-A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
c)	$\det\left(A+xB\right)=\begin{vmatrix}-3 & 1+x\\ 2+x & -2\end{vmatrix}=-x^2-3x+4$	**3p**
	$x^2+3x-4=0\Leftrightarrow x_1=-4$ şi $x_2=1$	**2p**
2.a)	$x\circ 3=3x-3(x+3)+12=3$, pentru orice număr real x	**2p**
	$3\circ x=3x-3(3+x)+12=3\Rightarrow x\circ 3=3\circ x=3$, pentru orice număr real x	**3p**
b)	$x\circ x=x^2-6x+12$	**1p**
	$x^2-6x+12=x\Rightarrow x^2-7x+12=0$	**2p**
	$x_1=3$ şi $x_2=4$	**2p**

c)	$1\circ 2\circ ...\circ 2014=(1\circ 2)\circ 3\circ (4\circ 5\circ ...\circ 2014)=$ $=3\circ (4\circ 5\circ ...\circ 2014)=3$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(e^x\right)'-x'=$ $=e^x-1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$y-f(0)=f'(0)(x-0)$ $f(0)=1$, $f'(0)=0\Rightarrow$ ecuaţia tangentei este $y=1$	**2p** **3p**
c)	$f'(0)=0$; $f'(x)<0$, pentru $x\in(-\infty,0)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(0,+\infty)$ $f(x)\geq f(0)\Rightarrow e^x\geq x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
2.a)	$\int_1^2\left(3-f(x)\right)dx=\int_1^2\frac{1}{x}dx=$ $=\ln x\Big\vert_1^2=\ln 2$	**2p** **3p**
b)	$f(x)=3-\frac{1}{x}\Rightarrow$ o primitivă F a funcţiei f este de forma $F(x)=3x-\ln x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$ $F(1)=3\Leftrightarrow c=0\Rightarrow F(x)=3x-\ln x$	**3p** **2p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2(3x-1)^2\,dx=\pi\int_1^2\left(9x^2-6x+1\right)dx=$ $=\pi\left(3x^3-3x^2+x\right)\Big\vert_1^2=13\pi$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $3\left(4+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}$ este natural.

5p **2.** Calculaţi $f(1)+f(2)+\ldots+f(10)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7\left(x^2+8\right)=\log_7\left(6x\right)$.

5p **4.** După o scumpire cu 30%, preţul unui obiect este 325 de lei. Determinaţi preţul obiectului înainte de scumpire.

5p **5**. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(1,3)$ şi $R(3,3)$. Determinaţi coordonatele punctului Q, ştiind că R este mijlocul segmentului PQ.

5p **6.** Arătaţi că $\sin 10^\circ+\sin 30^\circ-\sin 170^\circ=\frac{1}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Arătaţi că $B\cdot A-A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det\left(A+xB\right)=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ 3=3\circ x=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=x$.

5p **c)** Calculaţi $1\circ 2\circ\ldots\circ 2014$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $e^x\geq x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_1^2\left(3-f(x)\right)dx$.

5p **b)** Determinaţi primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f pentru care $F(1)=3$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Prezenta lucrare conține _____ pagini.

Numele:.....

.....

Inițiala prenumelui tatălui: .....

Prenumele:.....

.....

Școala de proveniență: .....

.....

Centrul de examen: .....

Localitatea: .....

Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2024-2025

Matematică

Decembrie 2024

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore**

SUBIECTUL I

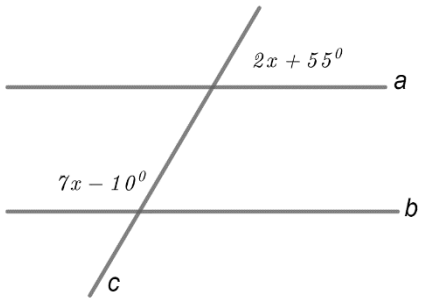
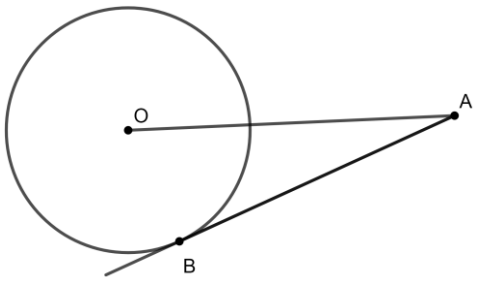
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ este egal cu: **a)** $-\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** 2 **d)** $\frac{5}{2}$
5p	**2.** Suma divizorilor întregi ai numărului 6 este egală cu: **a)** -12 **b)** 0 **c)** 5 **d)** 12
5p	**3.** Rezultatul calculului $(2;6)\cap[-3;3]$ este egal cu: **a)** $[-3;6)$ **b)** $(2;3]$ **c)** $[-3;3]$ **d)** $(2;6)$

5p	**4.** Forma simplă a expresiei $E(x)=(2x+3)^2-(2x-3)^2$ este: **a)** 0 **b)** 18 **c)** $24x$ **d)** $24x+18$
5p	**5.** Diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor $4+2\sqrt{3}$ și $4-2\sqrt{3}$ este egală cu: **a)** 2 **b)** 4 **c)** 6 **d)** 8
5p	**6.** Radu afirmă: „Cel mai mare dintre numerele $7-2\sqrt{3}$ și 4 este numărul $7-2\sqrt{3}$.” Afirmația lui Radu este: **a)** adevărată **b)** falsă

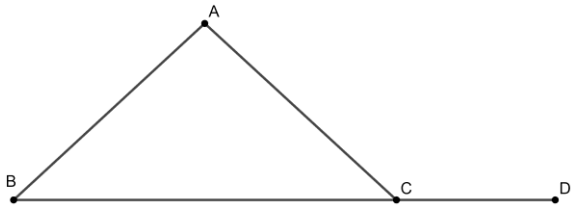
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare *A*, *B*, *C* și *D* astfel încât sunt verificate relațiile: $\frac{AC}{CB}=\frac{1}{3}; CD=3\cdot BD$. Dacă $DB=6$ cm, atunci lungimea segmentului *AB* este egală cu: **a)** 24 cm **b)** 30 cm **c)** 32 cm **d)** 54 cm
5p	**2.** Dacă dreptele *a* și *b* din figura alăturată sunt paralele tăiate de secanta *c* și unghiurile marcate au măsurile date, atunci valoarea lui x este egală cu: **a)** 10^0 **b)** 13^0 **c)** 15^0 **d)** 25^0 
5p	**3.** Dreapta *AB* din figura alăturată este tangentă la cercul de centru *O* în punctul *B*. Știind că $OA=13$ cm și $AB=5$ cm, lungimea cercului este egală cu: **a)** 24π cm **b)** $2\sqrt{194}\pi$ cm **c)** 144π cm **d)** 194π cm 

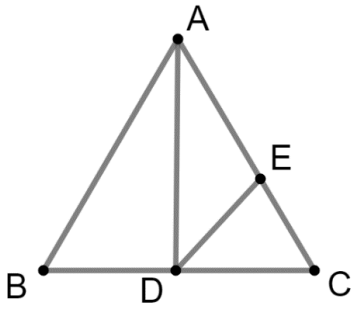
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel *ABC*. Dacă măsura unghiului exterior *ACD* este egală cu 138^0, atunci unghiul *BAC* are măsura egală cu:

a) 42^0
b) 84^0
c) 96^0
d) 138^0



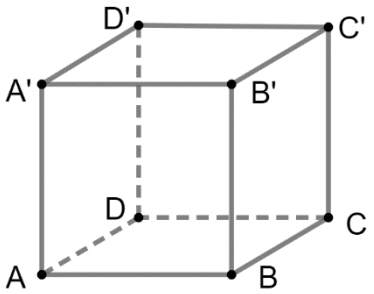
5p **5.** În triunghiul echilateral *ABC* din figura alăturată s-a construit înălțimea *AD*. Latura triunghiului este egală cu 12 cm, iar punctul *E* aparține laturii *AC*, astfel încât $EC = 4$ cm. Raportul dintre aria triunghiului *DEC* și aria triunghiului *ABC* are valoarea egală cu:

a) $\frac{1}{9}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{3}$



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul *ABCDA'B'C'D'*. Măsura unghiului dintre dreptele *A'D* și *B'D'* este egală cu:

a) 0^0
b) 45^0
c) 60^0
d) 90^0



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Maria are mai multe nuci. Ea observă că, dacă le împarte în mod egal la 12 copii, la 14 copii sau la 16 copii, fiecare copil primește cel puțin o nucă și îi rămân de fiecare dată 5 nuci.

(2p) a) Este posibil ca Maria să aibă 29 de nuci? Justificați răspunsul dat.

(3p) b) Care este cel mai mic număr de nuci pe care îl poate avea Maria?

5p

2. Se consideră numerele $a=\dfrac{6}{\sqrt{3}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{12}}+\dfrac{1}{\sqrt{27}}+\dfrac{1}{\sqrt{108}}\right)\cdot 12$ și $b=\sqrt{8^2-4^2}+\sqrt{6}\cdot\left(\dfrac{4}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{24}}\right)+2^{-1}$.

(2p) a) Arătați că $a=6\sqrt{3}$.

(3p) b) Aflați valorile reale ale lui x pentru care $(x+1)^2\leq a\cdot b$.

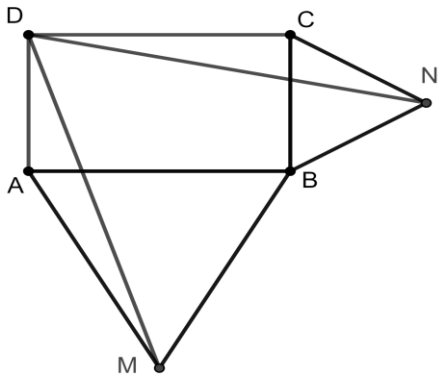
5p **3.** Se consideră expresia $E(x)=(3x+2)^2-(x+2)(x-2)-7(x-3)(x+2)-18x$, unde x este un număr real.

(3p) a) Arătați că $(3x+2)^2-(x+2)(x-2)=8x^2+12x+8$, pentru orice număr real x.

(2p) b) Arătați că $E(n)\vdots 2$, pentru orice număr întreg n.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ având laturile $AB=6\sqrt{3}$ cm și $BC=6$ cm. În exteriorul dreptunghiului s-au construit triunghiurile echilaterale AMB și BNC.

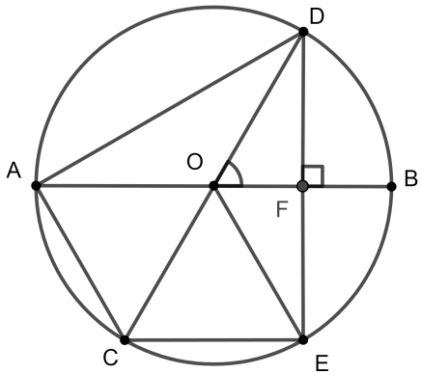
(2p) a) Arătați că segmentele MD și ND sunt congruente.



(3p) b) Calculați aria triunghiului *MND*.

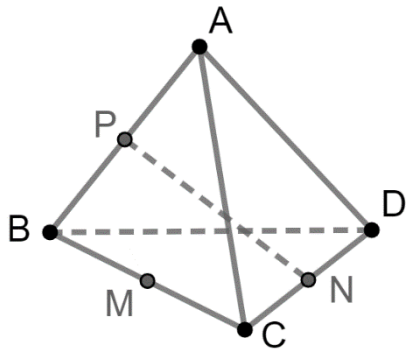
5p **5.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele *A*, *B*, *C*, *D* și *E* situate pe un cerc cu centrul în punctul *O*, având raza egală cu 6 cm. Se știe că perechile de puncte *A* și *B*, respectiv *C* și *D* sunt diametral opuse, punctul *E* este simetricul punctului *D* față de dreapta *AB* și măsura unghiului *AOC* este egală cu 60^0.

(2p) a) Arătați că lungimea coardei *AD* este egală cu $6\sqrt{3}$ cm**.**



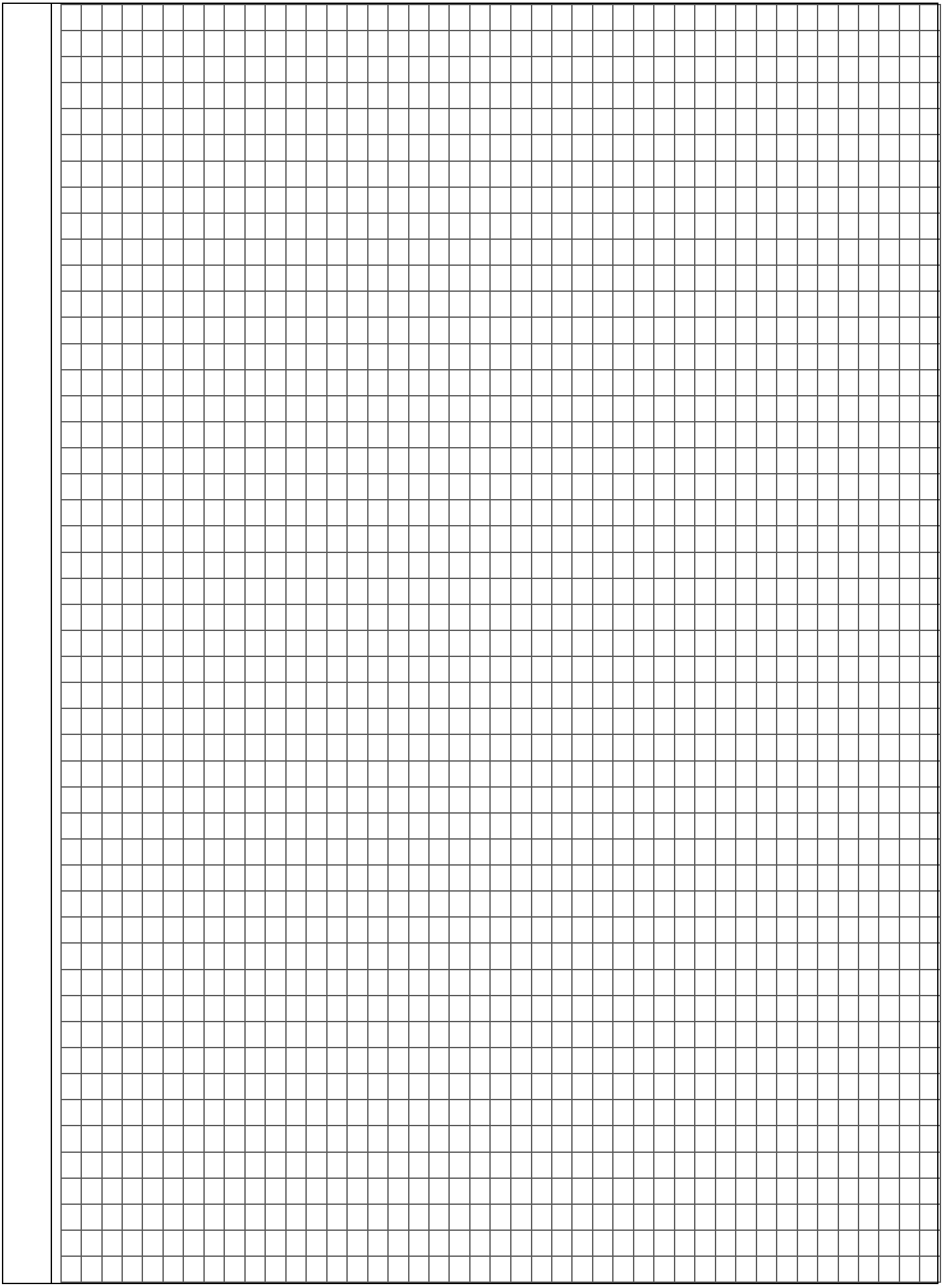
(3p) b) Calculați aria patrulaterului *ACED*.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat *ABCD* având muchia egală cu 8 cm. Punctele *M*, *N* și *P* sunt mijloacele muchiilor *BC*, *CD*, respectiv *AB*.



(2p) a) Arătați că dreapta *MN* este paralelă cu planul (*ABD*).

(3p) b) Calculați măsura unghiului dintre dreptele *NP* și *BD*.



Prezenta lucrare conține_____pagini

SIMULARE JUDEȚEANĂ

EVALUAREA NAȚIONALĂ

PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023

Matematică

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui:…….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență:…….....
……
Centrul de examen:.....
Localitatea:…….....
Județul:…….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

A	COMISIADEEVALUARE	NOTA(CIFREŞILITERE)	NUMELEŞIPRENUMELEPROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATORI			
	EVALUATORII			
	EVALUATORIII			
	EVALUATORIV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIADEEVALUARE	NOTA(CIFREŞILITERE)	NUMELEŞIPRENUMELEPROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATORI			
	EVALUATORII			
	EVALUATORIII			
	EVALUATORIV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIADEEVALUARE	NOTA(CIFREŞILITERE)	NUMELEŞIPRENUMELEPROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATORI			
	EVALUATORII			
	EVALUATORIII			
	EVALUATORIV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului: $30 - 10 : 2$ este egal cu:
a) 10
b) 25
c) 15
d) 20

5p **2.** Dacă $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$, atunci $\frac{3a+2b}{7a-2b}$ este egal cu:

a) 4 **b)** 2 **c)** $\frac{1}{2}$ **d)**1

5p **3.** Probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element al mulțimii $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, acesta să fie număr prim este egală cu :

a) $\frac{3}{5}$ **b)** $\frac{3}{10}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{1}{2}$

5p **4.** În tabelul de mai jos este prezentată situația notelor obținute de elevii clasei a VIII-a dintr-o școală, la un test la matematică:

Nota	5	6	7	8	9	10
Numărul elevilor	9	11	16	13	7	4

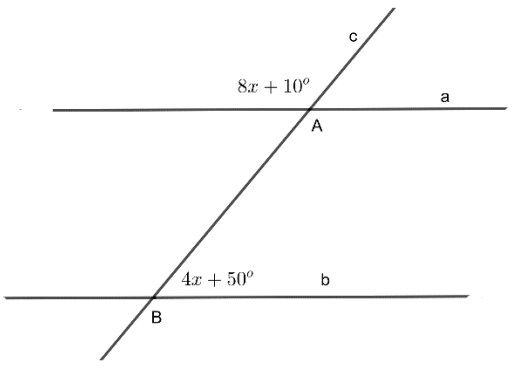
Procentul elevilor care au obținut note mai mari decât 7 din numărul total de elevi este egal cu:

a) 20 **b)** 25% **c)** 30% **d)** 40%

5p	**5.** Patru elevi, Maria, Cristina, Ștefan și Mihai, au calculat media geometrică a numerelor $a = 9 - 3\sqrt{5}$ și $b = 9 + 3\sqrt{5}$. Rezultatele obținute de elevi sunt prezentate în tabelul de mai jos: Maria: 36 | Cristina: 6 | Ștefan: 9 | Mihai: $3\sqrt{5}$ Dintre cei patru elevi, rezultatul corect a fost obținut de: **a)** Maria **b)** Cristina **c)** Ștefan **d)** Mihai
5p	**6.** Afirmația "*Numărul* $2\sqrt{3}$ *aparține intervalului* $(3; 4)$" este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată punctele A, C, D și B sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = 5 \cdot AC$, $2 \cdot AB = 5 \cdot BD$. Dacă $AC = 2\ cm$, atunci lungimea segmentului CD este egală cu: **a)** $4\ cm$. **b)** $6\ cm$. **c)** $3\ cm$. **d)** $5\ cm$.
5p	**2.** În figura următoare, dreptele *a* și *b* sunt paralele și sunt intersectate de secanta *c*, fiind evidențiate măsurile a două unghiuri de $8x + 10^o$ și respectiv $4x + 50^o$. Valoarea lui *x* este egală cu: **a)** 10° **b)** 20° **c)** 30° **d)** 40° 

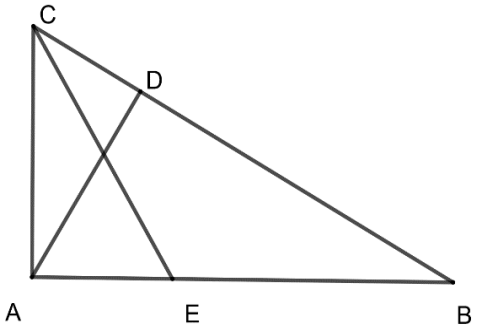
5p **3.** Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și $AD \perp BC, D \in BC$.
Dacă AD =12 cm, măsura unghiului ABC este egală cu 30°, iar [CE este bisectoarea unghiului ACB, atunci lungimea segmentului CE este egală cu:

a) 24 cm.

b) 12 cm.

c) 16 cm.

d) $12\sqrt{3}$ cm.



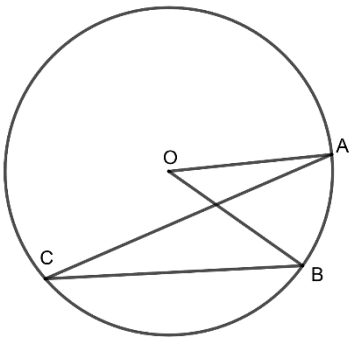
5p **4.** În cercul de centru O din figura alăturată măsura unghiului AOB este egală cu 40°, iar C este un punct pe acest cerc. Atunci măsura unghiului ACB este egală cu:

a) 40°

b) 50°

c) 30°

d) 20°



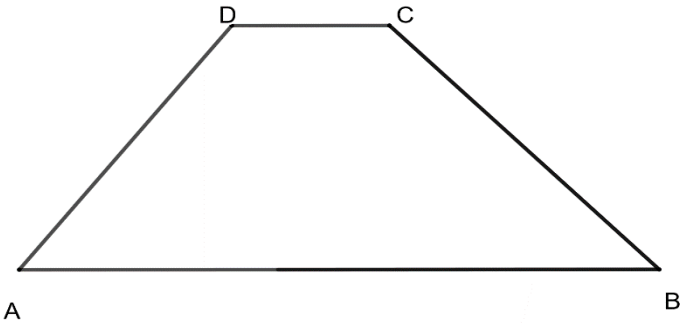
5p **5.** Î n figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel ABCD cu $AB \parallel CD$, AB = 14 cm, CD = 6 cm, iar măsura unghiului ABC este egală cu 45°. Aria trapezului ABCD este egală cu:

a) 40 cm^2;

b) 84 cm^2;

c) 42 cm^2

d) $40\sqrt{2}$ cm^2



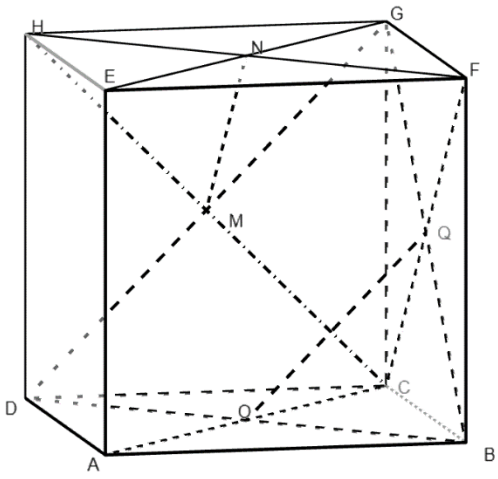
5p **6.** În figura alăturată este reprezentat cubul ABCDEFGH. Dacă punctele O, Q, M, N reprezintă centrele fețelor ABCD, BCGF, CDHG, respectiv EFGH, atunci măsura unghiului determinat de dreptele OQ și MN este egală cu:

a) 30º

b) 45º

c) 60º

d) 90º



SUBIECTUL AL III-lea

***Scrieți rezolvările complete.*(30 de puncte)**

5p **1.**Matei și Vlad sunt frați. Suma vârstelor lor este 21 ani, iar în urmă cu 3 ani, vârsta lui Matei era jumătate din vârsta lui Vlad.

(2p) a) Este posibil ca Vlad să aibă în prezent 8 ani? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Determină peste câți ani vârsta lui Matei va fi două treimi din vârsta lui Vlad.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+(x-2)(x+2)-3x^2+14$.

(2p) a) Arată că $E(x)=x^2+6x+10$, oricare ar fi numărul real x.

(3p) b) Arată că $E(x) \geq 0$, pentru orice număr real x.

5p **3.**Se consideră numerele reale : $a = \left(\sqrt{0,(3)} - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \cdot \sqrt{3} - \left(\sqrt{0,(2)} - \frac{4}{3\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{18}$ și

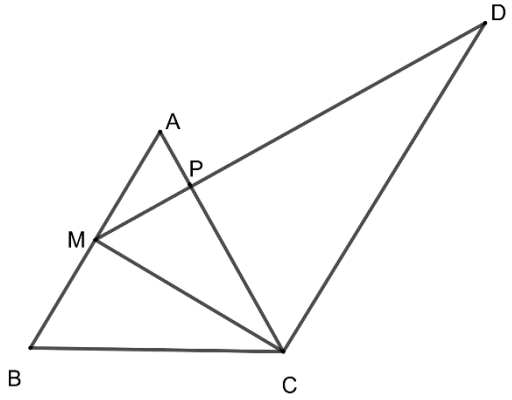
$$b = \left(\sqrt{0,(6)} + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \sqrt{6} - \left(\sqrt{0,(3)} + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3}$$

(2p) a) Arată că a =1.

(3p) b) Arată că dacă $x = \sqrt{a+b}$, atunci x este număr natural.

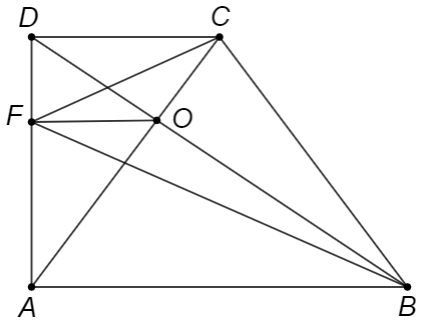
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC cu $AB = 8\ cm$. Notăm cu M mijlocul laturii AB și construim din M perpendiculara pe AC care intersectează pe AC în P și paralela prin C la AB în D.

(2p) a) Arată că lungimea segmentului CD este egală cu 12 cm.



(3p) b) Arată că aria patrulaterului AMCD este dublul ariei triunghiului ABC.

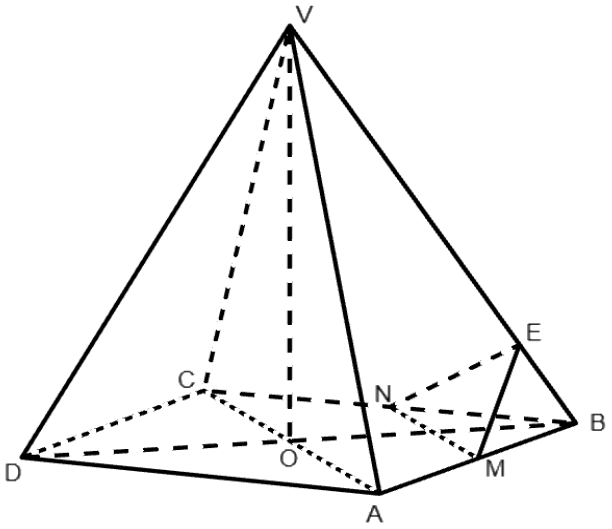
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$ cu, $AB \parallel CD$, $AD \perp AB$, $AB = 2 \cdot CD = 12$ cm și $AD = 6\sqrt{2}$ cm. Punctul F aparține segmentului AD, astfel încât $DF = 2\sqrt{2}$ cm și intersecția dreptelor AC și BD este punctul O.



(**2p) a)** Calculează aria trapezului $ABCD$.

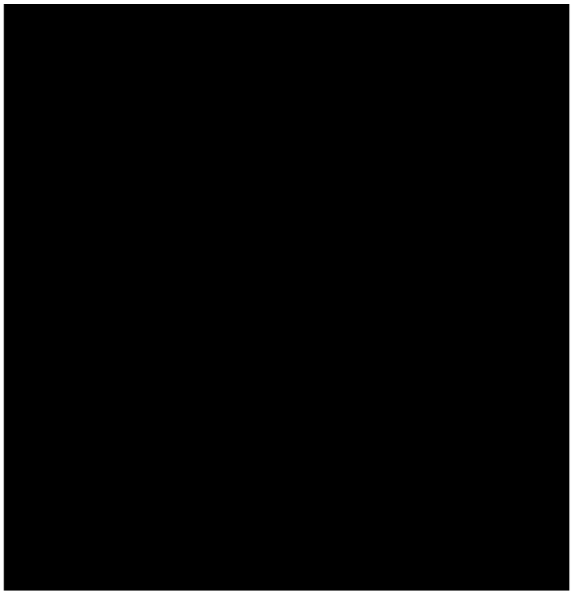
(3p) b) Demonstrează că semidreapta FO este bisectoarea unghiului CFB.

5p **6.**În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată VABCD cu baza pătratul ABCD, AB=12 cm și $VA = 6\sqrt{3}\ cm$. Punctul M este mijlocul segmentului AB, punctul N este mijlocul segmentului BC și punctul E aparține segmentului VB, astfel încât $BE = 2\sqrt{3}\ cm$.



(2p) a) Calculează lungimea înălțimii VO, unde $\{O\} = AC \cap BD$.

(3p) b) Demonstrează că dreapta VB este perpendiculară pe planul (MNE).



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $\sqrt{3^2 + 4^2} - 7$ este:

a) -2
b) *1*
c) 0
d) -3

5p **2.** După o reducere cu *20%* prețul unui obiect este de 20 de lei. Care este valoarea reducerii?

a) 25 lei
b) 5 lei
c) 10 lei
d) 15 lei

5p **3.** Suma numerelor întregi din intervalul $(-2;\sqrt{6}]$ este:

a) -1
b) -2
c) 2
d) 3

5p **4.** Mulțimea soluțiilor reale a inecuației $x\sqrt{2} - 3 < 3x - \sqrt{2}$ este:

a) $(-\infty; -1)$
b) $(-1; \infty)$
c) $(1; \infty)$
d) $(0;\infty)$

5p **5.** Patru elevi au primit spre rezolvare următorul calcul: $\sqrt{80} - 4\sqrt{5} + 8\sqrt{3} - \sqrt{75} - \frac{9}{\sqrt{3}}$. Rezultatele au fost trecute în tabelul de mai jos. Dintre cei patru elevi, cel care a răspuns corect este elevul:

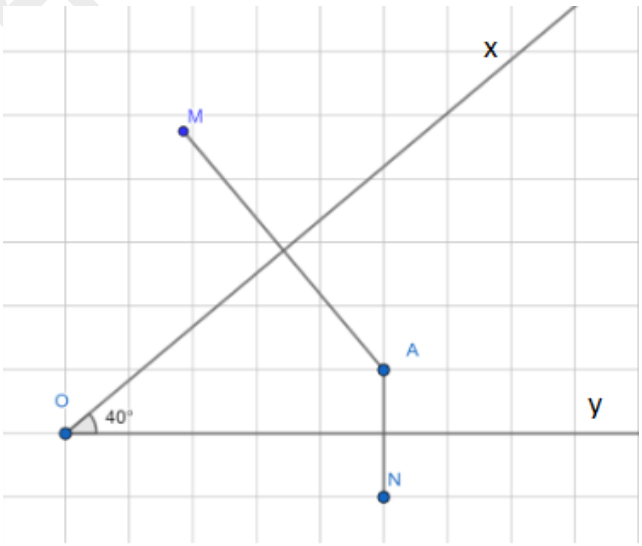
Irina	Cosmina	Viorel	Rareș
5	4	3	0

a) Irina
b) Cosmina
c) Viorel
d) Rareș

5p	**6**. Cristi a cumpărat 3 kg de mere cu 5 lei/kg și 2 kg de pere cu 6 lei/kg. El afirmă că a plătit pentru fructe 27 lei în total. Afirmația lui Cristi este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

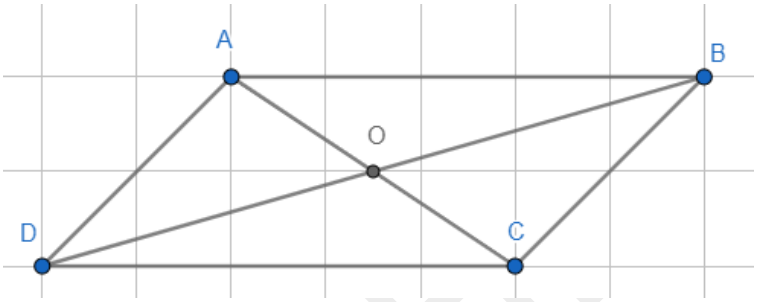
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. ***(30 de puncte)***

5p	**1.** În figura alăturată este reprezentat un unghi $\sphericalangle xOy$ cu măsura de 40° și un punct A interior acestuia. Punctele M și N sunt simetricele punctului A față de laturile unghiului. Măsura lui $\sphericalangle MON$ este: **a)** 70° **b)** 90° **c)** 60° **d)** 80° 

Simulare 4 - 10

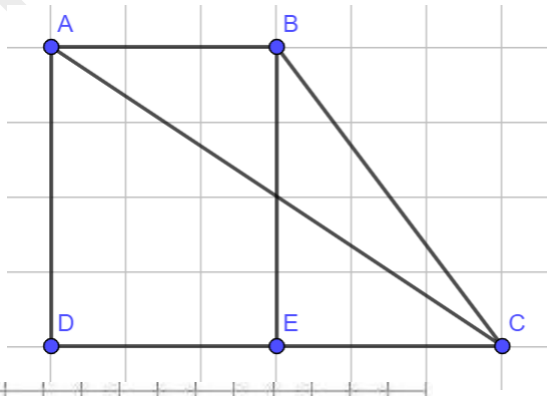
5p **2.** În paralelogramul ABCD, $AC \cap BD = \{O\}$. Valoarea sumei $\frac{AO}{AC} + \frac{BO}{BD}$ este egală cu:

a) 2
b) $\frac{1}{2}$
c) 1
d) $\frac{1}{3}$



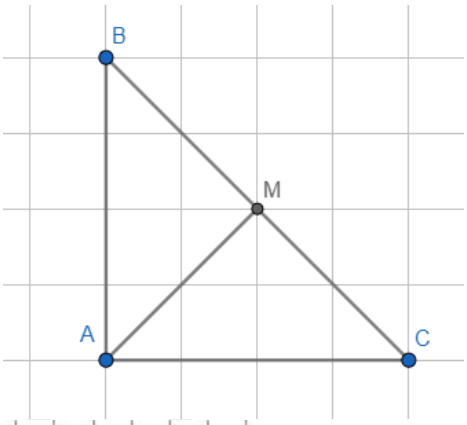
5p **3.** În figura alăturată ABCD este un trapez dreptunghic cu $m(\measuredangle A) = m(\measuredangle D) = 90°$, $BE \perp DC, AB = 6\ cm, BE = 8\ cm$. Aria ΔABC este egală cu:

a) $48\ cm^2$
b) $24\ cm^2$
c) $36\ cm^2$
d) $16\ cm^2$



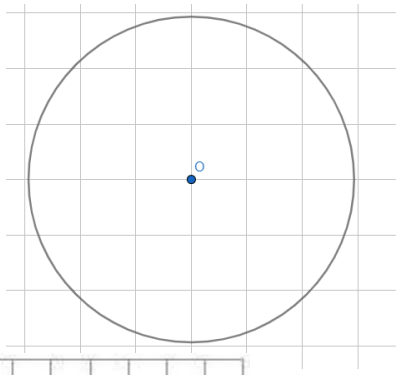
5p **4.** Dacă un triunghi dreptunghic isoscel are aria egală cu $162\,cm^2$, atunci lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu:

a) $6\sqrt{3}\,cm$
b) $81cm$
c) $9\sqrt{3}\,cm$
d) $9\sqrt{2}\,cm$



5p **5.** Aria unui cerc este egală cu $100\pi\,cm^2$. Raza acestui cerc este egală cu:

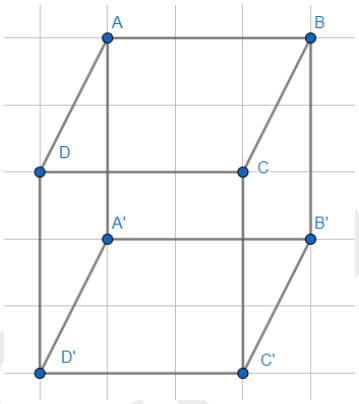
a) $10\,cm$
b) $50\,cm$
c) $25\,cm$
d) $70\,cm$



Simulare

5p **6.** Într-un cub suma tuturor muchiilor este egală cu $48\sqrt{2}\ cm$. Aria $\Delta ACD'$ este egală cu:

a) $16\sqrt{3}\ cm^2$
b) $144\sqrt{3}\ cm^2$
c) $36\sqrt{3}\ cm^2$
d) $12\sqrt{3}cm^2$



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. ***(30 de puncte)***

1. Numerele 377; 517; 803 împărțite la același număr natural nenul n, dau câturile nenule și resturile egale cu 17; 13; respectiv 11.

2p a) Este posibil ca n să fie 18? Justificați.

3p b) Determinați valorile împărțitorului.

Simulare

2. Se consideră numărul $A = 2^{n+4} - 3 \cdot 2^{n+3} + 7 \cdot 2^{n+2} - 5 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^{n}$, pentru $n \in N$.

2p a) Arătați că A este divizibil cu 13, pentru orice n natural.

3p b) Aflați valorile naturale ale lui n, $0 < n < 9$, pentru care $\sqrt{13 \cdot A}$ este rațional.

3. Fie expresia $E(x) = \left(\frac{x}{x-1} - \frac{2}{2-x} - \frac{2}{x^2-3x+2}\right) : \frac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$, unde $x \in R\setminus\{-3; -2; -1; 1; 2\}$.

2p a) Arătați că $E(x) = \frac{x+3}{x+1}$.

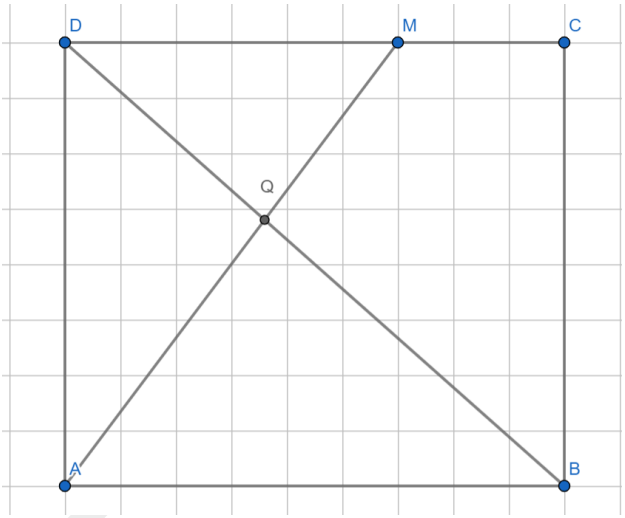
3p b) Determinați valorile întregi ale lui n pentru care $E(n) \in Z$.

Simulă - ICHB

4. Se consideră dreptunghiul ABCD cu $AB = 90\ cm$, $AD = 80\ cm$. Fie un punct M pe latura CD astfel încât aria trapezului ABCM să fie egală cu două treimi din aria dreptunghiului ABCD.

2p a) Arătați că CM=30 cm.

3p b) Dacă $BD \cap AM = \{Q\}$, aflați lungimea segmentului AQ.

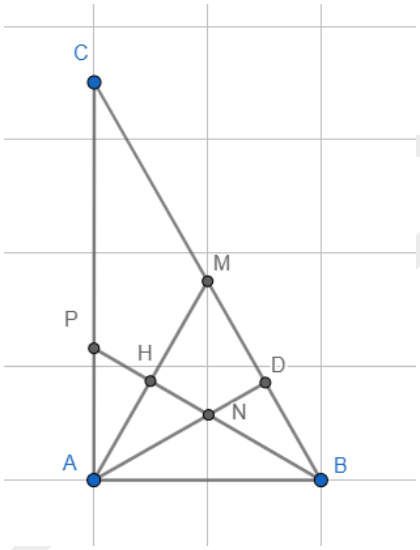


Simulare

5. În figura de mai jos este reprezentat ΔABC dreptunghic în A, $AD \perp BC, D \in (BC)$, [BP bisectoarea unghiului ∢ABC, $P \in (AC)$ este perpendiculară pe mediana [AM, $M \in (BC)$. Dacă AC=$12\sqrt{6}\,cm$ şi $BP \cap AD = \{N\}$, iar $AM \cap BP = \{H\}$, arătați că:

2p a) $MN \perp AB$.

3p b) Aflați aria ΔANH.

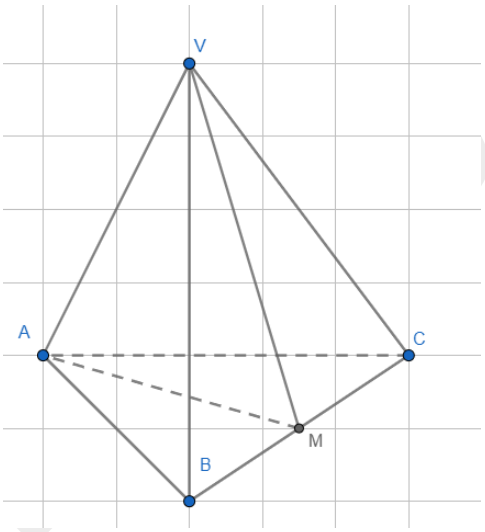


Simulare

6. Fie VABC o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei AB=8 cm și apotema de 4cm.

2p a) Dacă M este mijlocul laturii BC, arătați că planul (VAM) este perpendicular pe planul (VBC).

3p b) Calculați distanța de la A la planul (VBC).



Simulare 4

Evaluarea națională pentru absolvenții clasei a VIII-a
Mai 2025
Matematică
Barem de evaluare și de notare

Simulare județeană

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	**a)** $63-3\cdot 5=48$ picioare pentru mesele cu 4 picioare	**1p**
	$48:4=12$ mese cu 4 picioare ⇒ pot fi 5 mese cu 3 picioare	**1p**
	b) Fie a = nr mese cu 3 picioare și b= nr. mese cu 4 picioare, $a+b=19$	**1p**
	$3a+4b=63$	**1p**
	$b=6$ mese cu 4 picioare	**1p**
2.	**a)** $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{2-x}+\frac{4x}{x^2-4}=\frac{(x-2)^2-(x+2)^2+4x}{(x-2)(x+2)}$	**1p**
	$\frac{x^2-4x+4-x^2-4x-4+4x}{(x-2)(x+2)}=-\frac{4x}{x^2-4}$	**1p**
	b) $E(x)=\frac{1}{x}\left(-\frac{4x}{x^2-4}\right)\left(\frac{1}{4-x^2}\right)^{-1}$	**1p**
	$E(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{4x}{4-x^2}\cdot\frac{4-x^2}{1}=4$	**1p**
	$[1+E(x)]^{2025}=(1+4)^{2025}=5^{2025}\vdots 5$	**1p**
3.	**a)** $f(0)=0\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$, $g(0)=\frac{0\cdot\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}=\sqrt{3}$	**1p**
	$m_a=\frac{f(0)+g(0)}{2}=\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}=\frac{0}{2}=0$	**1p**
	b) $G_f\cap G_g=\{M(x;y)\}\Rightarrow f(x)=g(x)\Rightarrow x=3, y=2\sqrt{3}, G_f\cap G_g=\{M(3;2\sqrt{3})\}$	**1p**
	$f(x)=0\Rightarrow x=1\Rightarrow G_f\cap Ox=\{A(1;0)\}, g(x)=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow G_g\cap Ox=\{B(-3;0)\}$	**1p**
	Fie $M'(3;0)$, $A_{\Delta MAB}=\frac{AB\cdot MM'}{2}=\frac{AM\cdot BM\cdot\sin AMB}{2}\Rightarrow \sin ABM=\frac{1}{2}\Rightarrow \sphericalangle ABM=30^0$	**1p**
4.	**a)** $\Delta ABC, \sphericalangle B=90^0, \sphericalangle BAC=30^0\Rightarrow AC=2BC=8$ cm, $AB=4\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$P_{ABCD}=2(AB+BC)=2(4\sqrt{3}+4)=8(\sqrt{3}+1)$ cm	**1p**

	b) $S = sim_{AC}B \Longrightarrow SB \perp AC$ şi $BE = SE$ unde $AC \cap SB = \{E\}$ Fie $AC \cap BD = \{O\}$, OE mediană și înălțime în $\Delta OSB \Longrightarrow$ ΔOSB isoscel de bază $SB \Longrightarrow OS = OB$ ΔDSB, SO mediană şi $SO = OB = \frac{BD}{2} \Longrightarrow \sphericalangle DSB = 90^0 \Longrightarrow DS \perp SB$	**1p** **1p** **1p**
5.	**a**) $\Delta DEA, \sphericalangle E = 90^0, \sphericalangle DAE = 30^0 \Longrightarrow DE = \frac{AD}{2} = \frac{6\ cm}{2} = 3\ cm$ $A_{ABCD} = b \cdot h = AB \cdot DE = 6\sqrt{3} \cdot 3 = 18\sqrt{3}\ cm^2$	**1p** **1p**
	b) $\Delta DEA, \sphericalangle E = 90^0 \Longrightarrow AE = 3\sqrt{3} \Longrightarrow EB = AB - AE = 6\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3} \Longrightarrow \Delta DAB$ isoscel de bază $AB \Longrightarrow \sphericalangle DAB = \sphericalangle DBA = 30^0$ Fie $DF \cap BE = \{P\}$, $\sphericalangle PDB = \sphericalangle PBD = 30^0 \Rightarrow \Delta DPB$ isoscel de bază $DB \Longrightarrow DP \equiv BP$ si dem că $\Delta DEP \equiv \Delta BFP$ BD și EF drepte, DF secantă, $\sphericalangle FDB = \sphericalangle EFD = 30^0$ (alterne interne)$\Longrightarrow EF \parallel BD$	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** $OM = 9\sqrt{2}\ cm$ $O`M = 3\sqrt{34}\ cm$	**1p** **1p**
	b) ΔVAD echilateral $\Longrightarrow VA = 18\sqrt{2}\ cm$ $AO = 18 \Longrightarrow \Delta VAO$ dreptunghic $\Longrightarrow VO = 18\ cm \Longrightarrow VO` = 6\ cm$ $(A`B`C`)\|\|(ABC) \Longrightarrow$ piramidele VABCD și VA`B`C`D` sunt asemenea, $k = \frac{VO`}{VO} = \frac{B`A`}{BA} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow A`B` = 6\sqrt{2}\ cm$ $V_{VA`B`C`D`} = \frac{A_{A`B`C`D`} \cdot VO`}{3} = 144\ cm^3$	**1p** **1p** **1p**

Evaluarea națională pentru absolvenții clasei a VIII-a
Mai 2025
Matematică
Barem de evaluare și de notare

Simulare județeană

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	**a)** Înlocuiește $3(10-8)=10+8$ Observă că 6≠18, deci numărul $\overline{abc}$ nu poate fi 108.	**1p** **1p**
	b) $3(\overline{ab}-c)=\overline{ab}+c \Leftrightarrow 3\cdot\overline{ab}-3\cdot c=\overline{ab}+c$ $\Leftrightarrow 2\cdot\overline{ab}=4\cdot c \Leftrightarrow \overline{ab}=2\cdot c$ $\overline{abc}\in\{105,126,147,168,189\}$	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $x^2-3x-10=x^2-5x+2x-10$ Deci $x(x-5)+2(x-5)=(x-5)(x+2)$	**1p** **1p**
	b) $E(x)=\frac{1}{x}$, $\left[(1-E(2))(1-E(3))(1-E(4))\right]^{-1}=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]^{-1}$ $\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=4=2^2=$ pătrat perfect	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $f(-2)=3\Rightarrow -2a+b=3$ și $f(2)=-1\Rightarrow 2a+b=-1$ $a=-1, b=1$	**1p** **1p**
	b) G_f =AB, $f(x)=-x+1$ A, B, C sunt coliniare$\Leftrightarrow C\in AB \Leftrightarrow f(3m)=2m-1$ $-3m+1=2m-1, m=\frac{2}{5}$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** În triunghiul ABC, $tg(\sphericalangle C)=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{6}{AC}\Rightarrow AC=6\sqrt{3}$ cm $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=18\sqrt{3}\ cm^2$.	**1 p** **1 p**

	b) $\sphericalangle ABC = 60^0 \Rightarrow \sphericalangle ABD = 120^0$. Cum ΔABD isoscel $\Rightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle BAD = 30^0$	**1p**
	În ΔABE, $\sphericalangle BAD = 30^0 \Rightarrow BE = \frac{AE}{2}$, ΔEDB isoscel, cu $DE = BE = \frac{AE}{2}$	**1p**
	$DE = \frac{AD}{3}$	**1p**
5.	**a)** $AD = \frac{2AB}{3}$, $A_{ABCD} = \frac{2}{3}AB^2$	**1p**
	AB=24 cm.	**1p**
	b) $AD = \frac{2AB}{3} \Rightarrow$ AD=16 cm.	**1p**
	$\sphericalangle DMA = \sphericalangle MDP$ și $\sphericalangle DAM = \sphericalangle DMP \Rightarrow \triangle AMD \sim \triangle MDP$	**1p**
	$DP = \frac{100}{3}$ cm $\Rightarrow CP = \frac{28}{3}$ cm.	**1p**
6.	**a)** M- mijlocul muchiei BC $\Rightarrow \sphericalangle\big((VBC),(ABC)\big) = \sphericalangle VMO = 60^0 \Rightarrow VO = 6\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$A_{ABCD} = 12^2 = 144$ cm^2, $V = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6\sqrt{3} = 288\sqrt{3}$ cm^3	**1p**
	b) $PP' \parallel VO, P' \in OB$, $VO \perp (ABC) \Rightarrow PP' \perp (ABC) \Rightarrow \sphericalangle\big(OP,(ABC)\big) = \sphericalangle POB$	**1p**
	$A_{APC} = \frac{AC \cdot OP}{2}$ = minimă, AC = constantă $\Leftrightarrow$ OP - minimă$\Leftrightarrow$ $OP \perp VB$ în $\triangle VOB$	**1p**
	$\sphericalangle POB = 90^0 - \sphericalangle VBO = \sphericalangle OVB \Rightarrow \cos(\sphericalangle POB) = \cos(\sphericalangle OVB) = \frac{VO}{VB} = \frac{\sqrt{15}}{5}$.	**1p**

Evaluarea națională pentru absolvenții clasei a VIII-a
Mai 2025
Matematică
Barem de evaluare și de notare

Simulare județeană

SUBIECTUL I ***(30 puncte)***

1.	***c)***	***5p***
2.	***d)***	***5p***
3.	***b)***	***5p***
4.	***b)***	***5p***
5.	***b)***	***5p***
6.	***a)***	***5p***

SUBIECTUL al II-lea ***(30 puncte)***

1.	***a)***	***5p***
2.	***c)***	***5p***
3.	***b)***	***5p***
4.	***c)***	***5p***
5.	***a)***	***5p***
6.	***c)***	***5p***

SUBIECTUL al III-lea ***(30 puncte)***

1.	**a)** $14 \cdot 15 = 210$ *bomboane* $365 - 210 = 155$ *bomboane* *155 nu este divizibil cu 15, deci nu este posibil să fie 14 cutii cu 15 bomboane*	***1p*** ***1p***
	b) *14x+15y=365, unde x este numărul cutiilor cu 14 bomboane, iar y este numărul cutiilor cu 15 bomboane* *365⋮5 și 15y⋮5⇒ x⋮5* *x+y<26⇒x=10⇒y=15*	***1p*** ***1p*** ***1p***
2.	***a)*** $\frac{3x-9}{x^2-2x-3} = \frac{3(x-3)}{x(x-3)+(x-3)}$ $\frac{3(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \frac{3}{x+1}$, $x \neq -1, x \neq 3$	***1p*** ***1p***
	b) $E(x) = \left(\frac{3}{x+1} - \frac{4x+3}{x^2-1} + \frac{3}{x-1}\right) \cdot (x^2-1) = \frac{3x-3-4x-3+3x+3}{x^2-1} \cdot (x^2-1) = 2x-3$ $\lvert 2x-3 \rvert \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x-3 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$ $x \in [0;3], x \in \boldsymbol{R} \setminus \{-1;1;3\} \Rightarrow S = [0;3) \setminus \{1\}$	***1p*** ***1p*** ***1p***
3.	***a)*** $f(-3) = -4; f(3) = 8$ $f(-3) + f(3) = 4$	***1p*** ***1p***
	b) $A(-1;0); B(0;2)$ $AB = \sqrt{5}$; *BC=*$\sqrt{20}$*; AC=5* $AC^2 = AB^2 + BC^2$, *deci triunghiul ABC este dreptunghic*	***1p*** ***1p*** ***1p***

4.	***a)*** $A_{MBD} = 12\ cm^2; A_{MBP} = 6\ cm^2$ $A_{BDMP} = 18\ cm^2$	***1p*** ***1p***
	b) R simetricul lui P față de A $\Rightarrow$ PA = AR = 2 cm; ΔMAR dreptunghic isoscel $\Longrightarrow \sphericalangle RMA = \sphericalangle ARM = 45^\circ$ $\sphericalangle DRE = 45^\circ$, unde $\{E\} = MR \cap DB$; ΔDAB dreptunghic isoscel $\Longrightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle DBA = 45^\circ \Longrightarrow \sphericalangle DER = 90^\circ$ *În triunghiul MBD, DA și ME înălțimi,* $\{R\} = ME \cap DA$, *deci R este ortocentrul triunghiului MBD.*	***1p*** ***1p*** ***1p***
5.	***a)*** $\Delta ABC \Longrightarrow BC = 15$ cm $BN = \frac{BC}{3} = 5\ cm \Longrightarrow BN = 10\ cm$	***1p*** ***1p***
	b) $\frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow MN \| \| AC \Longrightarrow \sphericalangle BMN = 90^\circ$ $\Delta BMP \sim \Delta BAD \Longrightarrow MP = 4\ cm$ $\Delta AMP: \sphericalangle AMP = 90^0 \Longrightarrow AP^2 = MP^2 + AM^2 \Longrightarrow AP = 5\ cm$	***1p*** ***1p*** ***1p***
6.	***a)*** *Fie M mijloc BC,* ΔVOM cu $\sphericalangle O = 90^0 \Rightarrow VM = 3\sqrt{3}\ cm$ $A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2} = \frac{4 \cdot 6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}\ cm^2$	***1p*** ***1p***
	b) $BO \perp (VAC), OE \perp VC, OE, VC \subset (VAC) \overset{T3\perp}{\Longrightarrow} BE \perp VC$ $(VAC) \cap (VBC) = VC, OE \perp VC, OE \subset (VAC), BE \perp VC, BE \subset (VBC) \Longrightarrow$ $\sphericalangle((VAC); (VBC)) = \sphericalangle(OE; BE) = \sphericalangle BEO$ $\Delta BOE, \sphericalangle E = 90^0 \Longrightarrow tg\sphericalangle BEO = \frac{OB}{OE} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$	***1p*** ***1p*** ***1p***

SIMULARE JUDEȚEANĂ
EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Mai 2025
Matematică

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $7 - 7 \cdot 7 + 7$ este egal cu:
a) 7
b) 0
c) -35
d) 35

5p **2.** Se consideră mulțimile , $A = \{ x \in N \,|\, x \text{ este divizor al numărului } 4 \}$ și $B = \{ y \in N \,|\, y \text{ este multiplu al numărului } 8;\ y < 16 \}$. Dintre afirmațiile de mai jos, adevarată este:
a) Mulțimea A este inclusă în mulțimea B
b) Mulțimea B este inclusă în mulțimea A
c) Mulțimile A și B au același cardinal
d) Mulțimile A și B sunt disjuncte

5p **3.** Suma soluțiilor ecuației $|x - 2| + 1 = 7$ este:
a) 8
b) 4
c) -4
d) 6

5p **4.** Produsul numerelor întregi din intervalul [-1;3] este egal cu:
a) 0
b) -6
c) 4
d) -3

5p **5.** Darius, Laura, Bianca și Ana au calculat raportul numerelor $a = \sqrt{75} - \sqrt{12}$ și $b = 2\sqrt{75} + \sqrt{12}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Darius	Laura	Bianca	Ana
$4\sqrt{3}$	$15\sqrt{3}$	4	$\frac{1}{4}$

Rezultatul corect a fost obținut de către:
a) Darius
b) Laura
c) Bianca
d) Ana

5p	**6.** Daria afirmă: „Ecuația $x^2 + 8x + 20 = 0$ nu are soluții reale”. Afirmația Dariei este: **a)** adevărată **b)** falsă

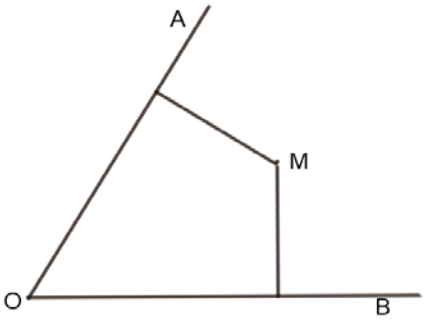
SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare distincte *A, B, C* și *D*, în această ordine, astfel încât lungimile segmentelor AB, BC și CD sunt exprimate în cm și sunt egale cu cele mai mici numere pare consecutive. Raportul lungimilor segmentelor AB și AD este egal cu:

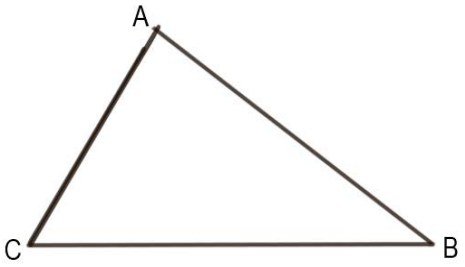
a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{1}{6}$

5p 2. În figura alăturată este reprezentat unghiul AOB și M este un punct situat în interiorul lui astfel încât distanțele de la M la laturile unghiului să fie egale cu 5 cm. Dacă măsura unghiului AOB este de 60°, atunci lungimea segmentului OM este egală cu:



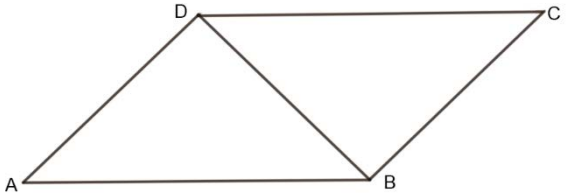
a) 10 cm
b) $10\sqrt{3}$ cm
c) 5 cm
d) $5\sqrt{3}$ cm

5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB = 28$ cm, $BC = 35$ cm și $AC = 21$ cm. Punctul M este mijlocul laturii BC. Lungimea segmentului AM este egală cu:



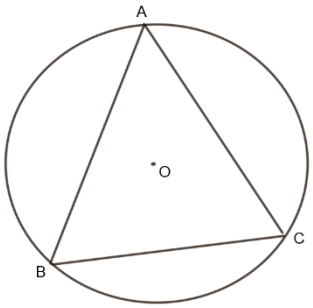
a) 14 cm
b) 10,5 cm
c) 17,5 cm
d) 16,5 cm

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul ABCD cu măsura unghiului BAD egală cu 45°, AD este perpendiculară pe DB și AB este egală cu $2\sqrt{2}$ cm. Lungimea diagonalei AC este egală cu:



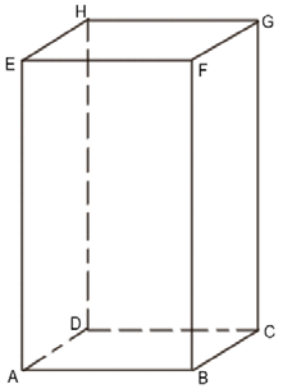
a) 2 cm
b) $\sqrt{5}$ cm
c) $2\sqrt{5}$ cm
d) $\sqrt{2}$ cm

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC, înscris în cercul de centru O si raza 10 cm. Dacă măsura unghiului B este egală cu 50° și măsura unghiului C este egală cu 70°, atunci lungimea laturii BC este egală cu:



a) 10 cm
b) 5 cm
c) $5\sqrt{3}$ cm
d) $10\sqrt{3}$ cm

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată o cutie plină cu suc, având forma unui paralelipiped dreptunghic ABCDEFGH cu $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $AE = 1{,}2$ dm. Cantitatea de suc din cutie este egală cu:



a) 0,144 dl
b) 1,44 dl
c) 14,4 dl
d) 144 dl

SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p **1.** Într-o cantină sunt mese cu patru și respectiv trei picioare. Se știe că mesele au în total 63 de picioare.

(2p) a) Este posibil ca numărul meselor cu trei picioare să fie 5? Justificați răspunsul dat.

(3p) b) Știind că numărul de mese din cantină este 19, determinați câte mese cu 4 picioare sunt.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{2-x}+\frac{4x}{x^2-4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4-x^2}\right)^{-1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;0;2\}$

(2p) a) Arată că $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{2-x}+\frac{4x}{x^2-4}=-\frac{4x}{x^2-4}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

(3p) b) Arată că $[1+E(x)]^{2025}$ este un număr natural divizibil cu 5.

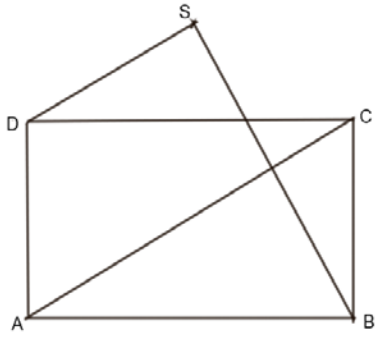
5p **3.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{3}-\sqrt{3}$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}$

(2p) a) Arată că media aritmetică dintre $f(0)$ și $g(0)$ este egală cu zero.

(3p) b) Determină măsura unghiului format de reprezentările grafice ale celor două funcții.

5p

4. În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul ABCD cu $\sphericalangle BAC = 30°$ și BC = 4 cm. Punctul S este simetricul punctului B în raport cu dreapta AC.

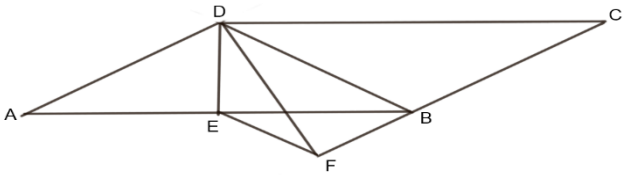


(2p) a) Arată că perimetrul dreptunghiului ABCD este egal cu $8(\sqrt{3}+1)$cm.

3p) *b)* Demonstrează că dreapta DS este perpendiculară pe dreapta SB.

5p

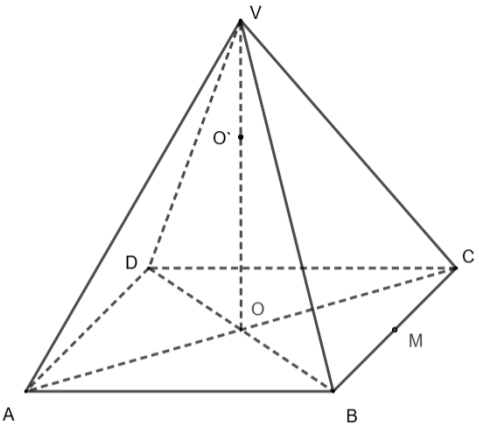
5. În figura alăturată este reprezentat un paralelogram ABCD cu AD = 6 cm, DC=$6\sqrt{3}$ cm și măsura unghiului A este egală cu 30°.



a) Arată că aria paralelogramului ABCD este egală cu $18\sqrt{3}$ cm².

(3p) ***b)*** Punctul E este proiecția punctului D pe AB, iar F este proiecția punctului D pe CB. Arată că dreptele EF și DB sunt paralele.

5p **6.** Fie VABCD o piramidă patrulateră regulată, cu AB=$18\sqrt{2}$ cm și $AC \cap BD = \{O\}$. Punctul $O' \in VO$ astfel încât OO'=12cm. Prin O' se construiește un plan paralel cu baza piramidei, care intersectează muchiile VA, VB, VC, VD în punctele A', B', C', respectiv D', iar $\sphericalangle A'AD = 60^{\circ}$.



(2p) a) Calculați $O'M$, unde M este mijlocul laturii BC;

(3p) b) Calculați volumul piramidei $VA'B'C'D'$.

SIMULARE JUDEȚEANĂ
EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Mai 2025
Matematică

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $5+25:\left(-\sqrt{25}\right)$ este egal cu:

a) 6

b) 10

c) 0

d) 4

5p **2.** Suma dintre 20 și 15% din 20 este egală cu:

a) 30

b) 23

c) 25

d) 50

5p **3.** Fie intervalul $A=\left(-\frac{7}{3};\sqrt{17}\right)$. Mulțimea $A\cap \mathbf{Z}$ este egală cu:

a) {– 1; 0; 1; 2; 3; 4}

b) {– 2; – 1; 0; 1; 2; 3; 4}

c) {– 2; – 1; 1; 2; 3; 4}

d) {– 1; 0; 1; 2; 3}

5p **4.** Știind că $a=\frac{1}{3}+\frac{12}{5}$ și $b=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}$, atunci media aritmetică a numerelor *a* și *b* este egală cu:

a) 3

b) 6

c) 2

d) 8

5p **5.** Repartiția elevilor unei clase, în funcție de mediile obținute la matematică, la sfârșitul anului școlar, este prezentată în tabelul următor :

Media	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	2	4	5	6	5	3

Conform tabelului, numărul elevilor cu media mai mare decât 7, dar cel mult 9, este egal cu:

a) 10

b) 14

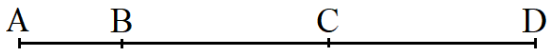
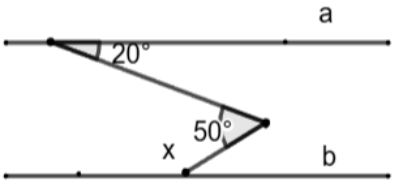
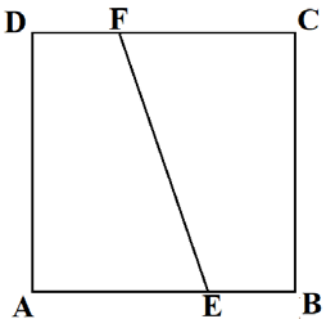
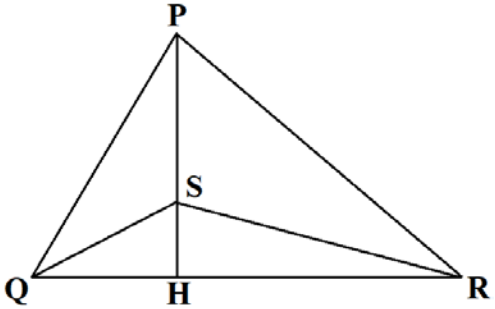
c) 11

d) 16

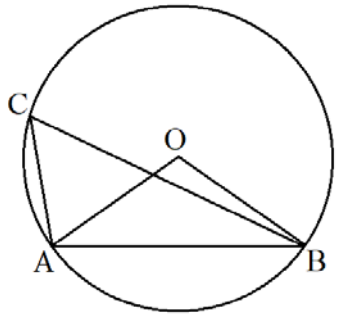
5p	**6.** Afirmația ,,Media geometrică a numerelor $a = 2\sqrt{3} - 1$ și $b = 2\sqrt{3} + 1$ este un număr rațional" este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

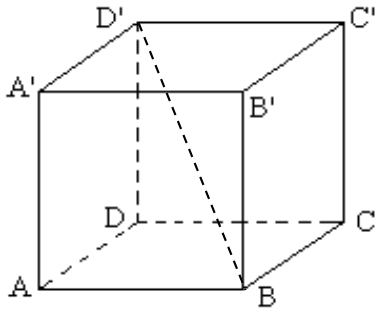
5p	**1.** În figura alăturată, punctele distincte și coliniare A, B, C, D îndeplinesc condițiile $BC = 2AB$ și $CD = BC$. Raportul lungimilor segmentelor AC și BD este egal cu: **a)** 1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{2}{3}$ **d)** $\frac{3}{4}$ 
5p	**2.** În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele. Valoarea lui x este egală cu: **a)** 130° **b)** 50° **c)** 150° **d)** 100° 
5p	**3.** În figura alăturată, $ABCD$ este pătrat, $AB = 6$ cm, $E \in AB, F \in CD$, $AE = 2EB, DF = EB$. Lungimea segmentului EF este egală cu: **a)** $6\sqrt{2}$ cm **b)** 8 cm **c)** $3\sqrt{5}$ cm **d)** $2\sqrt{10}$ cm 
5p	**4.** În triunghiul PQR din figură, $PH \perp QR, QR = 12$ cm și $PS = 7$ cm. Aria patrulaterului PQSR este egală cu: **a)** 36 cm^2 **b)** 40 cm^2 **c)** 42 cm^2 **d)** 84 cm^2 

5p **5.** În figura alăturată $\sphericalangle BAO = 40^0$. Unghiul $\sphericalangle ACB$ are măsura egală cu:



a) 40^0
b) 45^0
c) 50^0
d) 55^0

5p **6.** Se consideră cubul ABCDA'B'C'D', cu diagonala BD' = $5\sqrt{3}$ cm. Aria totală a cubului este egală cu:



a) $125\ cm^2$
b) $250\ cm^2$
c) $100\ cm^2$
d) $150\ cm^2$

SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p **1.** Se consideră $\overline{abc}$ un număr natural de trei cifre, cu proprietatea că $3(\overline{ab} - c) = \overline{ab} + c$.

(2p) a) Este posibil ca numărul $\overline{abc}$ să fie 108? Justifică răspunsul.

(3p) b) Determină numerele $\overline{abc}$ cu această proprietate.

5p **2.** Fie $E(x) = \left(\frac{1}{x^2-5x} - \frac{1}{x^2+5x} + \frac{2}{x^2-25}\right) : \frac{2x+4}{x^2-3x-10}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5; -2; 0; 5\}$

(2p) a) Arătați că $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$;

(3p) b) Demonstrați că $\left[\left(1-E(2)\right)\left(1-E(3)\right)\left(1-E(4)\right)\right]^{-1}$ este pătrat perfect.

5p

3. Se consideră funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = ax + b$.

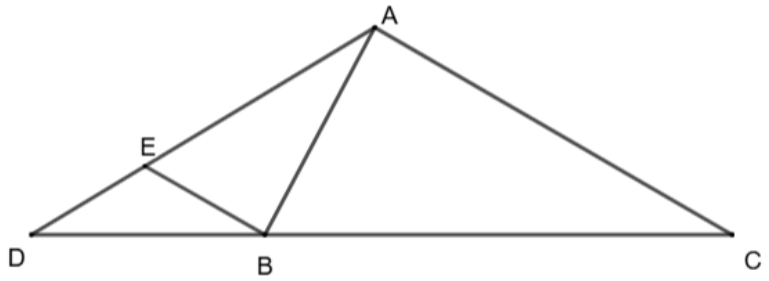
(2p) a) Determină valorile reale ale lui *a* și *b*, știind că punctele $A(-2;3)$ și $B(2;-1)$ aparțin graficului funcției.

(3p) b) Calculează valoarea numărului real m, încât punctele A, B și $C(3m; 2m-1)$ să fie coliniare .

5p

4. În figura alăturată, triunghiul *ABC* este dreptunghic, cu $\sphericalangle A = 90^0$. Se cunosc *AB* = 6 cm și $\sphericalangle C = 30^0$. Prelungim latura *CB* cu segmentul *BD*, astfel încât *BD* ≡ *AB*. Punctul *E* aparține segmentului *AD*, astfel încât $EB \perp AB$

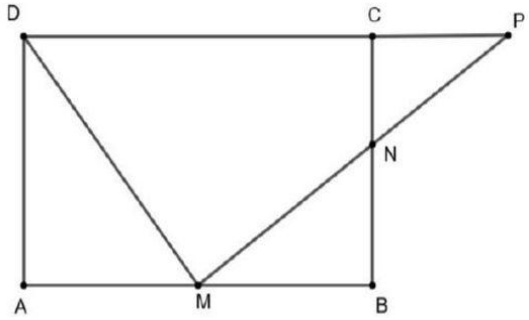
(2p) a) Calculează aria triunghiul *ABC*.



(3p) b) Arată că lungimea segmentului *DE* este o treime din lungimea segmentului *AD*.

5p **5.** Dreptunghiul $ABCD$ are aria egală cu 384 cm^2 și raportul laturilor $\frac{AB}{AD} = \frac{3}{2}$.

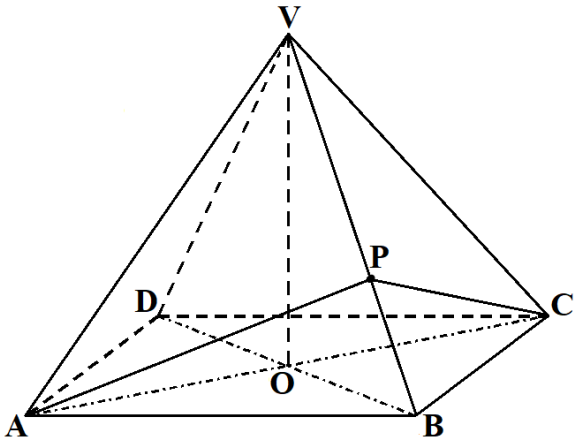
(2p) a) Arată că $AB = 24$ cm.



(3p) b) Dacă M este mijlocul laturii AB, $N \in BC$ astfel încât $\sphericalangle DMN = 90^0$ și $MN \cap DC = \{P\}$, află lungimea segmentului PC.

5p

6. În figura alăturată, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată, cu latura bazei $AB = 12$ cm. Unghiul pe care o față laterală îl face cu planul bazei este de 60^0.



(2p) a) Arată că volumul piramidei este egal cu $288\sqrt{3}$ cm^3.

(3p) b) Dacă $AC \cap BD = \{O\}$ și $P \in VB$ astfel încât aria triunghiului APC să fie minimă, determină cosinusul unghiului format de OP cu planul bazei.

SIMULARE JUDEȚEANĂ
EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Mai 2025
Matematică

SUBIECTUL I

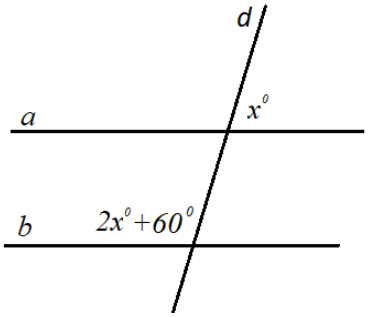
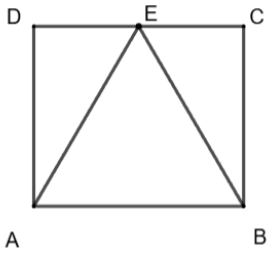
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

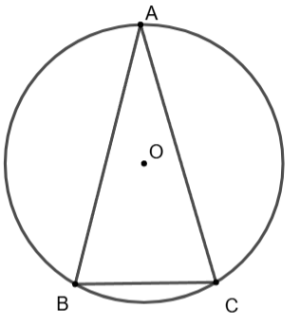
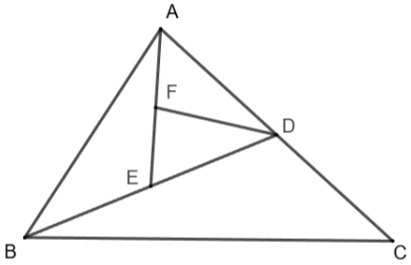
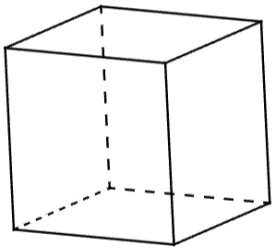
5p	**1.** Rezultatul calculului $10 - 10:5$ este: $\boldsymbol{a}$) 0 $\boldsymbol{b}$) 4 $\boldsymbol{c}$) 8 $\boldsymbol{d}$) 5
5p	**2.** Dacă $\frac{x}{y} = 0,(6)$, atunci valoarea raportului $\frac{2x}{y}$ este: **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{2}{9}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{4}{3}$
5p	**3.** Numerele întregi negative din intervalul $\left(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$ au suma egală cu: **a)** -3 **b)** -6 **c)** 0 **d)** -4
5p	**4.** Suma vârstelor a doi frați este de 25 de ani. Suma vârstelor celor doi frați va fi de 37 de ani peste: **a)** 12 ani **b)** 6 ani **c)** 4 ani **d)** 3 ani

5p	**5.** Restul împărțirii numărului 2025 la 200 este: **a)** 10 **b)** 25 **c)** 0,25 **d)** 5
5p	**6.** Ana cumpără 5 caiete pentru care a plătit 22,5 lei. Valoarea de adevăr a propoziției "Radu a plătit pentru 7 caiete de același fel 31,5 lei" este: **a)** adevarată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată, punctele A, B, C sunt coliniare, în această ordine, astfel încât AC=32 cm și BC=3· AB. Dacă M este mijlocul segmentului AB și B este mijlocul segmentului MN, atunci lungimea segmentului NC este: **a)** 20 cm **b)** 12 cm **c)** 8 cm **d)** 16 cm
5p	**2.** În figura alăturată, dreptele paralele a și b sunt intersectate de secanta d , fiind evidențiate măsurile a două unghiuri de x^0 și $2x^0 + 60^0$. Valoarea lui x^0 este de: **a)** 30^0 **b)** 60^0 **c)** 40^0 **d)** 50^0 
5p	**3.** În figura alăturată, ABCD este dreptunghi și AEB triunghi echilateral. Dacă AB=$12\sqrt{3}\ cm$, atunci perimetrul triunghiului ADE este: **a)** $54\sqrt{3}$ cm **b)** $18(\sqrt{3}+1)$ cm **c)** $36\sqrt{3}$ cm **d)** $6(\sqrt{3}+2)$cm 

5p	**4.** Punctele A, B, C aparțin cercului de centru O și rază 30 cm. Dacă $\sphericalangle BAC = 30^\circ$, atunci lungimea segmentului BC este: **a)** 10 cm **b)** 20 cm **c)** 30 cm **d)** $30\sqrt{2}$ cm 
5p	**5.** În figura alăturată BD, AE și DF sunt mediane în triunghiul ABC, triunghiul ABD și respectiv triunghiul ADE. Dacă aria triunghiului ABC este 48 cm^2, atunci aria triunghiului ADF este: **a)** 6 cm^2 **b)** 12 cm^2 **c)** 18 cm^2 **d)** 36 cm^2 
5p	**6.** Într-o cutie cubică de latură 3cm se introduc cuburi cu latura de 1cm. Numărul maxim de cuburi care încap în cutie este: **a)** 54 **b)** 36 **c)** 27 **d)** 9 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p	**1.** Pe raftul unui magazin sunt cutii cu bomboane, unele cu 14 bomboane și altele cu 15 bomboane. Numărul total de bomboane este 365. **(2p) a)** Este posibil ca numărul cutiilor cu 14 bomboane să fie 15? Justificați. **(3p) b)** Dacă pe raft sunt mai puțin de 26 de cutii cu bomboane, determinați numărul cutiilor cu 15 bomboane.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{3x-9}{x^2-2x-3}-\frac{4x+3}{x^2-1}-\frac{3}{1-x}\right):\frac{1}{x^2-1}$, $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{-1;1;3\}$

(2p) a) Arată că $\frac{3x-9}{x^2-2x-3}=\frac{3}{x+1}$, oricare ar fi $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{-1;3\}$.

(3p) b) Rezolvă în mulțimea $\boldsymbol{R}\setminus\{-1;1;3\}$ inecuația $|E(x)|\leq 3$.

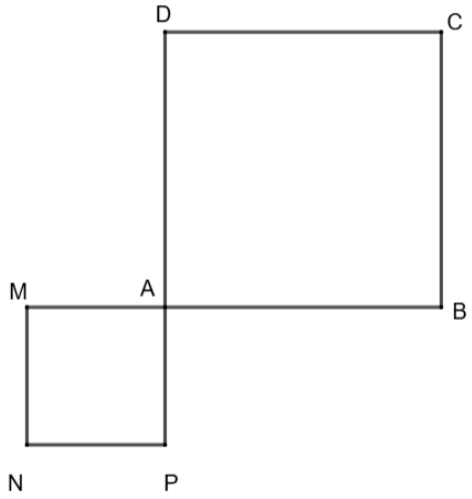
5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2x+2$.

(2p) a) Calculați $f(-3)+f(3)$;

(3p) b) Știind că punctele A și B sunt punctele de intersecție a reprezentării grafice a funcției f cu axele Ox, respectiv Oy ale sistemului de axe ortogonale xOy și C (4;0), demonstrați că triunghiul ABC este dreptunghic.

5p

4. În figura alăturată A,M,B sunt puncte coliniare, iar ABCD și AMNP sunt pătrate, având laturile AB=4 cm și AM=2 cm.

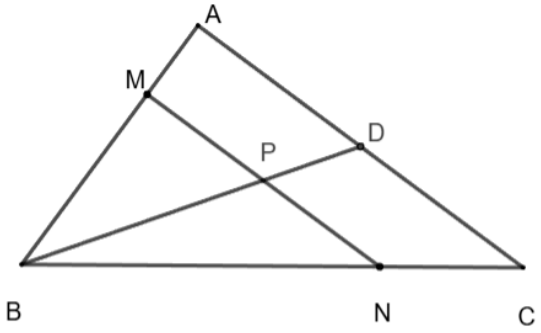


(2p) a) Aflați aria patrulaterului BDMP;

(3p) b) Dacă R este simetricul punctului P față de punctul A, demonstrați că R este ortocentrul triunghiului BMD.

5p

5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, $\measuredangle A = 90^{\circ}$, cu AB=9 cm și AC=12 cm. Punctul D este mijlocul laturii AC, iar punctul N∈ BC astfel încât BN=2NC și punctul M∈ AB astfel încât AM=3 cm.

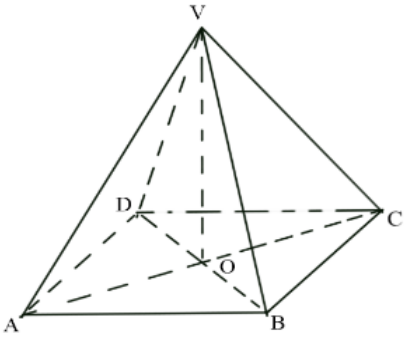


(2p) a) Demonstrați că BN=10 cm;

(3p) b) Știind că dreptele MN și BD se intersectează în punctul P, calculați AP.

5p

6. În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră regulată VABCD cu AB= 6 cm și înălțimea piramidei VO = $3\sqrt{2}$ cm.



(2p) a) Arată că aria laterală a piramidei este egală cu $36\sqrt{3}$ cm².

(3p) b) Arată că tangenta unghiului diedru dintre planele (VBC) și (VAC) este egală cu $\sqrt{2}$.

Test

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 puncte)**

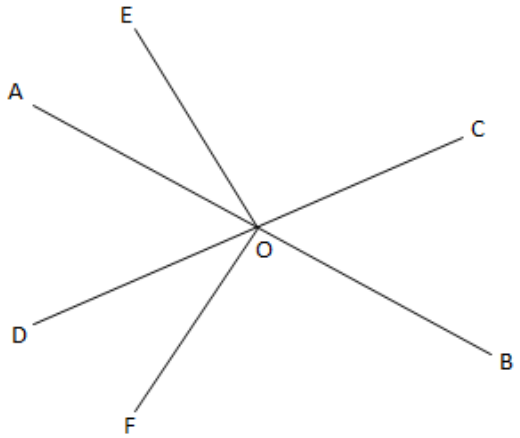
5p	**1.** Rezultatul calculului $\left(2^3-3^2\right)^2-2025^0$ este: **a**) -2025 **b)** -2 **c)** 0 **d)** 1
5p	**2.** O urnă conține bile albe și negre. Știind că numărul bilelor albe este egal cu 48 și că dacă extragem o bilă oarecare, probabilitatea ca aceasta să fie neagră este de 40%, atunci numărul bilelor negre este egal cu: **a)** 12 **b)** 48 **c)** 10 **d)** 32
5p	**3.** Soluția reală a ecuației $-3x+1=5$ este egală cu: **a)** $-1,(3)$ **b)** -2 **c)** $-0,75$ **d)** 2
5p	**4.** Se consideră mulțimea $A=\left[-\frac{1}{2};2\right]$. Produsul dintre inversul celui mai mic număr din mulțimea A și opusul celui mai mare număr din mulțimea A, este egal cu: **a)** -1 **b)** -4 **c)** 4 **d)** -2
5p	**5.** Se consideră numerele reale a,b,c și d, astfel încât $a+b=2\sqrt{3}$ și $c+d=\sqrt{3}$. Atunci $ac+bd+bc+ad-5$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 1 **c)** $2\sqrt{3}-5$ **d)** 6
5p	**6.** Considerăm mulțimea $A=\left\{x\in Z\,\middle|\,|x|\le 2\right\}$. Andrei afirmă că $-1\in A$. Afirmația lui Andrei este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea. ***Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.*** **(30 puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, E, C și D, în această ordine, astfel încât $AB \equiv CD$, $BE = 2 \cdot EC$ și $EC = 2 \cdot CD$. Valoarea raportului $\frac{AE}{ED}$ este egal cu :

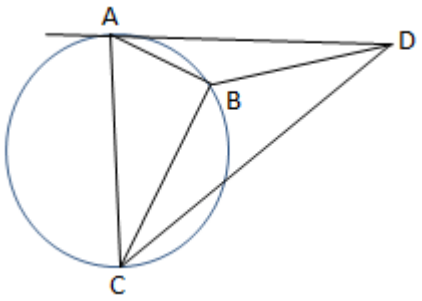
a) 2
b) $\frac{6}{5}$
c) $\frac{3}{5}$
d) $\frac{5}{3}$

5p **2.** În figura de mai jos sunt reprezentate dreptele AB și CD, concurente în punctul O. De o parte și de cealaltă a dreptei AB, se consideră semidreptele OE și OF, astfel încât $\sphericalangle EOD$ și $\sphericalangle AOF$ sunt unghiuri drepte, iar $\sphericalangle AOD = 2 \cdot \sphericalangle AOE$. Atunci măsura unghiului BOD este egală cu:



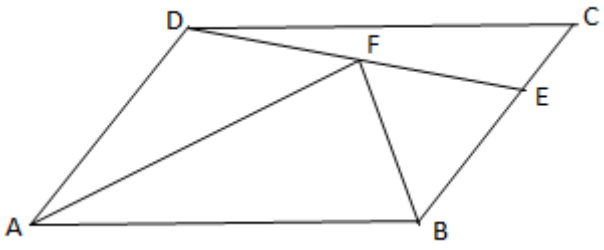
a) 110^0 **b)** 130^0
c) 120^0 **d)** 100^0

5p **3.** În figura de mai jos este reprezentat un cerc și punctele A, B, C situate pe acest cerc, astfel încât AC este un diametru, iar arcul mic AB are măsura egală cu 70^0. Pe tangenta în A la cerc, se ia punctul D, astfel încât $BC = BD$, iar măsura unghiului $\sphericalangle BDC = 20^0$. Atunci măsura unghiului ADC este egală cu:



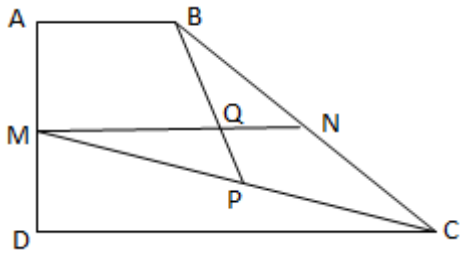
a) 50^0 **b)** 25^0
c) 45^0 **d)** 35^0

5p **4.** În figura de mai jos este reprezentat paralelogramul $ABCD$, având aria egală cu $12\ cm^2$. Punctul E se află pe latura BC, astfel încât aria triunghiului DEC, reprezintă o șesime din aria paralelogramului $ABCD$, iar F este mijocul lui DE. Atunci aria triunghiului FAB este egală cu:



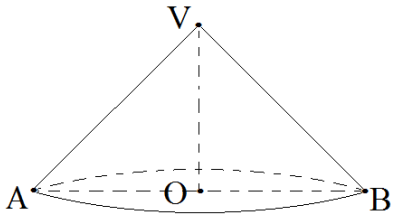
a) $8\ cm^2$ **b)** $6\ cm^2$
c) $5\ cm^2$ **d)** $3\ cm^2$

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, $AB \| CD$, $AB = 3\ cm$ și $CD = 9\ cm$. Punctul M este mijlocul lui AD, N mijlocul lui BC, P mijlocul lui CM, iar Q intersecția dreptelor MN și BP. Atunci lungimea segmentului NQ este egală cu:



a) $0,5\ cm$ **b)** $1\ cm$
c) $1,5\ cm$ **d)** $2\ cm$

5p	**6**. În figura alăturată este reprezentat conul circular drept în care secțiunea axială a acestuia este triunghiul echilateral VAB, având înălțimea $VO = 3\sqrt{3}\ cm$. Volumul conului este egal cu: **a)** $27\pi\ cm^3$ **b)** $81\pi\sqrt{3}\ cm^3$ **c)** $9\pi\sqrt{3}\ cm^3$ **d)** $81\pi\ cm^3$



SUBIECTUL al III-lea. ***Scrie rezolvările complete*** **(30 puncte)**

5p **1.** Cantitatea de $80\ l$ de apă se pune în sticle de jumătate de litru și de un sfert de litru, în total 236 de sticle.

(2p) a) Verificați dacă pot fi exact 112 de sticle de jumătate de litru. Justificați răspunsul dat.

(3p) b) Determinați câte sticle de un sfert de litru s-au folosit.

5p

2. Fie expresia algebrică $E(x)=1-\dfrac{2}{x^2+2x-3}\cdot\left(\dfrac{x^2+2x+5}{4x+4}-1\right):\dfrac{x-1}{2x+2}$, $x\in R-\{-3;-1;1\}$.

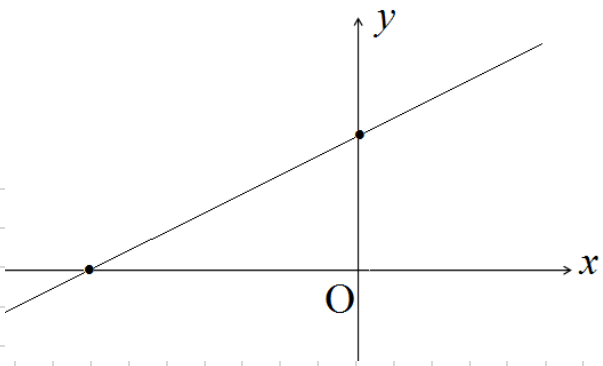
(2p) a) Să se arate că $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$, oricare ar fi $x\in R$.

(3p) b) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care numărul $\sqrt{E(x)}$ este natural.

5p

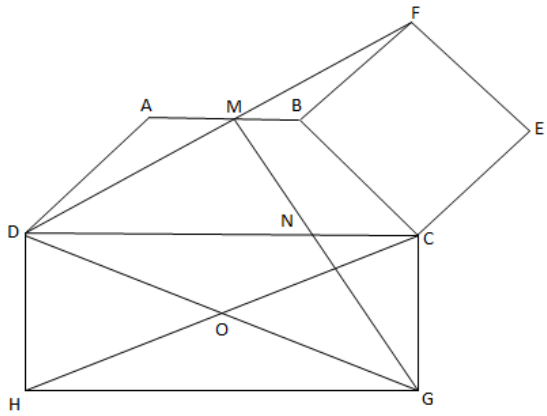
3. Se consideră funcția $f:R\to R,\ f(x)=\frac{x}{2}+2$.

(2p) a) Aflați media geometrică a numerelor $a=f(4)$ și $b=f(28)$.



(3p) b) Reprezentarea geometrică a graficului funcției *f* intersectează axele *Ox* și *Oy* ale sistemului de axe ortogonale *xOy* în punctele *A*, respectiv *B*. Dacă $C(4,4)$, aflați distanța de la punctul *O*, la dreapta *BC*.

5p **4.** În figura de mai jos este reprezentat trapezul isoscel $ABCD,\ AB \| CD,\ AB = 8\ cm,\ CD = 20\ cm$ și $BC = 6\sqrt{2}\ cm.$ În exteriorul trapezului se construiește pătratul $BCEF$ și dreptunghiul $DCGH$, de centru O, cu $CG = 12\ cm.$

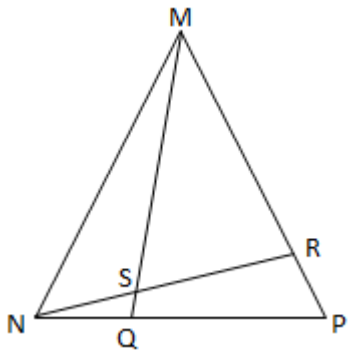


(2p) a) Aflați măsura unghiului $\sphericalangle BAD$.

(3p) b) Dacă M este intersecția dreptelor DF și AB, iar N intersecția dreptelor GM și CD, arătați că punctele F, N, O sunt coliniare.

5p

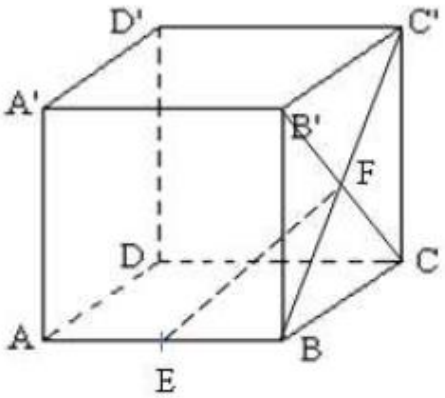
5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral MNP avînd latura egală cu $2\sqrt{2}$ *cm*. Punctul Q este situat pe latura NP, punctul R situat pe latura MP, astfel încât $NQ \equiv RP$.
Notăm cu S intersecția dreptelor MQ și NR.



(2p) a) Arătați că aria triunghiului MNP este egală cu $2\sqrt{3}\ cm^2$.

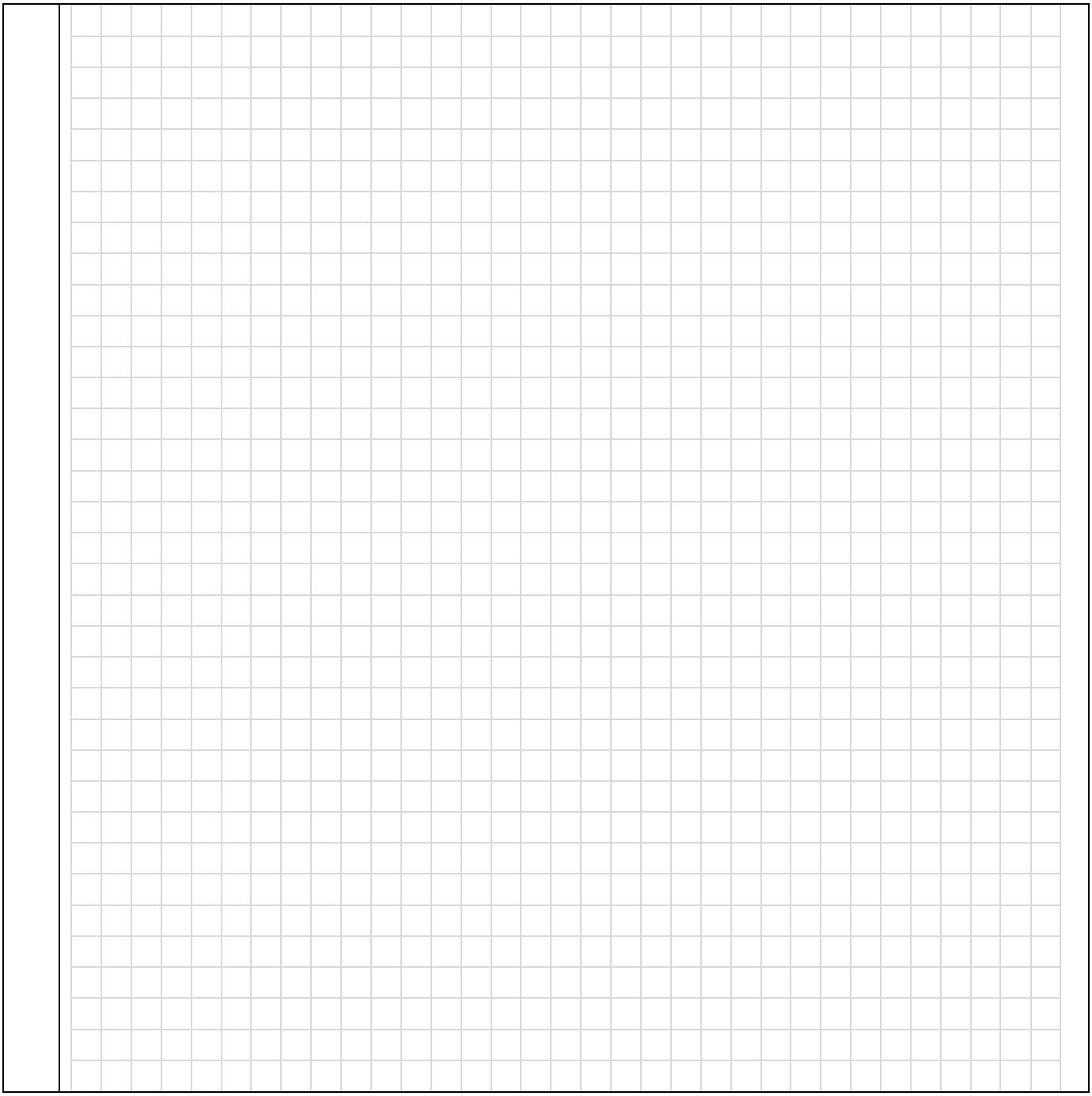
(3p) b) Arătați că $NQ^2 = SQ \cdot MQ$.

5p **6.** În figura de mai jos este reprezentat cubul $ABCDA'B'C'D'$, E mijlocul muchiei AB și F centrul pătratului $B'C'CB$. Se știe că $EF = 2\sqrt{3}\,cm$.



(2p) a) Arătați că volumul cubului este egal cu $64\,cm^3$.

(3p) b) Aflați tangenta unghiului determinat de dreapta EF și planul $(A'AD)$.



Evaluarea națională pentru absolvenții clasei a VIII-a
Februarie 2025
Matematică
Barem de evaluare și de notare

Simulare județeană

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	**d)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	**a)** Presupunem că lungimea traseului este de 100 km. Atunci în prima zi parcurge 25% din 100 = 25 km. A doua zi parcurge $\frac{2}{3}$ din (100 – 25) = 50 km Rămân pentru a treia zi 25 km, dar 25≠24, deci lungimea traseului nu poate fi 100 km	**1p** **1p**
	b) Fie *x* lungimea drumului, atunci în prima zi parcurge $\frac{1}{4}x$ și rămân $x-\frac{1}{4}x=\frac{3x}{4}$ km A doua zi parcurge $\frac{2}{3}\cdot\frac{3x}{4}=\frac{x}{2}$ și rămân $\frac{3x}{4}-\frac{x}{2}=\frac{x}{4}$ km Deci $\frac{x}{4}=24 \Rightarrow x$ = 96 km, atunci a doua zi a parcurs 48 km.	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $(x+4)^2=x^2+8x+16$ *și* $(3x-2)(3x+2)=9x^2-4$ $E(x)=x^3+3x^2+2x$	**1p** **1p**
	b) $E(x)=x(x+1)(x+2)$ $\frac{E(1)}{2\cdot3}+\frac{E(2)}{3\cdot4}+\frac{E(3)}{4\cdot5}+\cdots+\frac{E(99)}{100\cdot101}=\frac{1\cdot2\cdot3}{2\cdot3}+\frac{2\cdot3\cdot4}{3\cdot4}+\frac{3\cdot4\cdot5}{4\cdot5}+\cdots+\frac{99\cdot100\cdot101}{100\cdot101}$ 1+2+3+...+99 = 4950	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $a-b=\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ $a+b=\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{3}=2\sqrt{6}$	**1p** **1p**
	b) $2<\frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}}+\frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}<2{,}5$ și obține $2<\frac{3\sqrt{2}}{2}<2{,}5$ $4<3\sqrt{2}<5$ $\sqrt{16}<\sqrt{18}<\sqrt{25}$ (A)	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** $\Delta ABC, \Delta CDE$ echilaterale și $AB=DE \Rightarrow BC=CD$ Triunghiul BCD isoscel și $\sphericalangle BCD=60^0$, deci triunghiul BCD este echilateral	**1 p** **1 p**
	b) $\sphericalangle MAE=\sphericalangle MEA=60^0 \Rightarrow \Delta MAE$ echilateral	**1p**

	$MA = ME = AE = 2AC = 2AB = 2DE \Rightarrow B, C, D$ sunt mijloacele laturilor ΔMAE	**1p**
	AD, EB, MC mediane în $\Delta MAE, AD \cap EB = \{N\} \Rightarrow N =$ centru de greutate $\Rightarrow M, N, C$ coliniare	**1p**
5.	**a)** ΔCBA: $\sphericalangle B = 90^0 \Rightarrow tg60^0 = \frac{6\sqrt{2}}{BC} \Rightarrow BC = 2\sqrt{6}$ cm	**1p**
	$P_{ABCD} = 2\left(6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}\right) = 4\sqrt{2}\left(3 + \sqrt{3}\right)$ cm	**1p**
	b) $CB = CE = 2\sqrt{6}$ cm, $\sphericalangle BCE = 120^0 \Rightarrow \sphericalangle AEB = 30^0 \Rightarrow \Delta ABE$ – isoscel, $EB = AB = 6\sqrt{2}$ cm	**1p**
	$EB = \frac{AF}{2}$ și EB mediană în $\Delta AEF \Rightarrow \Delta AEF$ dreptunghic în $E \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AEF$ (UU)	**1p**
	$\frac{A_{ABC}}{A_{AEF}} = \left(\frac{AB}{AE}\right)^2 = \left(\frac{6\sqrt{2}}{6\sqrt{6}}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow A_{ABC} + A_{BCEF} = 3A_{ABC} \Rightarrow A_{BCEF} = 2A_{ABC} = A_{ABCD}$	**1p**
6.	**a)** $A'M = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 12$ cm, $BM = 8\sqrt{7}$ cm	**1p**
	$A'M \perp B'C'$, $A'M \perp BB' \Rightarrow A'M \perp (BCC') \Rightarrow A'M \perp MB$, deci $A_{A'MB} = \frac{A'M \cdot MB}{2} = 48\sqrt{7}$ cm^2	**1p**
	b) N-mijlocul $A'C' \Rightarrow RN$ linie mijlocie în $\Delta CC'A' \Rightarrow RN \parallel CC'$, $CC' \subset (BCC') \Rightarrow RN \parallel (BCC')$, deci $d\left(R, (BCC')\right) = d\left(N, (BCC')\right)$	**1p**
	Duc $NP \perp B'C'$ (1); $CC' \perp (A'B'C'), NP \subset (A'B'C') \Rightarrow CC' \perp NP \Rightarrow NP \perp CC'$ (2)	
	(1) + (2) + $B'C', CC' \subset (BCC') \Rightarrow NP \perp (BCC')$	**1p**
	$NP = d\left(N, (BCC')\right)$, NP linie mijlocie în $\Delta AMC' \Rightarrow NP = \frac{A'M}{2} = \frac{12}{2} = 6$ cm $= d\left(R, (BCC')\right)$	**1p**

Evaluarea națională pentru absolvenții clasei a VIII-a
Februarie 2025
Matematică
Barem de evaluare și de notare

Varianta 2

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**d)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1.	**a)** a=nr. probleme algebra, g=nr. probleme geometrie, z= nr de zile, a=25⇒ g=33	**1p**
	25=3·8+1⟹ z=8⇒ g=4·8+2=34, 33 ≠34. Nu este posibil.	**1p**
	b) $a = 3z + 1,\ g = 4z + 2,\ g = a + 8$	**1p**
	$4z + 2 = 3z + 1 + 8 \Rightarrow z = 7$	**1p**
	Pentru a termina toate problemele, îi sunt necesare, 8 zile	**1p**
2.	a) $5\sqrt{5} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5\sqrt{5} \cdot \frac{4}{2\sqrt{5}} - 5\sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 10 - 5 = 5$	**1p**
	$a = 5 + \sqrt{7}^2 = 5 + 7 = 12$	**1p**
	b) $\left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{7}\right)^2 = 12 - 12\sqrt{21} + 63 = 75 - 12\sqrt{21}$	**1p**
	$b = 75 - 12\sqrt{21} + 12\sqrt{21} = 75$	**1p**
	$n \cdot a \cdot b = n \cdot 12 \cdot 75 = n \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, n∈N*, n cel mai mic $\Rightarrow n = 30$	**1p**
3.	**a**) $(2x + 1)(1 - 2x) = 1 - 4x^2$, $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$,	**1p**
	$E(x) = 1 - 4x^2 - 4x^2 - 8x - 4 + 8x^2 + 2x + 8x + 4 = 2x + 1$	**1p**
	b) $N = 2 \cdot 0 + 1 + 2 \cdot 1 + 1 + 2 \cdot 2 + 1 + \ldots + 2 \cdot 18 + 1$	**1p**
	$N = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + 18) + \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{19 \text{ termeni}}$	**1p**
	$N = 2 \cdot \frac{18 \cdot 19}{2} + 19 = 19^2$ este pătratul unui număr natural.	**1p**
4.	**a)** $AC = 12\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$P_{ADC} = (18 + 18\sqrt{3})\ cm$	**1p**

	b) $\Delta ADC: DC = \frac{AC}{2} \Rightarrow \sphericalangle DAC = 30^0 \Rightarrow DP = 9cm$	**1p**
	$\Delta DPC: PC = \frac{DC}{2} = 3\sqrt{3}cm \Rightarrow MP = 3cm$	**1p**
	$A_{ABMP} = A_{ABC} - A_{PMC} = \frac{99\sqrt{3}}{2} cm^2$	**1p**
5.	**a)** $AD = DC$ și $\sphericalangle D = 90^o \Rightarrow \Delta ADC$ dreptunghic isoscel cu $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ACD = 45^o$, $AC=AB \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel cu $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ACB = 67^o30'$	**1p**
	$\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP - \sphericalangle ACB = 90^o - 67^o30' = 22^o30' = \frac{\sphericalangle ACD}{2} \Rightarrow$ CP bisectoare $\sphericalangle ACD$	**1p**
	b) Fie $CR \perp AB, R \in AB$, determină $\sphericalangle BCR = 22^o30'$	**1p**
	$DC \equiv CR, \sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle BCR, \sphericalangle D = \sphericalangle R = 90^o \Rightarrow \Delta DCP \equiv \Delta RCB$	**1p**
	$\Delta DCP \equiv \Delta RCB \Rightarrow BC \equiv CP$	**1p**
6.	**a)** Din Teorema lui Pitagora în $\Delta GBC \Rightarrow CG = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow S_{\text{muchii laterale}} = 16\sqrt{3}cm$	**1p**
	$16\sqrt{3} < 32 \Leftrightarrow \sqrt{3} < 2 \Rightarrow S_{\text{muchii laterale}} < 32$ cm	**1p**
	b) În ΔGBC $BC = 4, BG = 8 \Rightarrow \sphericalangle GBC = 60°$, BT bis. $\Rightarrow \sphericalangle TBC = 30° \Rightarrow TC = \frac{4\sqrt{3}}{3}$	**1p**
	$GM=\frac{16}{3} \Rightarrow DM = \frac{8}{3} \Rightarrow$ În ΔGDC, avem $\frac{DM}{DG} = \frac{TC}{CG} \overset{\text{R Thales}}{\Longrightarrow} MT \parallel DC$	**1p**
	Din $DC \parallel HG$ și $MT \parallel DC \Rightarrow MT \parallel HG \Rightarrow \sphericalangle(MT, EG) = \sphericalangle(HG, EG) = 45°$	**1p**

SIMULARE JUDEȚEANĂ
EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Februarie 2025
Matematică

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $40 - 10 : 5$ este egal cu:
a) 6
b) 10
c) 30
d) 38

5p **2.** Dacă $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$ și $b \neq 0$, atunci $\frac{a}{3b}$ este egal cu:
a) $\frac{1}{6}$
b) $\frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{3}$
d) $\frac{2}{3}$

5p **3.** Știind că $\overline{4x} + \overline{xx} = 148$, atunci *x* este:
a) număr prim
b) cub perfect
c) pătrat perfect
d) cifră pară

5p **4.** Ordinea crescătoare a numerelor $a = 3\sqrt{3}$, $b = 5$, $c = 2\sqrt{7}$ este:
a) a, b, c
b) a, c, b
c) b, a, c
d) c, a, b

5p **5.** În tabelul următor sunt prezentate informaţii despre un grup de copii, care participă la un concurs sportiv şi numărul de participanţi din fiecare oraș.

Oraș	Galați	Tulcea	Iași	Brăila	Cluj	Ploiești
Număr de participanţi	10	8	15	5	3	9

Conform tabelului, procentul numărului de participanţi din Iași, din numărul total de participanţi, este egal cu:
a) 30 %
b) 15 %
c) 10 %
d) 5 %

5p **6.** Ana face următoarea afirmație: *„Mulțimea* $A = \{ x \in \mathbb{Z}^* \mid \frac{6}{x} \in \mathbb{Z} \}$ *are cardinalul egal cu 8”.*
Afirmația făcută de Ana este:
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** În figura alăturată, *M* este un punct situat pe segmentul *AB*, iar *N* și *P* sunt mijloacele segmentelor *AM*, respectiv *MB*. Știind că *NP* = 18 cm, atunci lungimea segmentului *AB* este egală cu:

a) 18 cm

b) 24 cm

c) 20 cm

d) 36 cm

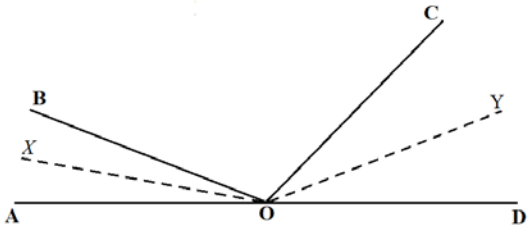
5p **2.** În figura alăturată punctele A, O, D sunt coliniare, OX și OY sunt bisectoarele unghiurilor AOB și COD. Dacă $\sphericalangle XOY$ are măsura 140^0, măsura unghiului BOC este egală cu:

a) 90^0

b) 100^0

c) 110^0

d) 120^0



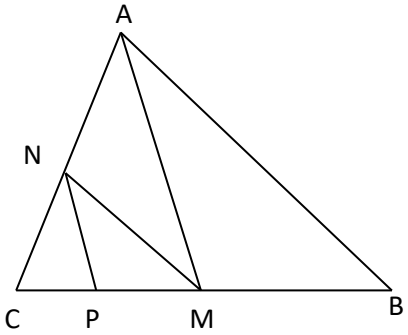
5p **3.** Fie triunghiul ABC din figura alăturată, având aria de 32 cm^2. Știind că M este mijlocul laturii BC, N este mijlocul laturii AC, iar P mijlocul segmentului CM, atunci aria patrulaterului $ANPM$ este egală cu:

a) 18 cm^2

b) 16 cm^2

c) 12 cm^2

d) 20 cm^2



5p **4.** În figura alăturată, triunghiul *ABC* este dreptunghic în *A*, *BD* este bisectoarea unghiului *ABC*, $D \in AC, \sphericalangle C = 30^0 şi\ BD = 6\ cm$.

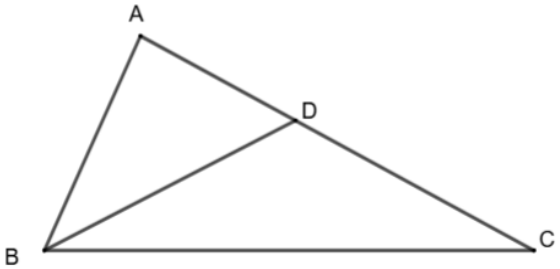
Lungimea segmentului *AC* este egală cu:

a) 8 cm

b) 6 cm

c) 9 cm

d) 10 cm



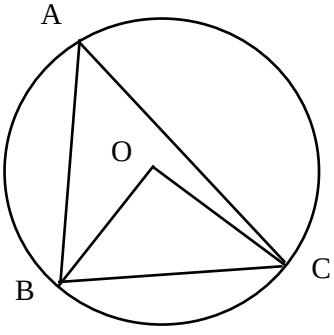
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc *C(O, r)* și punctele *A, B, C* ∈ *C(O, r)*. Știind că raza cercului are lungimea *r* = 5 cm și $\sphericalangle BAC = 45°$, atunci lungimea coardei BC este egală cu:

a) 5 cm

b) $5\sqrt{2}$ cm

c) 10 cm

d) $10\sqrt{2}$ cm



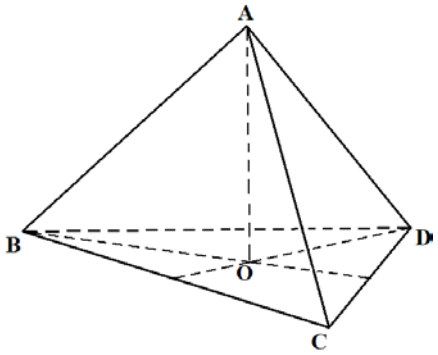
5p **6.** În figura alăturată, $ABCD$ este un tetraedru regulat, având raza cercului circumscris bazei, $OB = 6\sqrt{3}$ cm. Înălțimea AO a tetraedrului regulat este egală cu :

a) $6\sqrt{2}$ cm

b) $6\sqrt{3}$ cm

c) 12 cm

d) $6\sqrt{6}$ cm



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p **1.** Un excursionist parcurge un traseu în trei zile. În prima zi parcurge 25% din lungimea traseului, a doua zi parcurge $\frac{2}{3}$ din rest, iar în a treia zi, ultimii 24 km.

(2p) a) Este posibil ca lungimea traseului să fie de 100 km? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Câți kilometri a parcurs excursionistul în a doua zi?

5p **2.** Se consideră expresia $E(x) = x(x+4)^2 - (3x-2)(3x+2) + 2x(2x-7) - 4$

(2p) a) Arată că $E(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$, pentru orice număr real x.

(3p) b) Calculează: $\frac{E(1)}{2\cdot 3} + \frac{E(2)}{3\cdot 4} + \frac{E(3)}{4\cdot 5} + \cdots + \frac{E(99)}{100\cdot 101}$

5p

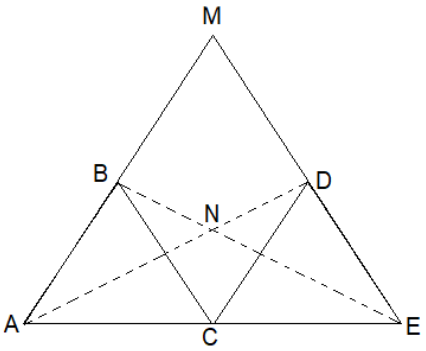
3. Considerăm numerele $a = \sqrt{6} + \sqrt{3}$ și $b = \sqrt{6} - \sqrt{3}$

(2p) a) Calculează $a - b$ și $a + b$.

(3p) b) Arată că $2 < \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} < 2{,}5$.

5p

4. În figura alăturată, triunghiurile *ABC* și *CDE* sunt echilaterale, $AB = DE$, punctele *A*, *C*, *E* sunt coliniare, $AB \cap ED = \{M\}$ și $AD \cap EB = \{N\}$.

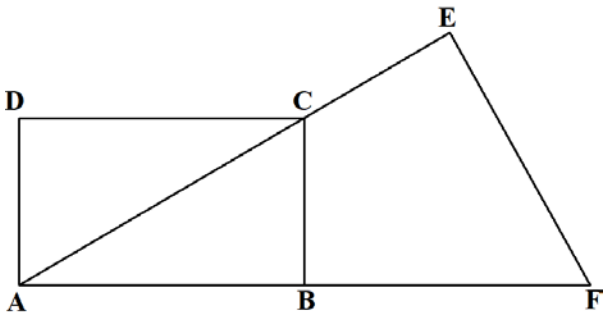


(2p) a) Arată că triunghiul *BCD* este echilateral.

(3p) b) Demonstrează că punctele *M*, *N*, *C* sunt coliniare.

5p

5. În figura alăturată $ABCD$ este dreptunghi, $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $\sphericalangle ACB = 60^0$, punctele A, C, E sunt coliniare, $CE = CB$, iar F este simetricul lui A față de B.

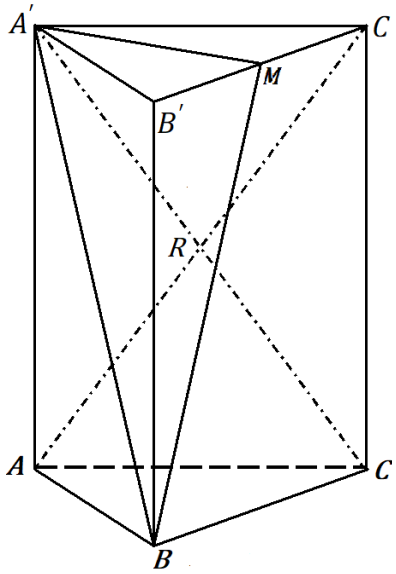


(2p) a) Arată că perimetrul dreptunghiului $ABCD$ este $4\sqrt{2}(3 + \sqrt{3})$cm.

(3p) b) Demonstrează că aria patrulaterului $BCEF$ este egală cu aria dreptunghiului $ABCD$.

5p

6. În figura alăturată $ABCA'B'C'$ este o prismă dreaptă cu baza triunghi echilateral de latură $AB = 8\sqrt{3}$ cm, $BB' = 20$ cm, iar M este mijlocul muchiei $B'C'$.



(2p) a) Arată că aria triunghiului $A'MB$ este egală cu $48\sqrt{7}$ cm^2.

(3p) b) Dacă $AC' \cap CA' = \{R\}$, calculează distanța de la punctul R la planul (BCC').

SIMULARE JUDEȚEANĂ
EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Februarie 2025
Matematică

Varianta 2

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $(200-100:2)\cdot(-2)$ este egal cu:
a) 300
b) 100
c) -300
d) -100

5p **2.** Diferența dintre cel mai mare număr natural de forma $\overline{13xy}$, divizibil cu 45 și cel mai mic număr natural este egală cu:
a) 90
b) 45
c) 1394
d) 1395

5p **3.** Mulțimea soluțiilor ecuației $2x-10=x-12$ este:
a) $\{-2\}$
b) $\{-22\}$
c) $\{-1\}$
d) $\emptyset$

5p **4.** Cel mai mare număr întreg, care nu aparține intervalului $(-5;+\infty)$ este egal cu:
a) -6
b) -5
c) Nu se poate preciza
d) -4

5p **5.** Darius, Laura, Bianca și Ana, au calculat media geometrică a numerelor:
$a=\left|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right|$ și $b=3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Darius	Laura	Bianca	Ana
$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	6	$\sqrt{6}$

Rezultatul corect a fost obținut de către:
a) Darius
b) Laura
c) Bianca
d) Ana

5p **6.** Daria are în pușculița 15 monede de 50 de bani și 12 monede de 10 bani. Daria afirmă : „Am în pușculiță 8,70 lei”. Afirmația Dariei este:
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare *A, B, C* si *D*, în această ordine, astfel încât lungimile segmentelor AB, BC și CD sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5, iar lungimea segmentului AD este egală cu 20 cm. Lungimea segmentului BD este egală cu:

a) 8 cm

b) 10 cm

c) 16 cm

d) 3 cm

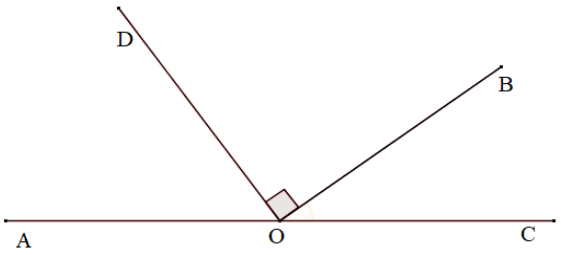
5p **2.** În figura alăturată unghiurile AOB și BOC sunt adiacente suplementare și semidreapta OD este perpendiculară pe OB. Dacă $\sphericalangle AOB = 4 \cdot \sphericalangle BOC$, atunci măsura unghiului AOD este egală cu:

a) 45°

b) 36°

c) 54°

d) 56°



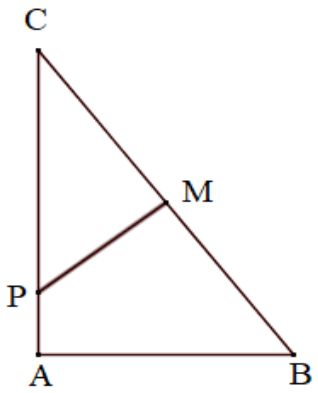
5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90^o$, $AB = 12$ cm și $BC = 20$ cm. În punctul M, mijlocul ipotenuzei BC, se construiește perpendiculara pe CB care intersectează latura AC în punctul P. Perimetrul triunghiului PMC este egal cu:

a) 30 cm

b) 26 cm

c) 24 cm

d) 48 cm



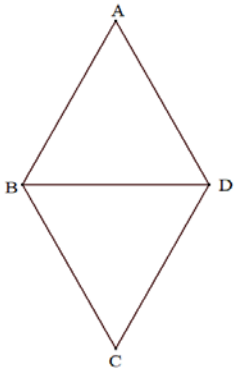
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat rombul ABCD cu măsura unghiului ABD egală cu 60° și AB = 4 cm. Aria rombului este egală cu:

a) $4\sqrt{3}\ cm^2$

b) $8\sqrt{3}\ cm^2$

c) $4\sqrt{2}cm^2$

d) $16\ cm^2$



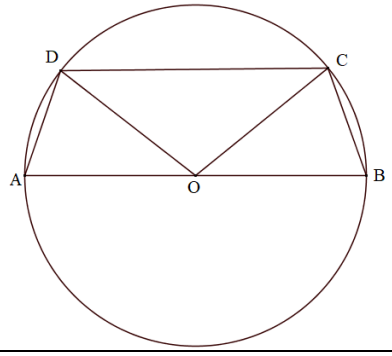
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul isoscel ABCD, înscris în cercul de centru O. Dacă $O \in AB$, $\widehat{AD} = 40^0$, atunci măsura unghiului COD este egală cu:

a) 120^0

b) 110^0

c) 115^0

d) 100^0



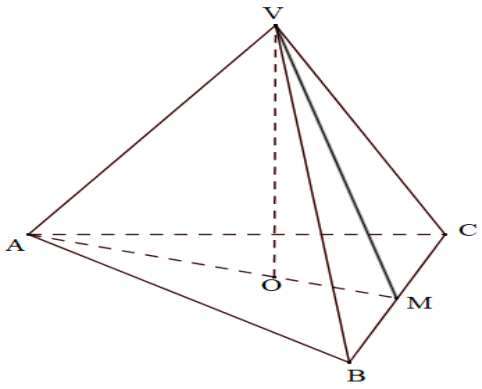
5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida triunghiulară regulată VABC. Măsura unghiului format de dreptele VA și BC este egală cu:

a) 90°

b) 60°

c) 45°

d) 0°



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p **1.** Un elev are ca temă un număr de probleme de algebră și geometrie. Dacă rezolvă zilnic câte 3 probleme de algebră și 4 de geometrie, îi rămân nerezolvate două probleme de geometrie și o problemă de algebră. Numărul problemelor de geometrie este cu 8 mai mare decât al celor de algebră.

(2p) a) Este posibil ca numărul problemelor de algebră să fie 25? Justificați răspunsul dat.

(3p) b) Câte zile i-ar fi necesare ca să rezolve toate problemele?

5p **2.** Se consideră numerele $a = 5\sqrt{5} \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{20}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-2}$ și $b = \left(2\sqrt{3} - 3\sqrt{7}\right)^2 + 6\sqrt{84}$.

(2p) a) Arată că $a = 12$.

(3p) b) Determinați cel mai mic număr natural nenul n pentru care numărul $n \cdot a \cdot b$ este cub perfect.

5p

3. Se consideră expresia

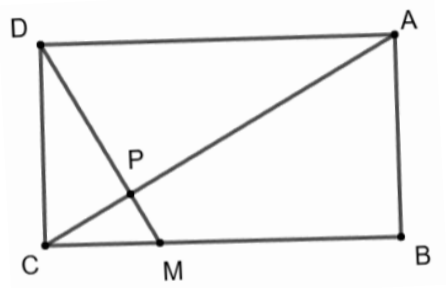
$E(x) = (2x+1)(1-2x) - 4(x+1)^2 + 2x(4x+1) + 4(2x+1)$

(2p) a) Arată că $E(x) = 2x + 1$

(3p) b) Arată că $N = E(0) + E(1) + E(2) + \cdots .. + E(18)$ este pătratul unui număr natural.

5p

4. În figura alăturată, ABCD este un dreptunghi cu dimensiunile AB=$6\sqrt{3}$cm, BC=18cm și DP⊥AC, P∈AC, DP∩BC={M}.

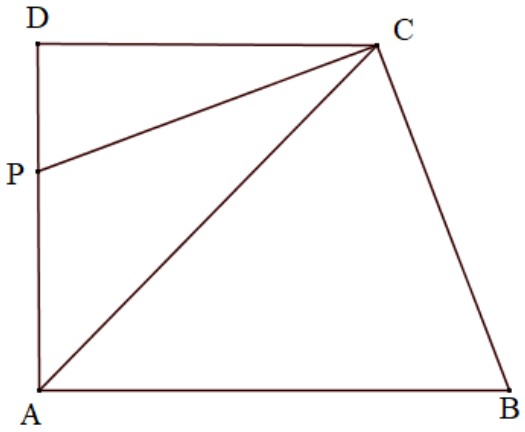


(2p) a) Calculați perimetrul triunghiului ADC;

(3p) b) Calculați aria patrulaterului ABMP.

5p

5. În figura alăturată este reprezentat un trapez dreptunghic ABCD cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^o$, $AD = CD$ și AB = AC. Perpendiculara în C pe BC intersectează latura AD în punctul P.

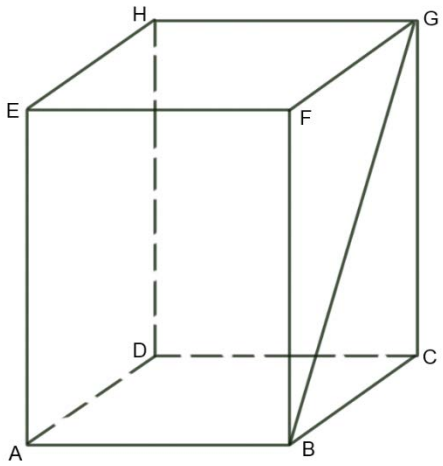


a) Arată că semidreapta CP este bisectoarea unghiului ACD.

(3p) ***b)*** Arată că segmentele BC și CP sunt congruente.

5p

6. În figura alăturată este reprezentată prisma patrulateră regulată ABCDEFGH cu AB= 4 cm și BG= 8 cm.



(2p) a) Arată că suma muchiilor laterale este mai mică decât 32 cm.

.

(3p) b) Dacă BT este bisectoarea unghiului GBC, $T \in CG$ și $M \in DG$ astfel încât GM= 5,(3) cm, determină măsura unghiului format de dreptele MT și EG.

SIMULARE JUDEȚEANĂ
EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Februarie 2025
Matematică

Varianta 3

SUBIECTUL I

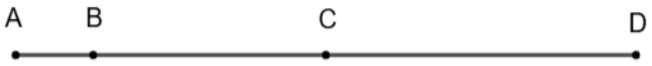
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $10 - 4 \cdot 3$ este: **a**) 22 **b**) 18 **c**) 2 **d**) -2
5p	**2.** Cel mai mare divizor comun al numerelor 8 și 12 este: **a)** 2 **b)** 4 **c)** 24 **d)** 96
5p	**3.** Într-o clasă cu 28 elevi, 25% sunt fete. Numărul băieților este: **a)** 7 **b)** 14 **c)** 21 **d)** 28
5p	**4.** Dacă $x + y = 2$, atunci valoarea expresiei $(x - y)(x + y) + 4y$ este: **a)** 6 **b)** 2 **c)** 20 **d)** 4
5p	**5.** Fie A = $\{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x - 2 < 0\}$. Cardinalul mulțimii A este egal cu: **a)** 6 **b)** 5 **c)** 4 **d)** 7
5p	**6.** Ana afirmă că: „ Media geometrică a numerelor a=$\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}$ $și\ b = \left\|2 - \sqrt{5}\right\|$ este $\sqrt{3}$”. Afirmația Anei este: **a)** adevarată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect **(30 puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate punctele coliniare A, B, C și D, astfel încât AB=9 cm, AC=36 cm, AD=2· AC. Lungimea segmentului BD este egală cu:



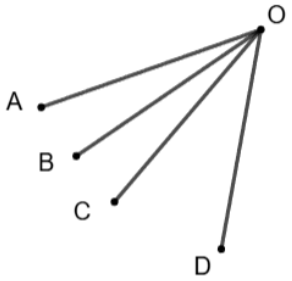
a) 54 cm

b) 63 cm

c) 64 cm

d) 99 cm

5p **2.** Se consideră unghiurile AOB, BOC, COD. Dacă semidreapta OC este bisectoarea unghiului AOD, semidreapta OB este bisectoarea unghiului AOC și măsura unghiului COB este 15°, atunci măsura unghiului AOD este:



a) 30°

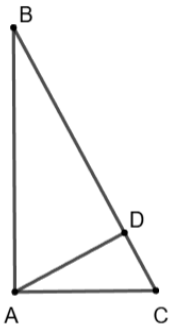
b) 45°

c) 60°

d) 90°

5p **3.** Triunghiul dreptunghic ABC, cu măsura unghiului A egală cu 90° și $AD \perp BC$, are lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză egale cu 4 cm și respectiv 9 cm.

Aria triunghiului ABC este egală cu:



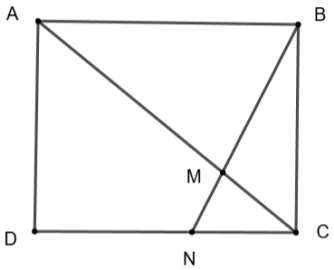
a) 78 cm^2

b) 39 cm^2

c) 36 cm^2

d) 18 cm^2

5p **4.** În figura alăturată, ABCD este dreptunghi, iar punctul $M \in AC$ astfel încât AM=CD, $BM \cap CD = \{N\}$. Dacă măsura unghiului DCA este 40°, atunci măsura unghiului CNM este:



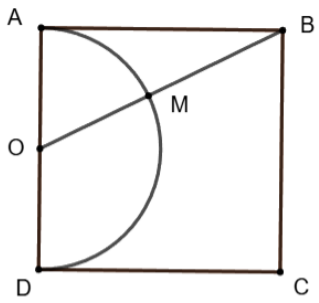
a) 50°

b) 60°

c) 70°

d) 80°

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat ABCD cu lungimea laturii egală cu 10 cm. Semicercul de centru O, mijlocul laturii AD, intersectează segmentul OB în punctul M. Lungimea segmentului BM este:



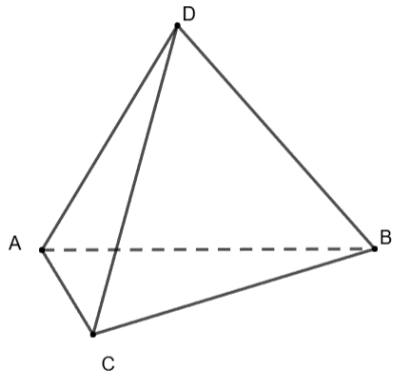
a) 5 cm

b) $5\sqrt{5}$ cm

c) $5(\sqrt{5}-1)$cm

d) $5(\sqrt{5}+1)$ cm

5p	**6.** În tetraedrul regulat ABCD, suma tuturor muchiilor este egală cu 48 cm. Aria unei fețe este egală cu: **a)** $8\sqrt{3}$ cm^2 **b)** $8(1+\sqrt{3})$ cm^2 **c)** $16\sqrt{3}$ cm^2 **d)** $16(1+\sqrt{3})$ cm^2



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 puncte)**

5p 1. În urmă cu 10 ani, vârsta tatălui era de 9 ori mai mare decât a fiului, iar peste 2 ani, vârsta tatălui va fi de 3 ori mai mare decât a fiului.

(2p) a) Este posibil ca, în prezent, vârsta tatălui să fie de 61 ani?

(3p) b) Aflați vârsta actuală a fiului.

5p **2.** Fie $a=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{2-\sqrt{3}}$

(2p) a) Calculați $A=a^2+b^2$;

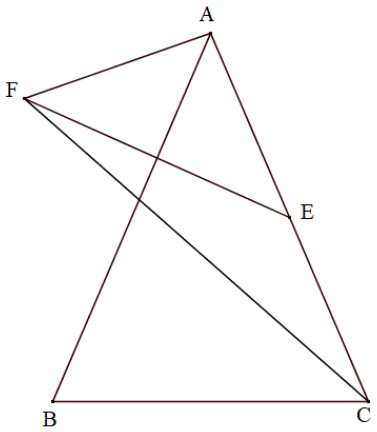
(3p) b) Demonstrați că $\frac{a+b}{\sqrt{6}}$ este număr natural.

5p **3.** Fie $E(x)=(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)-x^8$

(2p) a) Calculați $E\left(\sqrt{2}\right)+E(-\sqrt{2})$;

(3p) b) Demonstrați că $x^2 + x - E(x) > 0$, pentru orice x număr real.

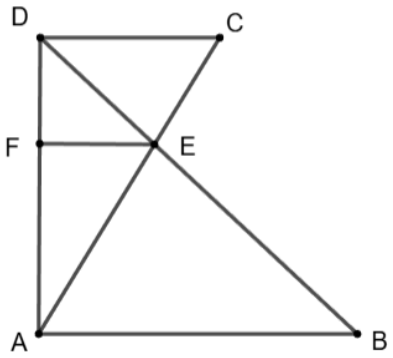
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC isoscel cu AB = AC = 16 cm și $\sphericalangle A = 45^o$. Punctul E este mijlocul laturii AC, iar punctul F reprezintă simetricul punctului E în raport cu dreapta AB.



(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu $4\sqrt{2}$ cm^2.

3p) *b)* Demonstrează că lungimea segmentului CF este mai mică decât 18 cm.

5p **5.** În figura alăturată, segmentele AB și CD sunt paralele, AB=10 cm, CD=6 cm, $AC \cap BD = \{E\}$, $EF \| AB$.

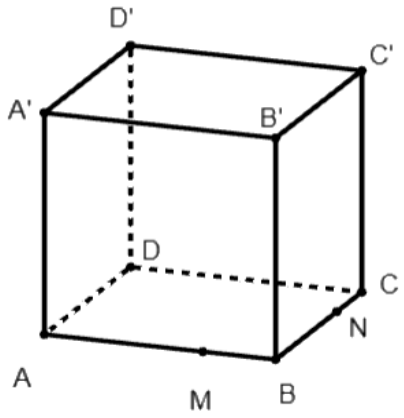


(2p) a) Demonstrați că $DE \cdot EA = CE \cdot EB$;

(3p) b) Calculați lungimea segmentului EF.

5p

6. În cubul ABCDA`B`C`D` cu lungimea laturii AB=4cm, se consideră punctele M, N astfel încât M∈ AB, N∈ BC, AM=BN=3 cm, AN∩ DM={P}



(2p) a) Demonstrați că AN⊥ DM;

(3p) b) Arătați că sinusul unghiului format de dreapta A`P și planul (MND) este egal cu $\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

Prezenta lucrare conține_____ pagini

Numele:.....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

SIMULARE - EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRUABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2023 – 2024
Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $-24+24:24$ este egal cu:

a) 0
b) 23
c) -23
d) -24

5p **2.** Numărul care reprezintă 15% din 200 este egal cu:

a) 3
b) 20
c) 30
d) 300

5p **3.** Cel mai mare număr întreg din intervalul $[-6;\ 9)$ este:

a) 9
b) -6
c) 8
d) -5

5p **4.** Dintre numerele $\sqrt{12}$; $3\sqrt{3}$; 6 și $4\sqrt{2}$ mai mare este numărul:

a) $\sqrt{12}$
b) $3\sqrt{3}$
c) 6
d) $4\sqrt{2}$

5p **5.** Tabelul de mai jos prezintă temperaturile medii înregistrate pe parcursul unei săptămâni:

Ziua	**luni**	**marți**	**miercuri**	**joi**	**vineri**	**sâmbătă**	**duminică**
Temperatura în grade Celsius	$\mathbf{-2^o}$	$\mathbf{-3^o}$	$\mathbf{1^o}$	$\mathbf{-1^o}$	$\mathbf{-1^o}$	$\mathbf{2^o}$	$\mathbf{-3^o}$

Temperatura medie în această săptămână este:

a) -1°
b) 1°
c) -3°
d) -7°

5p	**6.** Doi frați au împreună 15 ani. Peste șapte ani cei doi frați vor avea împreună 22 de ani. Afirmația este: **a)** adevărată **b)** falsă

SUBIECTUL al II-lea

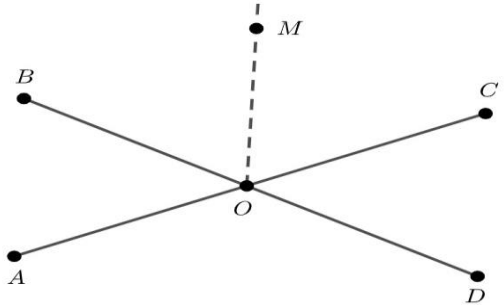
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** În figura alăturată sunt reprezentate, în această ordine, punctele coliniare A, B, C, D, E, astfel încât $AB = 1$ cm, $BC = 2$ cm, $CD = 3$ cm și $DE = 4$ cm. Dacă punctul M este mijlocul lui AE, atunci lungimea lui AM egală cu:

a) 4 cm
b) 5 cm
c) 8 cm
d) 10 cm

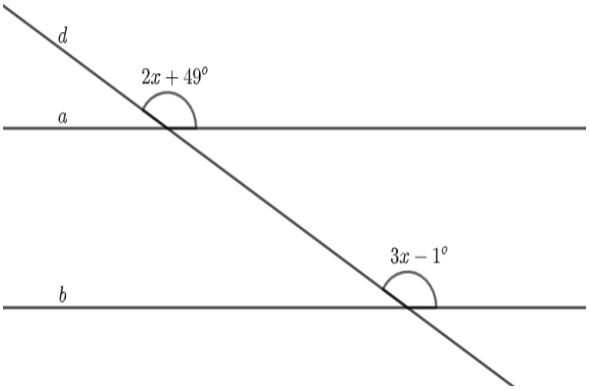
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile opuse la vârf AOB și COD. Dacă măsura $\sphericalangle COD = 48^o$ și OM este bisectoarea $\sphericalangle BOC$ atunci măsura $\sphericalangle BOM$ este egală cu:

a) 66°
b) 48°
c) 24°
d) 132°



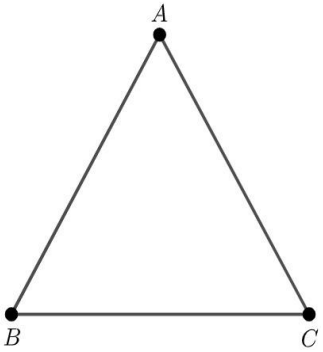
5p **3.** În figura alăturată dreptele paralele *a* și *b* sunt intersectate de secanta *d*, în care avem evidențiate două unghiuri. Atunci valoarea lui x este egală cu:

a) 48°
b) 55°
c) 10°
d) 50°



5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC de arie $18\sqrt{3}$ cm². Perimetrul triunghiului ABC este egal cu:

a) $6\sqrt{3}$ cm
b) $6\sqrt{2}$ cm
c) $18\sqrt{3}$ cm
d) $18\sqrt{2}$ cm



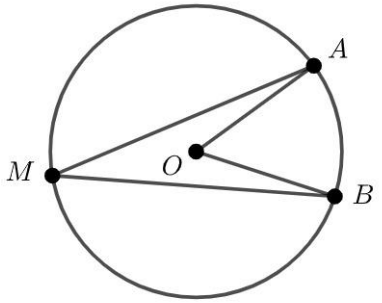
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat un cerc de centru O și rază r pe care se află punctele A, B și M astfel încât măsura unghiului AOB este egală cu 54°. Măsura unghiului AMB este egală cu:

a) 54°

b) 108°

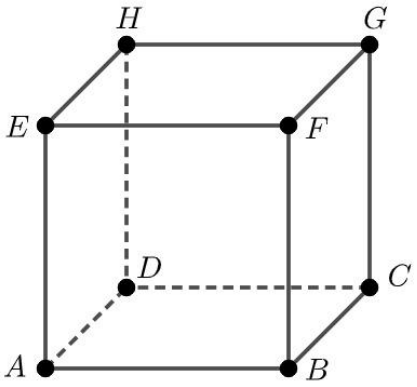
c) 27°

d) 60°



5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un cub cu suma muchiilor egală cu 60 cm. Aria bazei este egală cu:

a) 25 cm^2
b) 50 cm^2
c) 20 cm^2
d) 36 cm^2



SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete. ***(30 de puncte)***

5p **1.** Dacă elevii unei clase se așează câte doi în bancă, atunci un elev stă singur în bancă, iar două bănci rămân libere. Dacă elevii se așează câte trei în bancă, atunci rămân șase bănci libere.

(2p) a) Verificați dacă în clasă pot fi 27 de elevi. Justificați răspunsul!

(3p) b) Determinați numărul elevilor din clasă.

5p **2.** Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x^2}{x+3}-\frac{x^3}{x^2+6x+9}\right):\left(\frac{x}{x+3}-\frac{x^2}{x^2-9}\right)\cdot\frac{1}{x\cdot(3-x)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$.

(2p) a) Arătați că $\frac{x}{x+3}-\frac{x^2}{x^2-9}=\frac{-3x}{(x-3)(x+3)}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

(3p) b) Arătați că $E(x)=\frac{1}{x+3}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$.

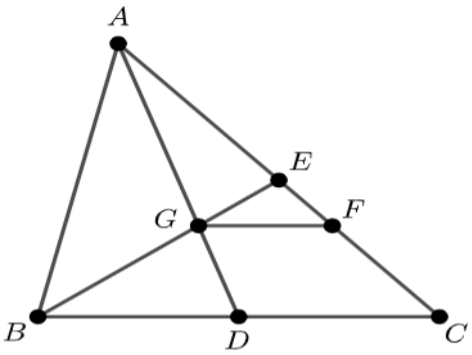
5p **3.** Fie numerele reale $x=\left(\frac{8}{\sqrt{18}}+\frac{6}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{\sqrt{2}}{13}$ și $y=\left(\frac{5}{\sqrt{147}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right):\frac{\sqrt{3}}{14}$

(2p) a) Arătaţi că $x=\frac{2}{3}$.

(3p) b) Arătați că numărul $A=|y-x|$ este natural.

5p

4. În figura alăturată AD și BE sunt mediane în triunghiul ABC, cu $D \in BC$ și $E \in AC$, $GF \parallel BC$, unde $\{G\} = AD \cap BE$ și $F \in AC$, iar $BC = 18$ cm și $AD = 12$ cm.

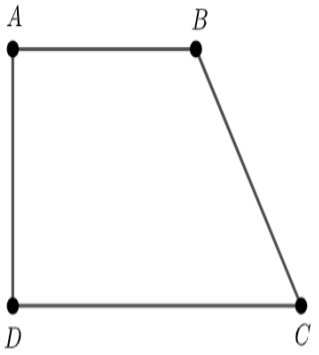


(2p) a) Arătați că $GF = 6$ cm.

(3p) b) Determinați raportul ariilor triunghiurilor EGF și ABC.

5p

5. În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $ABCD$, cu $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = \sphericalangle D = 90^o$ și $CD > AB$. Se știe că $AB = 4\sqrt{3}$ cm, $AD = 6$ cm și $\sphericalangle BCD = 60^o$.

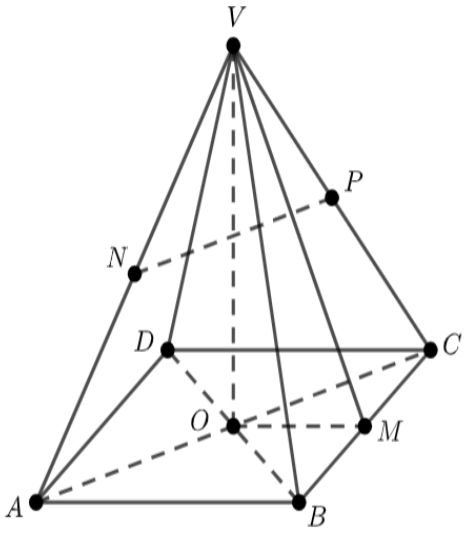


(2p) a) Arătați că perimetrul trapezului $ABCD$ este egal cu $(6 + 14\sqrt{3})$ cm.

(3p) b) Calculați sinusul unghiului DBC.

5p

6. În figura alăturată, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată cu $AB = 10$ cm și măsura unghiului format de muchia laterală cu planul (ABC) este egală cu 45°. Punctul M este proiecția punctului V pe muchia BC, punctele N și P sunt mijloacele muchiilor VA și VC, iar $\{O\} = AC \cap BD$.



(2p) a) Arătați că $NP \parallel (ACD)$.

(3p) b) Determină tangenta unghiului dintre planele (VOM) și (VAB).

SIMULARE JUDEŢEANĂ EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2023 - 2024
Matematică
14.05.2024
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea
- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie 5 puncte, fie 0 puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea
- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	a)	**5p**
2.	b)	**5p**
3.	c)	**5p**
4.	c)	**5p**
5.	c)	**5p**
6.	b)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.	d)	**5p**
2.	c)	**5p**
3.	a)	**5p**
4.	a)	**5p**
5.	c)	**5p**
6.	c)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1.	**a)** Dacă elevii unei clase sunt așezați câte trei într-o bancă, atunci rămâne o bancă cu un singur elev $\Rightarrow$ numărul elevilor nu este divizibil cu 3	**1p**
	$30 \vdots 3 \Rightarrow$ nu pot fi 30 de elevi în clasă.	**1p**
	b) notăm cu x numărul de bănci $\Rightarrow 3(x-1)+1=2x+8$	**1p**
	$3x-3+1=2x+8 \Leftrightarrow x=10$	**1p**
	Numărul de elevi este egal cu 28.	**1p**
2.	**a)** $E(x)=\left(\dfrac{2x-6-x-3+x+5}{(x-3)(x+3)}\right):\dfrac{2x-4}{3x-9}$	**1p**

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.sbisj.ro

	$E(x)=\dfrac{2x-4}{(x-3)(x+3)}\cdot\dfrac{3(x-3)}{2x-4}=\dfrac{3}{x+3}$	**1p**
	b) $E(a)\geq 3^{-1}\Leftrightarrow\dfrac{3}{a+3}\geq\dfrac{1}{3}$ $a\in\mathbb{N}\Rightarrow a+3\geq 0$. Inecuația devine: $9\geq a+3\Leftrightarrow a\leq 6$ Deoarece $a\in\mathbb{R}-\{-3,2,3\}\Rightarrow a\in\{0;1;4;5;6\}$	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $f(m+2)=-(m+2)+4$ $f(m+2)=2-m\Leftrightarrow M(m+2;2-m)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f pentru orice număr real m.	**1p** **1p**
	b) $Gf\cap Ox=A(x;0)\Rightarrow A(4;0), Gf\cap Oy=B(0;y)\Rightarrow B(0;4)$ $\triangle AOB$ este dreptunghic $\overset{T.P.}{\Rightarrow} AB=4\sqrt{2}(u)$ Fie $OM\perp AB\Rightarrow d(O:Gf)=OM=\dfrac{OA\cdot OB}{AB}=\dfrac{4\cdot 4}{4\sqrt{2}}=2\sqrt{2}(u)$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** $A_{ABCD}=AB\cdot BC$ $A_{ABCD}=6\sqrt{3}\cdot 6=36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$	**1p** **1p**
	b) Construim înălțimea ME a triunghiului $AMB\Rightarrow AE=BE=3\sqrt{3}$. Aplicând teorema unghiului de 30^0 și teorema lui Pitagora, obținem $AM=MB=6$ cm. $\triangle MAD\equiv\triangle MBC\Rightarrow MC=MD(1)$ $\triangle MAD$ este isoscel $m(\sphericalangle MDA)=30^0\Rightarrow m(\sphericalangle MDC)=60^0\overset{(1)}{\Rightarrow}\triangle MDC\Rightarrow$ este echilateral	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** Constrium $PE\perp MN\Rightarrow\triangle PEN$ dreptunghic $\overset{T.P.}{\Rightarrow} NE=3\sqrt{3}$ cm $MEPQ$ dreptunghi $\Rightarrow ME=PQ=9$ cm $\Rightarrow MN=ME+EN=9+3\sqrt{3}=3(3+\sqrt{3})$ cm	**1p** **1p**
	b) NP semicerc $\Rightarrow\sphericalangle PTN=90^0$ În patrulaterul $MNTQ$: $\sphericalangle NMQ=\sphericalangle MQT=\sphericalangle QTN=90^0\Rightarrow MNTQ$ este dreptunghi $P_{MNTQ}=2(MN+MQ)=24+6\sqrt{3}$ cm	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** $V_{VABCD}=\dfrac{A_{ABCD}\cdot VO}{3}$ $A_{ABCD}=AB^2=144\,\text{cm}^2\Rightarrow V_{VABCD}=288\sqrt{3}\ \text{cm}^3$	**1p** **1p**
	b) $BO\perp(VAC)$; fie $ON\perp CV; ON, CV\subset(VAC)\overset{T3\perp}{\Rightarrow} BN\perp CV$ $(VAC)\cap(VBC)=CV; ON\perp CV, ON\subset(VAC); BN\perp CV, BN\subset(VBC)\Rightarrow$ $\sphericalangle((VBC);(VAC))=\sphericalangle ONB$ $BO\perp(VAC); ON\subset(VAC)\Rightarrow\triangle BON$ este dreptunghic, $\sphericalangle BON=90^0\Rightarrow tg(\sphericalangle BNO)=\dfrac{OB}{ON}$ $VO=6\sqrt{3}; OC=6\sqrt{2}\overset{T.P.}{\Rightarrow} CV=6\sqrt{5}\Rightarrow ON=\dfrac{6\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\Rightarrow tg(\sphericalangle BNO)=\dfrac{\sqrt{15}}{3}$	**1p** **1p** **1p**

Str. Lucian Blaga, nr. 26
550169, Sibiu
Tel: +40 (0) 369 10 12 02
Fax: +40 (0) 269 21 08 17
www.sbisj.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

MINISTERUL EDUCAȚIEI

Prezenta lucrare conține _____ pagini.

EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2023-2024

Matematică

Simulare Judeţeană 14.05.2024

Numele:.....

.....

Inițiala prenumelui tatălui: .....

Prenumele:.....

.....

Școala de proveniență: .....

.....

Centrul de examen: .....

Localitatea: .....

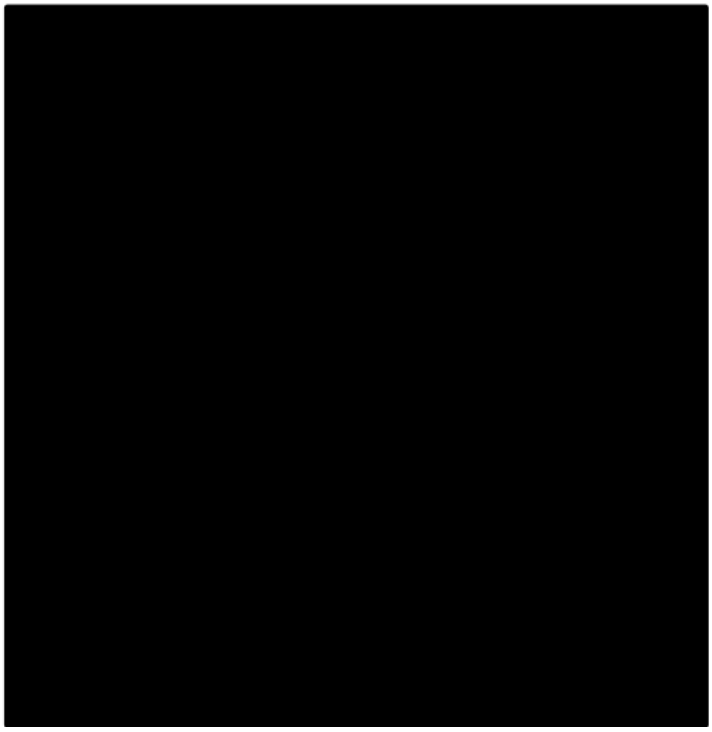
Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $\left[1+2\cdot\left(3+4\right)\right]:3$ este egal cu: **a)** 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 15
5p	**2.** Trei robinete umplu un bazin în 12 ore. Opt robinete vor umple bazinul în: **a)** 4 ore **b)** 4 ore și 30 minute **c)** 4 ore și 50 minute **d)** 32 ore
5p	**3.** Se consideră operația $\overline{ab}\cdot\overline{ba}=736$, unde $\overline{ba}$ este un număr prim. Numărul $\overline{ab}$ este egal cu: **a)** 16 **b)** 23 **c)** 32 **d)** 46
5p	**4.** Se consideră șirul de numere: $a=2\sqrt{3}$; $b=3\sqrt{2}$; $c=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$ și $d=\sqrt{28}:\sqrt{2}$. Cel mai mic număr este: **a)** a **b)** b **c)** c **d)** d

5p **5.** Mioara, Simona, Mircea și Sorin au avut de efectuat diferența $x-y$, unde : $x=2\frac{1}{3}+3$ și $y=-3+2,(3)$.

Rezultatele obținute de cei patru elevi sunt trecute în tabelul de mai jos:

Mioara	Simona	Mircea	Sorin
0	$4,(6)$	6	$10,(6)$

Dintre cei patru elevi, a calculat corect:

a) Mioara
b) Simona
c) Mircea
d) Sorin

5p **6.** Se alege la întâmplare o literă din cuvântul ALGEBRA. Ana afirmă: „Probabilitatea ca litera aleasă să fie A, este egală cu $\frac{2}{5}$.”. Afirmația Anei este:

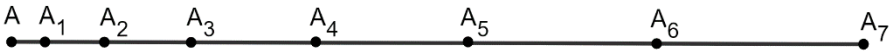
a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

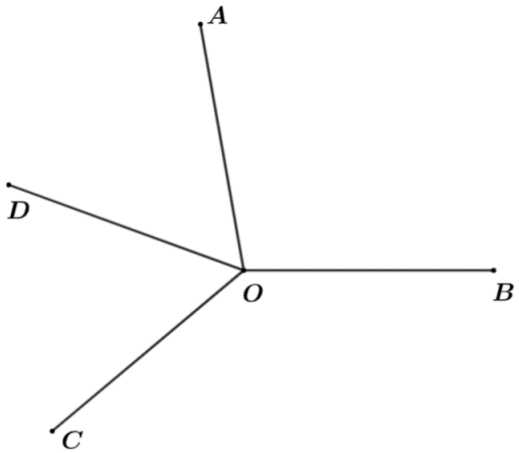
5p **1.** În figura alăturată punctele $A; A_1; A_2; A_3; A_4; A_5; A_6; A_7$ sunt coliniare. Lungimile segmentelor sunt egale cu: $AA_1=1$ cm, $A_1A_2=2$ cm, $A_2A_3=3$ cm, $A_3A_4=4$ cm, $A_4A_5=5$ cm, $A_5A_6=6$ cm, $A_6A_7=7$ cm, iar M este mijlocul segmentului AA_7. Lungimea segmentului AM este egală cu cea a segmentului:

a) A_2A_6
b) A_5A_7
c) AA_4
d) A_1A_5

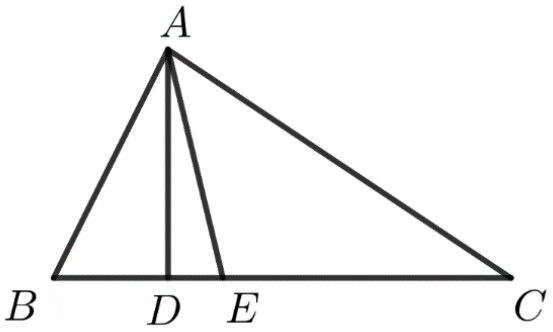


5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate unghiurile adiacente $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$, cu măsurile de 100° și respectiv 140°. Semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOC. Măsura unghiului format de semidreptele OD și OB, este egală cu:

a) 60°
b) 120°
c) 160°
d) 180°

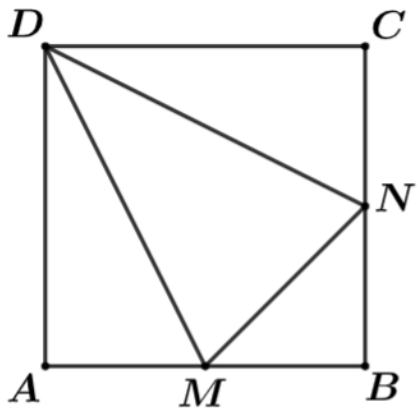


5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu măsurile unghiurilor $ABC = 60^0$ și $ACB = 20^0$. AD este înălțimea triunghiului ABC, iar AE, $E \in BC$, este bisectoarea unghiului BAC. Măsura unghiului DAE este egală cu:



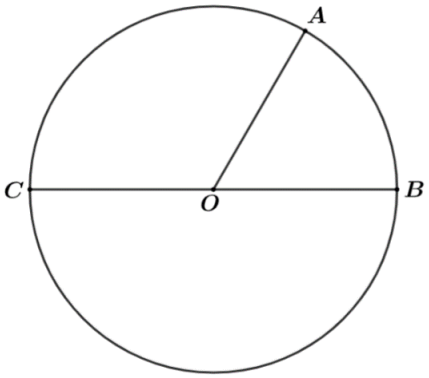
a) 20^0
b) 30^0
c) 50^0
d) 70^0

5p **4.** În figura alătură este reprezentat pătratul $ABCD$ cu latura de 8 cm, iar M și N sunt mijloacele laturilor AB și respectiv BC. Aria triunghiului MND este egală cu:



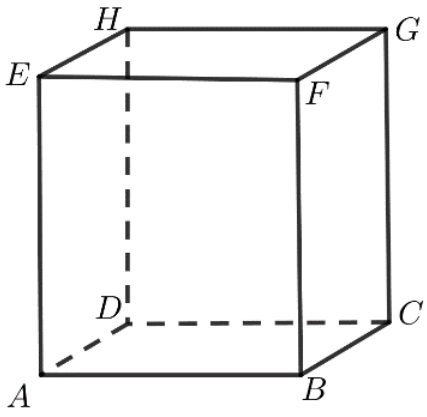
a) $24\,\text{cm}^2$
b) $32\,\text{cm}^2$
c) $36\,\text{cm}^2$
d) $48\,\text{cm}^2$

5p **5.** În figura alătură este reprezentat cercul de centru O și rază $OA = 6$ cm. Se construiește diametrul BC astfel încât măsura arcului mic AB este egală cu 60°. Lungimea coardei AC este egală cu:



a) $6\,\text{cm}$
b) $6\sqrt{2}\,\text{cm}$
c) $6\sqrt{3}\,\text{cm}$
d) $12\,\text{cm}$

5p **6.** În figura alătură este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDEFGH$, cu dimensiunile: $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm, $AE = 13$ cm. Perimetrul patrulaterului $ACGE$ este egal cu:



a) 34 cm
b) 50 cm
c) 52 cm
d) 60 cm

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Dacă elevii unei clase sunt așezați câte trei într-o bancă, atunci rămâne o bancă cu un singur elev. Dacă sunt așezați câte doi elevi într-o bancă, atunci 8 elevi rămân în picioare.

(2p) a) E posibil ca în clasă să fie 30 de elevi? Justificare.

(3p) b) Determină numărul de elevi din clasa respectivă.

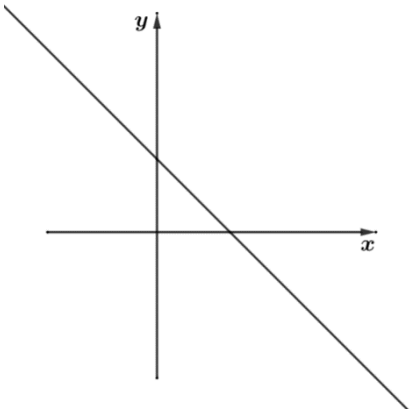
5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-3}+\frac{x+5}{x^2-9}\right):\frac{2x-4}{3x-9}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{-3,2,3\}$.

(2p) a) Arată că $E(x)=\frac{3}{x+3}$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}-\{-3,2,3\}$.

(3p) b) Determină numerele naturale *a* pentru care $E(a) \geq 3^{-1}$.

5p **3.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x+4$.

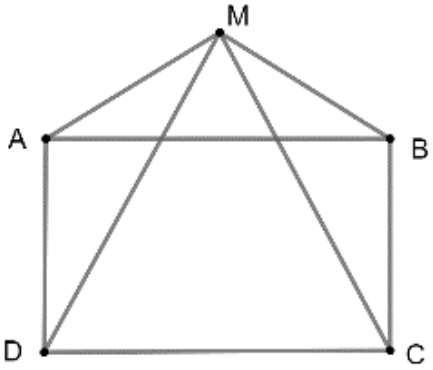
(2p) a) Verifică dacă, punctul $M(m+2;2-m)$ aparține reprezentării geometrice a graficului funcției f pentru orice număr real m.



(2p) b) Calculează distanța de la

originea sistemului de axe la graficul funcției f .

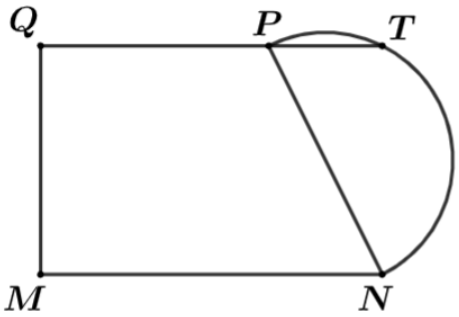
5p **4.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul *ABCD*, având laturile $BC = 6$ cm și $AB = 6\sqrt{3}$ cm. În exteriorul dreptunghiului se construiește triunghiul isoscel *ABM*, cu măsura unghiului *AMB* egală cu 120^0.



(2p) a) Arată că aria dreptunghiului este egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2.

(3p) b) Demonstrează că triunghiul *MDC* este echilateral.

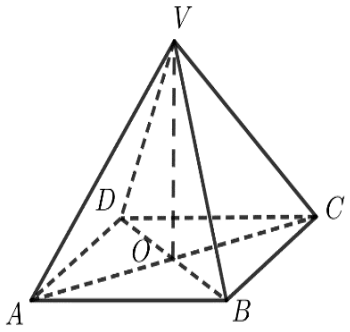
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat trapezul dreptunghic $MNPQ$ în exteriorul căruia s-a construit semicercul de diametru NP. Se știe că $MN \| QP$, $\sphericalangle M = \sphericalangle Q = 90^0$, $MQ = 3$ cm, $QP = 9$ cm, $NP = 6$ cm, iar $QP \cap NP = \{T\}$.



(2p) a) Arătați că $MN = 3\left(3+\sqrt{3}\right)$ cm.

(3p) b) Aflați perimetrul patrulaterului $MNTQ$.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentată piramida patrulateră dreaptă $VABCD$, cu bază pătratul $ABCD$, având latura bazei $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 6\sqrt{3}$ cm.



(2p) a) Arată că volumul piramidei este egal cu $288\sqrt{3}$ cm^3.

(3p) b) Calculează tangenta unghiului format de planele *(VBC)* și *(VAC)*.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{28}=2\sqrt{7}$ $2\sqrt{7}+2-2\sqrt{7}=2$	**3p** **2p**
2.	$f(1)+f(2)+...+f(10)=2(1+2+...+10)-10=$ $=100$	**3p** **2p**
3.	$4^{x+1}=4^2$ $x+1=2\Rightarrow x=1$	**3p** **2p**
4.	Multiplii lui 7 din mulţimea A sunt 7 şi $14\Rightarrow 2$ cazuri favorabile Numărul de elemente ale mulţimii A este $15\Rightarrow 15$ cazuri posibile $p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{2}{15}$	**2p** **1p** **2p**
5.	$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=3\vec{i}$ $AC=3$	**3p** **2p**
6.	$\sin x=\cos x$ $x=\dfrac{\pi}{4}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(2))=\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{vmatrix}=$ $=5$	**2p** **3p**
b)	$A(1)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}5&5&5\\5&5&5\\5&5&5\end{pmatrix}=5A(1)$	**2p** **3p**
c)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&x&x\\x&1&x\\x&x&1\end{vmatrix}=2x^3-3x^2+1$ $\det(A(x))=0\Leftrightarrow(2x+1)(x-1)^2=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ sau $x=1$	**2p** **3p**
2.a)	$f=X^3-2X^2-2X+3$ $f(1)=1-2-2+3=0$	**2p** **3p**
b)	$f(2)=2\Rightarrow 8-8-4+m=2$ $m=6$	**3p** **2p**

c)	$x_1+x_2+x_3=2$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=-2$, $x_1x_2x_3=-4$	**3p**
	$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=2\cdot\frac{-2}{-4}=1$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'=$	**2p**
	$=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$	**3p**
c)	$f''(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
	$f''(x)>0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ convexă pe intervalul $(0,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1 xf(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=$	**3p**
	$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}\ln 2$	**2p**
b)	$\int_0^1 xf'(x)\,dx=xf(x)\Big\vert_0^1-\int_0^1 f(x)\,dx=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}-\text{arctg}x\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$	**3p**
c)	$V=\pi\int_0^1 h^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(x^4+2x^2+1\right)dx=$	**2p**
	$=\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)\Big\vert_0^1=\frac{28\pi}{15}$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\left(2+\sqrt{2}\right)=6+3\sqrt{2}$ $6+3\sqrt{2}-3\sqrt{2}=6$	**2p** **3p**
2.	$f\left(-2\right)=-1$ $f\left(0\right)=1$ $f(-2)\cdot f(0)=-1$	**2p** **2p** **1p**
3.	$x^2+1=1$ $x=0$	**2p** **3p**
4.	$10\%\cdot 1000=100$ Preţul după ieftinire este 900 de lei	**2p** **3p**
5.	M mijlocul lui $\left(PR\right)\Rightarrow x_M=\frac{x_P+x_R}{2}$ şi $y_M=\frac{y_P+y_R}{2}$ $x_M=2$ $y_M=2$	**1p** **2p** **2p**
6.	$\sin^2 B+\cos^2 B=1\Rightarrow \cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}$ $\cos B=\frac{12}{13}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=$ $=-1$	**3p** **2p**
b)	$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot A-xI_2=\begin{pmatrix}2-x & 1\\ 1 & 1-x\end{pmatrix}$ $A\cdot A-xI_2=A\Leftrightarrow x=1$	**3p** **2p**
c)	$\det\left(M+A\right)=\begin{vmatrix}m+1 & m+1\\ m+1 & 1\end{vmatrix}=-m^2-m$ $m=-1$ sau $m=0\Rightarrow M=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sau $M=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$	**3p** **2p**
2.a)	$5*\left(-5\right)=5+\left(-5\right)-2$ $=-2$	**3p** **2p**
b)	$x*y=x+y-2$ şi $y*x=y+x-2$, pentru orice numere reale x şi y $x*y=y*x$, pentru orice numere reale x şi y	**3p** **2p**

c)	$(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3=\big((-3)*3\big)*\big((-2)*2\big)*\big((-1)*1\big)*0=$ $=(-2)*(-2)*(-2)*0=-12$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'e^x+x\left(e^x\right)'=e^x+xe^x=$ $=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$f''(x)=(x+2)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$ $f''(x)+f(x)=(x+2)e^x+xe^x=2(x+1)e^x=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=-1$ $f'(-1)=0$, $f'(x)<0$ pentru $x\in(-\infty,-1)$ şi $f'(x)>0$ pentru $x\in(-1,+\infty)\Rightarrow$ funcţia f are un punct de extrem, $x=-1$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_4^5 xf(x)\,dx=\int_4^5 1\cdot dx=$ $=x\Big\vert_4^5=1$	**2p** **3p**
b)	$F'(x)=(4+\ln x)'=\frac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ $F'(x)=f(x)$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A}=\int_5^a \lvert f(x)\rvert\,dx=\int_5^a \frac{1}{x}dx=$ $=\ln a-\ln 5=\ln 3\Rightarrow a=15$	**2p** **3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că numărul $2\left(\sqrt{7}+1\right)-\sqrt{28}$ este natural.

5p **2.** Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^{x+1}=16$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din mulţimea $A=\{1,2,3,...,15\}$, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AC}$.

5p **6.** Determinaţi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ştiind că $\frac{3\sin x-2\cos x}{\cos x}=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x\\ x & 1 & x\\ x & x & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Arătaţi că $A(1)\cdot A(2)=5A(1)$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2-2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=3$, calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că restul împărţirii polinomului f la $X-2$ este egal cu 2.

5p **c)** Pentru $m=4$, arătaţi că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 x\,f(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 2$.

5p **b)** Calculaţi $\int_0^1 x\,f'(x)\,dx$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $h:[0,1]\to\mathbb{R}$, $h(x)=\frac{1}{f(x)}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 3

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $3\left(2+\sqrt{2}\right)-3\sqrt{2}=6$.

5p **2.** Calculaţi $f(-2)\cdot f(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2+1\right)=\log_3 1$.

5p **4.** Preţul unui obiect este 1000 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o ieftinire cu 10%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(2,1)$ şi $R(2,3)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului PR.

5p **6.** Calculaţi $\cos B$, ştiind că $\sin B=\frac{5}{13}$ şi unghiul B este ascuţit.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A\cdot A-xI_2=A$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi matricele $M=\begin{pmatrix}m & m\\ m & 1\end{pmatrix}$, ştiind că $\det(M+A)=0$, unde m este număr real.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x*y=x+y-2$.

5p **a)** Calculaţi $5*(-5)$.

5p **b)** Arătaţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă.

5p **c)** Calculaţi $(-3)*(-2)*(-1)*0*1*2*3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Verificaţi dacă $f''(x)+f(x)=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f are un punct de extrem.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_4^5 xf(x)\,dx$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=4+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, $a>5$, pentru care aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=5$ şi $x=a$, este egală cu $\ln 3$.

Prezenta lucrare conține_____pagini

Numele:……..
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....
Școala de proveniență: …….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

SIMULARE JUDEȚEANĂ EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

IANUARIE 2023

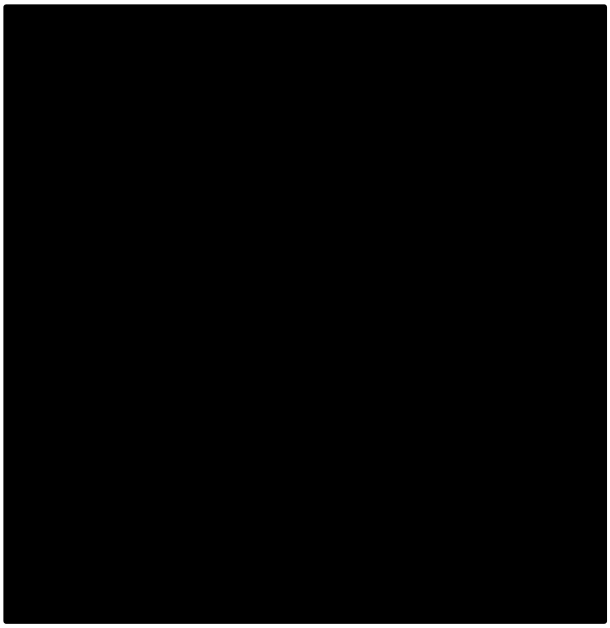
Matematică

Varianta 2

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului 16 – 16:16 este: **a)** 0 **b)** 15 **c)** 1 **d)** 32
5p	**2.** Mulțimea $A=\{x\in R/-1<x\leq 3\}$ scrisă sub formă de interval este egală cu: **a)** [-1;3] **b)** (-1;3) **c)** [-1;3) **d)** (-1;3]
5p	**3.** Prețul unui stilou este de 48 de lei. După o mărire a prețului cu 10%, stiloul costă: **a)** 52 lei **b)** 56 lei **c)** 52,6 lei **d)** 52,8 lei
5p	**4.** Media geometrică a numerelor 16 și 9 este egală cu: **a)** $\frac{25}{2}$ **b)** 12 **c)** 144 **d)** 7

5p **5.** Patru elevi au scris în ordine crescătoare numerele:

$a = 1,(35)$; $b = 1,3(5)$; $c = 1,35$; $d = 1,353$.

Rezultatele obținute sunt prezentate în următorul tabel:

Ana	Sorin	Matei	Laura
$a < b < c < d$	$c < d < a < b$	$a < c < b < d$	$b < c < a < d$

Dintre cei patru elevi, cel care a răspuns corect este:

a) Ana
b) Sorin
c) Matei
d) Laura

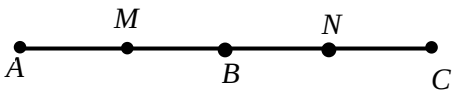
5p **6.** Mihai afirmă „ $\frac{3}{5}$ din 280 kg reprezintă 168 kg”. Afirmația lui Mihai este:

a) Adevărată
b) Falsă

SUBIECTUL al II-lea
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

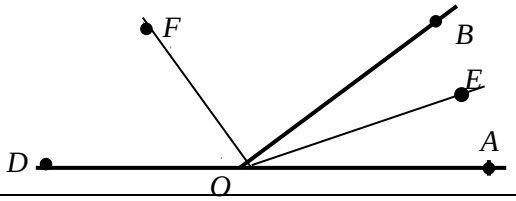
5p **1.** În figura alăturată, punctul M este mijlocul segmentului AB și punctul N este mijlocul segmentului BC. Dacă MN = 12*cm* atunci lungimea segmentului AC este egală cu:

a) 6 cm
b) 12 cm
c) 18 cm
d) 24 cm



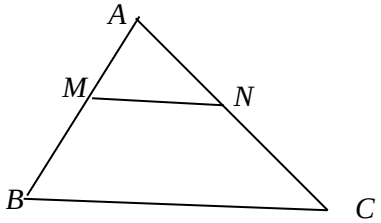
5p **2.** În figura alăturată, punctele A, O, D sunt coliniare, semidreapta OE este bisectoarea unghiului AOB, iar semidreapta OF este bisectoarea unghiului BOD. Măsura unghiului EOF este egală cu:

a) 45°
b) 90°
c) 135°
d) 60°



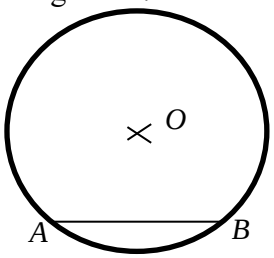
5p **3.** În triunghiul ABC din figura alăturată, punctele M și N se află pe laturile AB, respectiv AC, astfel încât AM = 4*cm*, AB = 12*cm* , $\frac{AN}{AC} = \frac{1}{3}$. Dacă BC = 24*cm*, atunci lungimea segmentului MN este egală cu:

a) 12 *cm*
b) 8 *cm*
c) 6 *cm*
d) 2 *cm*



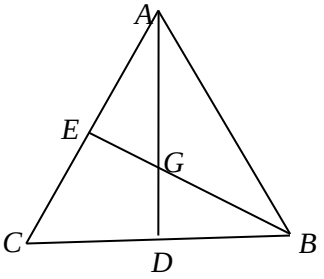
5p **4.** Pe cercul *C(O;R)* din figura alăturată, R = 8*cm* se consideră punctele A și B astfel încât măsura arcului mic AB este egală cu 60^0. Aria triunghiului AOB este egală cu:

a) $16\sqrt{3}\ cm^2$
b) $8\sqrt{3}\ cm^2$
c) $64\sqrt{3}\ cm^2$
d) $64\ cm^2$



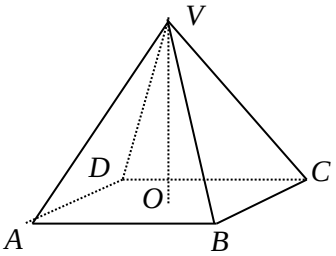
5p **5.** În figura alăturată, triunghiul ABC este isoscel cu AB = AC = 13*cm* și BC = 10*cm*. Medianele AD și BE se intersectează în punctul G. Lungimea segmentului GD este egală cu:

a) 6 *cm*
b) 4*cm*
c) 8*cm*
d) 12*cm*



5p **6.** În figura alăturată VABCD este o piramidă patrulateră regulată cu vârful în V și VA = AB = 8*cm*. Măsura unghiului dintre dreptele VA și BC este egală cu:

a) 90°
b) 30°
c) 60°
d) 45°



SUBIECTUL al III-lea
Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Un număr natural *n* împărțit pe rând la 8, la 10 și la 15, dă de fiecare dată restul 3 și câturi nenule.

(2p) a) Verificați dacă numărul *n* poate fi egal cu 363.

(3p) b) Aflați toate numerele naturale *n* cuprinse între 500 și 1000.

5p

2. Se dă expresia $E(x)=(2x+1)^2-(x-1)^2+(x+1)(x-1)-3x^2+12$ unde x este număr real.

(2p) a) Arătați că $E(x)=x^2+6x+11$.

(3p) b) Aflați valoarea lui *x* pentru care *E(x)* are valoarea minimă.

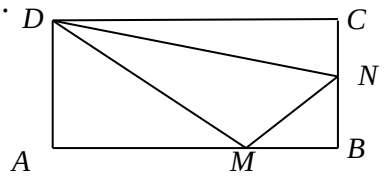
5p **3**. Se consideră numerele reale $a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{27}}+\frac{4}{\sqrt{48}}\right):\frac{2}{\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}-\frac{3}{2\sqrt{3}-3}$.

(2p) a) Arătați că $a = 2$.

(3p) b) Calculați $\left(a+\frac{b}{4}\right)^{2023}$.

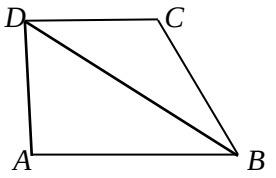
5p **4.** În figura alăturată, ABCD este un dreptunghi cu AB = 12*cm*, BC = 6*cm*, M este un punct pe latura AB astfel încât AM = 8*cm*, iar N este mijlocul laturii BC.

(2p) a) Arătați că aria triunghiului DNM este egală cu $24cm^2$.



(3p) b) Aflați sinusul unghiului MDN.

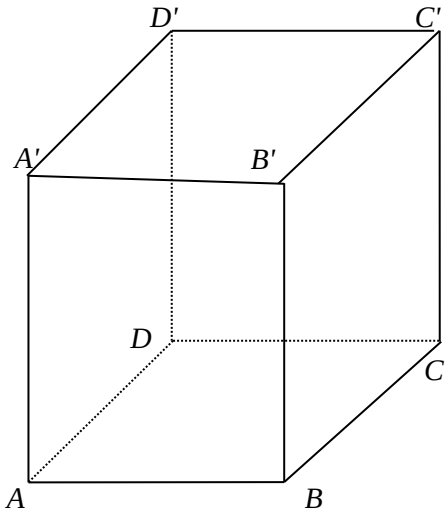
5p **5.** În figura alăturată, ABCD este un trapez dreptunghic cu unghiul A drept, iar bazele AB = 8*cm* și CD = 5*cm*. Diagonala BD este bisectoarea unghiului ABC.



(**2p) a)** Arătați că aria trapezului ABCD este egală cu $26cm^2$.

(3p) b) Aflați distanța de la punctul A la dreapta BC.

5p **6.** În figura alăturată ABCDA′B′C′D′ este un cub cu AB = $12\sqrt{2}cm$.



a) (2p) Aflați aria triunghiului C′BD.

(3p) b) Dacă A′C′∩ B′D′ = {O'}, arătați că dreapta AO′ este paralelă cu planul C′BD.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN BOTOȘANI

SIMULARE EVALUARE NAȚIONALĂ
Ianuarie 2023
MATEMATICĂ
VARIANTA 2
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

SUBIECTUL I - Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

1.	b	**5p**
2.	d	**5p**
3.	d	**5p**
4.	b	**5p**
5.	b	**5p**
6.	a	**5p**

SUBIECTUL al II- lea - Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 puncte)

1.	d	**5p**
2.	b	**5p**
3.	b	**5p**
4.	a	**5p**
5.	b	**5p**
6.	c	**5p**

SUBIECTUL al III- lea - Scrieți rezolvări complete. (30 puncte)

1.	**a)** 363:8 = 45 rest 3 , 363:10 = 36 rest 3 363:15 = 24 rest 3, deci n poate fi 363	**1p** **1p**
	b) n = 8·a + 3, n = 10·b + 3, n = 15·c + 3, de unde n – 3 se divide cu c.m.m.m.c. al nr. 8, 10,15 [8; 10; 15] = 120, deci n – 3 = 120 · k, iar $500 < n < 1000 \Rightarrow k \in \{5,6,7,8\}$ Finalizare, $n \in \{603,723,843,963\}$	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** aplică formulele corect $(2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ $(x – 1)^2 = x^2 – 2x + 1$ $(x + 1)(x – 1) = x^2 – 1$ finalizare	**1p** **1p**
	b) $E(x) = x^2 + 6x + 11 = (x + 3)^2 + 2$ $(x + 3)^2 \geq 0$, de unde $(x + 3)^2 + 2 \geq 2$ Valoarea minima a lui E(x) este 2 și se obține pentru $(x + 3)^2 = 0$, de unde x = - 3	**1p** **1p** **1p**
3.	**a)** $a = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{3\sqrt{3}} + \frac{4}{4\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ finalizare	**1p** **1p**
	b) $b = \left\|1 - 2\sqrt{3}\right\| - \frac{3\left(2\sqrt{3} + 3\right)}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 3^2}$ $b = -4$ $\left(a + \frac{b}{4}\right)^{2023} = \left(2 - \frac{4}{4}\right)^{2023} = 1$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** $A_{DMN} = A_{ABCD} - \left(A_{DAM} + A_{MBN} + A_{CDN}\right)$ finalizare	**1p** **1p**
	b) Aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile DAM, respectiv DCN și află DM = $10cm$ și DN = $3\sqrt{17}\ cm$ $A_{DMN} = \frac{DN \cdot DM \cdot \sin MDN}{2}$	**1p** **1p**

	$\sin MDN = \frac{8\sqrt{17}}{85}$	**1p**

5.	**a)** Calculează înălțimea trapezului și obține AD = 4cm finalizare	**1p** **1p**
	b) fie $CE \perp AB, E \in AB$ și $AQ \perp BC, Q \in BC \Rightarrow d(A,BC) = AQ$ În ΔABC, AB · CE = AQ · BC De unde AQ = 6,4$cm \Rightarrow d(A,BC) = AQ$=6,4$cm$	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** demonstrează că Δ C'BD este echilateral $A_{C'BD} = 144\sqrt{3}\, cm^2$	**1p** **1p**
	b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$ AO || O'C' AOC'O' este paralelogram Finalizare	 **1p** **1p** **1p**

Prezenta lucrare conține_____ pagini.

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: ……..
Prenumele:……..
……
Școala de proveniență: ……..
……
Centrul de examen: ……..
Localitatea: ……..
Județul: ……..

Nume și prenume asistent	Semnătura

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a

17 ianuarie 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

Mate.info.ro
profu' de mate

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $11-11\cdot(8-16:2)$ este egal cu :

a) 11
b) 0
c) 6
d) 10

5p **2.** Numărul care reprezintă $\frac{5}{6}$ din 1200 este egal cu:

a) 200
b) 100
c) 1000
d) 6000

5p **3.** În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile înregistrate la ora 9, la o stație meteo, în fiecare zi a unei săptămâni din luna ianuarie .

Ziua	Luni	Marți	Miercuri	Joi	Vineri	Sâmbătă	Duminică
Temperatura (^0C)	-5	-4	3	1	-1	-3	2

Conform tabelului, media aritmetică a temperaturilor pozitive înregistrate este egală cu:

a) $1\,^0C$
b) $-2\,^0C$
c) $-1\,^0C$
d) $2\,^0C$

5p **4.** Numărul $3\sqrt{2}$ aparține intervalului de numere reale :

a) $(2,3)$
b) $(4,5)$
c) $[5,6)$
d) $[3,4]$

5p **5.** Patru elevi au calculat media geometrică a numerelor $a=12-3\sqrt{7}$ și $b=3\left(4+\sqrt{7}\right)$.

Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Alexandra	Violeta	Crina	Diana
81	12	9	$24+6\sqrt{7}$

Dintre cei patru elevi, cel care a calculat corect media geometrică este:

a) Alexandra
b) Violeta
c) Crina
d) Diana

5p **6.** Sebastian are 180 de lei, iar Adrian, colegul lui, are 120 de lei. Adrian afirmă: „Dacă i-aș da lui Sebastian o șesime din banii mei, atunci suma mea de bani ar fi jumătate din suma lui". Afirmația lui Adrian este:

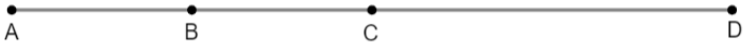
a) Adevărată
b) Falsă

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

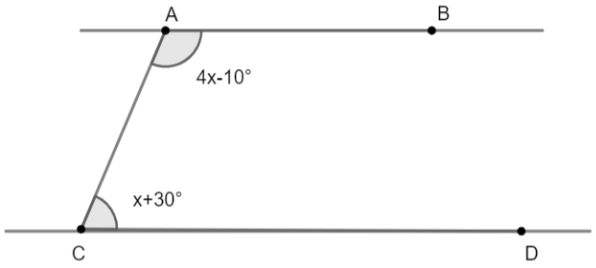
5p **1.** În figura alăturată, A,B,C și D sunt puncte coliniare, în această ordine, astfel încât B este mijlocul segmentului AC, $2BC=CD$ și $BD=9$ cm. Lungimea segmentului AD este egală cu:

a) 16 cm
b) 12 cm
c) 18 cm
d) 10 cm



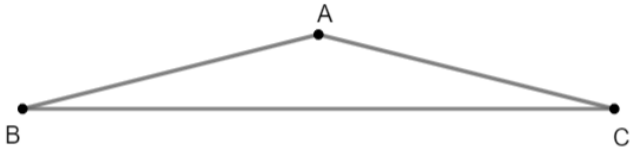
5p **2.** În figura alăturată sunt reprezentate dreptele paralele AB și CD, iar unghiurile BAC și DCA au măsurile indicate pe figură. Atunci măsura unghiului ACD este egală cu:

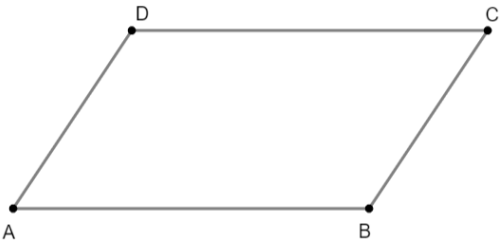
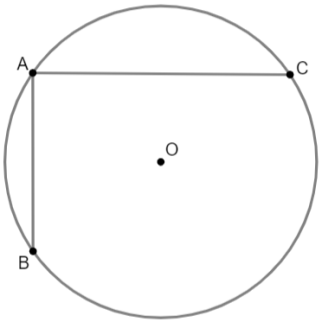
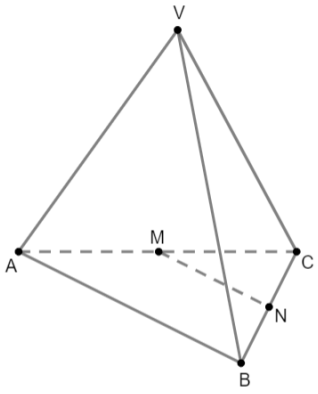
a) 32°
b) 64°
c) 62°
d) 45°



5p **3.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC cu $AB=AC=6$ cm și cu măsura unghiului ABC egală cu 15°. Distanța de la punctul B la dreapta AC este egală cu:

a) 3 cm
b) 6 cm
c) 8 cm
d) 12 cm



5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat paralelogramul $ABCD$, cu $AB=10$ cm, $AD=6$ cm și cu măsura unghiului DAB egală cu 60°. Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu: **a)** $30\,\text{cm}^2$ **b)** $40\,\text{cm}^2$ **c)** $30\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **d)** $15\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ 
5p	**5.** În figura alăturată sunt reprezentate două coarde perpendiculare AB și AC ale unui cerc de centru O, $AB=6$ cm și $AC=8$ cm. Lungimea acestui cerc este egală cu: **a)** 10π cm **b)** 16π cm **c)** 12π cm **d)** 24π cm 
5p	**6.** În figura alăturată, $VABC$ este o piramidă triunghiulară regulată cu baza ABC. Dacă triunghiul VAB este echilateral și $MN=4$ cm, unde M este mijlocul lui AC și N este mijlocul lui BC, atunci suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei este egală cu: **a)** $36\,\text{cm}$ **b)** $24\,\text{cm}$ **c)** $32\,\text{cm}$ **d)** $48\,\text{cm}$ 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 puncte)**

5p	**1.** Numărul elevilor claselor a 9-a ai unui colegiu militar este cuprins între 100 și 200. Dacă elevii s-ar alinia în grupe de câte 12, 18, respectiv 24, rămân de fiecare dată 5 elevi . **(2p) a)** Este posibil ca numărul de elevi să fie egal cu 161 ? Justifică răspunsul.

(3p) b) Determină numărul elevilor claselor a 9-a ai colegiului militar.

5p **2.** Se consideră expresia $E(x)=x(2x-5)+(x+5)^2-(x+2)^2-(3+x)(x-3)-30,$ unde x este număr real.

(2p) a) Arată că $E(x)=x^2+x,$ pentru orice număr real x.

(3p) b) Arată că $E(n)$ este număr par pentru orice număr natural n.

5p

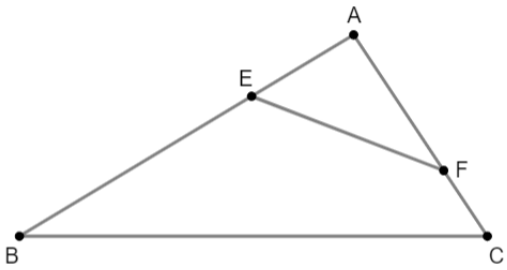
3. Se consideră numerele reale $a=\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{32}-4\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)}\cdot\sqrt{3}$ și $b=\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 5}$

(2p) a) Arată că $a=\dfrac{1}{2}$.

(3p) b) Arată că numărul $N=2\left(a+b\right)$ aparține intervalului $\left(2,\sqrt{7}\right)$.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC dreptunghic în A cu $AB=16$ cm, $AC=12$ cm, punctele E și F sunt situate pe segmentele AB și AC, astfel încât $AE=6$ cm și $AF=8$ cm.

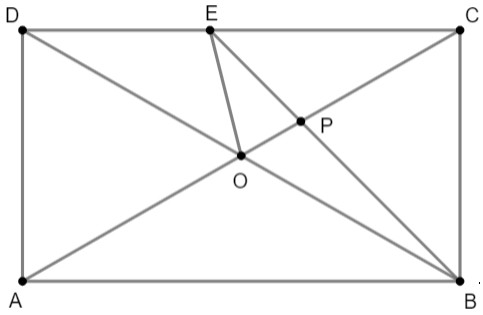
(2p) a) Arată că perimetrul triunghiului ABC este egal cu 48 cm.



(3p) b) Perpendiculara din A pe BC intersectează dreapta EF în punctul P. Demonstrează că punctul P este mijlocul segmentului EF.

5p **5.** În figura alăturată este reprezentat dreptunghiul $ABCD$ cu $AD=4$ cm și $DB=8$ cm. Bisectoarea unghiului ABC intersectează diagonala AC în P și latura DC în E.

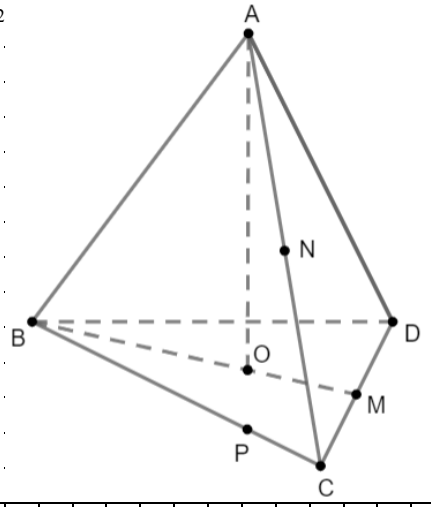
(2p) a) Arată că aria dreptunghiului $ABCD$ este egală cu $16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.



(3p) b) Demonstrează că triunghiul POE este isoscel.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$ cu $AB=12$ cm, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului BCD. Punctele M și N sunt mijloacele segmentelor CD, respectiv AC. Punctul P aparține segmentului BC, astfel încât $BP=3PC$.

(2p)a) Arată că aria triunghiului BCD este egală cu $36\sqrt{3}$ cm^2



(3p) b) Demonstrează că planele (MNP) și (AOD) sunt paralele.

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ
PENTRU ELEVII CLASEI a VIII-a
17 ianuarie 2023

Matematică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I ŞI SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**a)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**c)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**a)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**d)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $161:18=8$ rest 17, $17\neq 5$, deci nu este posibil ca numărul de elevi să fie egal cu 161.	**1p** **1p**
	b) $n=12c_1+5, n=18c_2+5, n=24c_3+5$, unde n este numărul de elevi $\Rightarrow$ $n-5$ este multiplu comun al numerelor 12, 18 și 24 n este cuprins între 100 și 200, deci $n-5=144 \Rightarrow n=149$	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $E(x)=2x^2-5x+x^2+10x+25-x^2-4x-4-x^2+9-30=$ $=x^2+x$, pentru orice număr real x	**1p** **1p**
	b) $E(n)=n^2+n$, pentru orice număr natural n $E(n)=n(n+1)$, unde n și $n+1$ sunt numere consecutive, deci unul dintre ele este par $\Rightarrow$ $E(n)$ este număr par.	**1p** **1p** **1p**

3.	**a)** $a=\dfrac{2\sqrt{6}}{4\sqrt{2}-4\sqrt{2}+12\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}=$	**1p**
	$=\dfrac{2\sqrt{6}}{12\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$	**1p**
	b) $b=\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}\Rightarrow 2(a+b)=\dfrac{13}{5}$,	**2p**
	$2<\dfrac{13}{5}<\sqrt{7}\Leftrightarrow\sqrt{100}<\sqrt{169}<\sqrt{175}$	**1p**
4.	**a)** Teorema lui Pitagora în ΔABC: $AB^2+AC^2=BC^2\Rightarrow BC=20$ cm.	**1p**
	$P_{\Delta ABC}=16+12+20=48$ cm.	**1p**
	b) $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AB}$ și $\sphericalangle BAC=\sphericalangle FAE\Rightarrow\Delta ABC\sim\Delta AFE\Rightarrow\sphericalangle AEF=\sphericalangle ACB$ și	**1p**
	$\Rightarrow\sphericalangle AFE=\sphericalangle ABC$	**1p**
	$\sphericalangle PAF=\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle PAE=\sphericalangle ACB$ (au același complement)$\Rightarrow$ ΔAPF, ΔAPE sunt isoscele, deci $AP=FP=PE\Rightarrow P$ mijlocul segmentului EF.	**1p**
5.	**a)** Teorema lui Pitagora în ΔABD: $AB^2+AD^2=BD^2\Rightarrow BD=4\sqrt{3}$ cm	**1p**
	$A_{ABCD}=AB\cdot AD=16\sqrt{3}\text{ cm}^2$	**1p**
	b) $\sphericalangle CBE=45^0\Rightarrow\Delta CEB$ este isoscel $\Rightarrow CE=CB$,	**1p**
	$AD=\dfrac{DB}{2}\Rightarrow\sphericalangle ABD=30^0\Rightarrow\Delta CBO$ este echilateral $\Rightarrow CO=CB\Rightarrow CE=CB=CO\Rightarrow$	**1p**
	$\sphericalangle EOC=\dfrac{180^0-30^0}{2}=75^0$, $\sphericalangle OPE=\sphericalangle CPB=180^0-60^0-45^0=75^0$, deci triunghiul POE este isoscel.	**1p**
6.	**a)** $BC=AB=12$ cm, triunghiul BCD este echilateral$\Rightarrow A_{\Delta BCD}=\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$	**1p**
	$A_{\Delta BCD}=\dfrac{12^2\sqrt{3}}{4}\text{ cm}^2=36\sqrt{3}\text{ cm}^2$	**1p**
	b) MN este linie mijlocie în triunghiul $ACD\Rightarrow MN\parallel AD, AD\subset(AOD)\Rightarrow MN\parallel(AOD)$	**1p**
	O este centrul cercului circumscris triunghiului BCD, $OD\cap BC=\{R\}$, R mijlocul lui BC $\Rightarrow P$ mijlocul lui $RC\Rightarrow MP$ este linie mijlocie în triunghiul $RCD\Rightarrow$	**1p**
	$\Rightarrow MP\parallel DR$, $DR\subset(AOD)\Rightarrow MP\parallel(AOD)$, deci $(AOD)\parallel(MNP)$.	**1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:.....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2022 – 2023
Matematică

Simulare județeană

Februarie 2023

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 2 ore.**

SUBIECTUL I

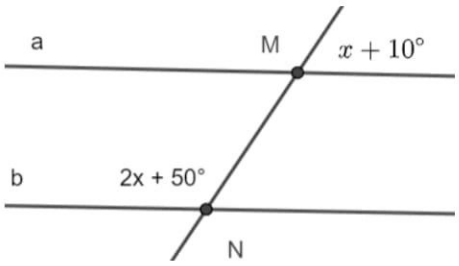
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

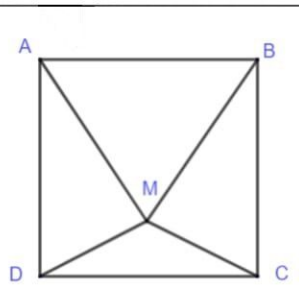
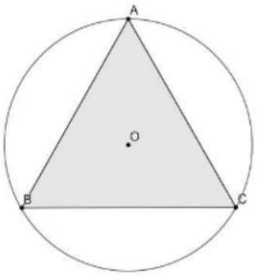
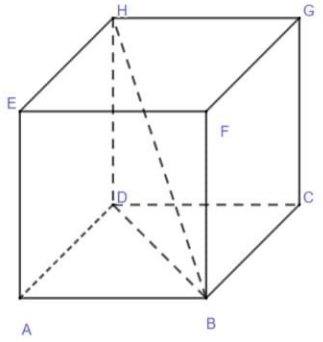
5p	**1.** Rezultatul calculului $7^1 + 2^2 \cdot 3^2 + 4^2$ este: a) 51 b) 59 c) 61 d) 115
5p	**2.** Dacă $\frac{x}{6} = \frac{8}{2}$ atunci x+ 1999 este egal cu a)2022 b) 2023 c) 2024 d) 2047
5p	**3.** Dacă $A = \{x \in R \mid \lvert x-2 \rvert \leq 2\sqrt{3}\}$, atunci suma numerelor întregi din A este egală cu: a) 0 b) 12 c) 14 d) 15
5p	**4.** Cel mai mare număr natural de trei cifre $\overline{abc}$ cu $a < b$ și a+b = 2c, este egal cu: a) 597 b) 957 c) 978 d) 798

5p	5. Cel mai mare dintre numerele $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{8}{15}$; $\frac{19}{30}$ este: a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{8}{15}$ d) $\frac{19}{30}$
5p	**6.** Se cere valoarea numerică a expresiei E (x) = $x^2 + y^2$, știind că x + y = $2\sqrt{2}$ și xy =1. Miruna a calculat și a obţinut rezultatul 6. Rezultatul obţinut de Miruna este: a) adevărat b) fals

SUBIECTUL al II- lea

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura de mai jos sunt reprezentate punctele A, B, C și D coliniare astfel încât C este mijlocul lui AD, E este simetricul punctului A față de D, iar BC = 2 AB = 8cm. Atunci lungimea segmentului CE este egală cu : a) 20cm b) 24 cm c) 36 cm d) 48 cm
5p	**2.** În figura alăturată dreptele a și b sunt paralele tăiate de secanta MN. Folosind informațiile din figură valoarea lui *x* este egală cu: a) 40^0 b) 50^0 c) 60^0 d) 45^0 
5p	**3.** Dreptunghiul ABCD are perimetrul de 60cm și lățimea egală cu jumătate din lungimea sa. Atunci aria dreptunghiului este: a) $100cm^2$ b) $200cm^2$ c) $300cm^2$ d) 600 cm^2

5p	**4.** Se consideră pătratul din figura alăturată și punctul M situat în interiorul său astfel încât AM = MB = CD = 10 cm. Atunci distanța de la A la MB este egală cu : a) 5 cm b) $5\sqrt{2}$ cm c) $5\sqrt{3}$ cm d) $10\ cm$ 
5p	**5.** În figura alăturată triunghiul ABC este înscris într-un cerc de centru O și rază 6cm. Dacă AB = $6\sqrt{3}$ cm, atunci măsura unghiului ACB este egală cu: a) 30^0 b) 45^0 c) 60^0 d) 90^0 
5p	**6.** În figura alăturată este reprezentat un cub cu latura de 5cm. Atunci tangenta unghiului dintre dreptele BH și BD ar valoarea de: a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1 

SUBIECTUL AL III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Ionel a parcurs un drum în trei zile: în prima zi a parcurs cu 15 km mai mult decât $\frac{2}{5}$ din întreaga distanță, a doua zi cu 10 km mai puțin decât o treime din rest, iar în ultima zi restul de 180 km. **(3p) a)** Este posibil ca lungimea drumului parcurs în cele 3 zile să fie să fie de 500 km? Justificați răspunsul!

(2p) b) Care este lungimea drumului parcurs de Ionel în a doua zi?

5p

2. Se consideră fracția $F(n) = \frac{3^{n+2} \cdot +4 \cdot 3^{n+1} + 2 \cdot 3^{n} + 160}{2023}$, unde n este număr natural.

(2p) a) Arătați că pentru n = 0, se obține $F(n) = \frac{183}{2023}$

(3p) **b)** Determinați numărul natural n, pentru care fracția $F(n)$ este echiunitară.

5p

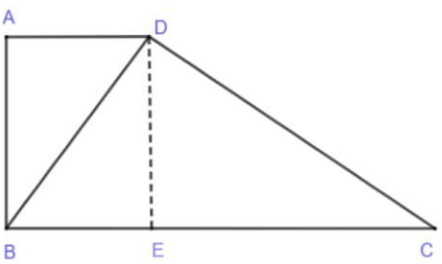
3. Se consider expresia: $E(x) = (x+3)^2 - (x-3)^2 + x(x-10) - 1$, unde $x \in R$

(3p) **a)** Arătați că $E(x) = x^2 + 2x - 1, \forall x \in R$

(2 p) **b)** Arătați că $E(\sqrt{3} - 1)$ este număr natural

5p

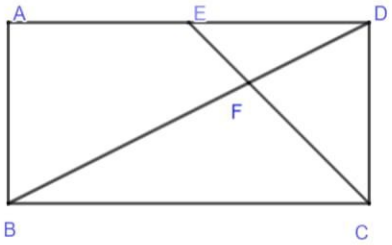
4. O grădină cu forma unui trapez dreptunghic ABCD cu AD ∥ BC, $m(\sphericalangle A) = 90^0$, BD⊥ DC, AD = 10dam și BC = 67,6 dam. Suprafața ABD este cultivată cu roșii.



(3p) **a)** Arată că distanța de la B la D este de 260m

(2p) **b)** Dacă 1m² cultivat cu roșii aduce un profit de 15 lei, aflați ce profit va aduce proprietarului cultura de roșii.

5p **5.** În figura alăturată este schița unui teren de joacă în formă de dreptunghi ABCD, cu AB = 9 dam și diagonala BD = $3\sqrt{73}$ dam.
Dacă E este mijlocul lui AD și $EC \cap BD = \{F\}$, se cere:

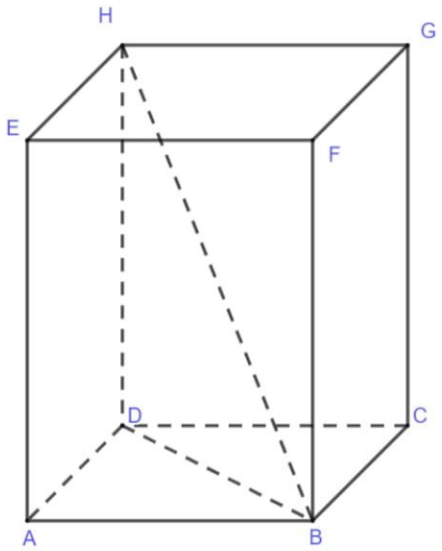


(2p) a) Arată că perimetrul terenului de joacă este de 660m

(3p) b) Calculați aria triunghiului BCF

5p

6. În figura alăturată este reprezentată schematic o cutie de carton, în formă de paralelipiped ABCDEFGH cu dimensiunile bazei de 12cm și 9cm, iar înălțimea este de 20cm (se neglijează grosimea cartonului).



(2p) **a)** Arătați că sinusul unghiului format de dreptele BH și AE este egal cu $\frac{3}{5}$.

(3p) **b))** Pe fețele laterale ale cutiei se aplică o bandă adezivă de lungime minimă, între punctele B și H. Arătați că lungimea benzii aplicate este mai mică de 30cm.

Prezenta lucrare conține_____pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023

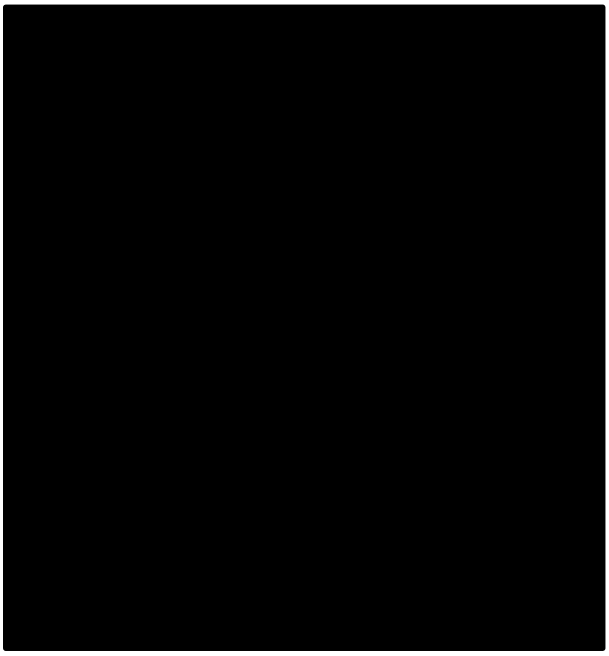
Matematică

Simulare județeană

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $120 - 111:3$ este egal cu:
a) 3
b) 81
c) 83
d) 9

5p **2.** Știind că $\frac{5a-2b}{3a+4b} = \frac{2}{3}$, atunci $\frac{a}{b}$ este egal cu:
a) $\frac{9}{14}$
b) $\frac{14}{9}$
c) $\frac{13}{9}$
d) $\frac{1}{13}$

5p **3.** Dacă 40% din a este 20, atunci valoarea numărului a este egală cu:
a) 100
b) 75
c) 40
d) 50

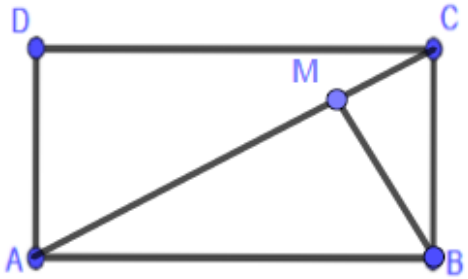
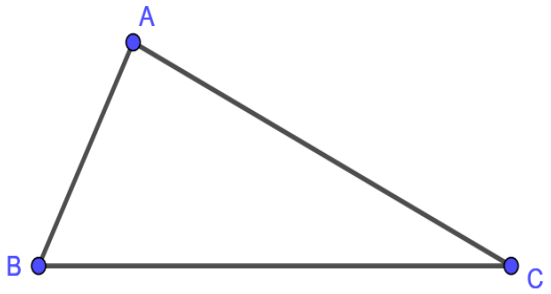
5p **4.** Situația notelor obținute de elevii unei clase la un test de evaluare este ilustrată în tabelul de mai jos:

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3
Nr. elevi	2	3	6	5	4	2	2	1

Media clasei la test este:
a) 7,3
b) 7,5
c) 8
d) 7

5p	**5.** Suma numerelor întregi din intervalul $[-5; 5)$ este egală cu: **a)** 0 **b)** 5 **c)** -5 **d)** -9
5p	**6.** Suma a două numere este 480, iar diferența lor este egală cu 240. Afirmația „unul dintre numere este o treime din celălalt” este: **a)** Adevărată **b)** Falsă

SUBIECTUL al II-lea
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată punctele A, M, N și B sunt coliniare, AM = $\frac{1}{4}$ din AB, AB = 16 cm, N este mijlocul segmentului MB, iar P este mijlocul lui NB. Lungimea segmentului AP este: **a)** 12 cm **b)** 13 cm **c)** 14 cm **d)** 15 cm
5p	**2.** În dreptunghiul ABCD, $AB > BC, BM \perp AC$, $M \in AC$. Dacă $CM = 3$ cm, $AM = 12$ cm, atunci aria dreptunghiului ABCD este egală cu: **a)** 45 cm^2 **b)** 90 cm^2 **c)** 100 cm^2 **d)** 50 cm^2 
5p	**3.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A. Știind că AB= 6 cm și BC=12 cm, aflați lungimea laturii AC. **a)** 8 cm **b)** 6 cm **c)** $6\sqrt{3}$ cm **d)** $6\sqrt{2}$ cm 
5p	**4.** Figura alăturată reprezintă un dreptunghi ABCD, cu lungimea AB= 12 m, iar lățimea AD = 9 m. Atunci raza cercului circumscris dreptunghiului este egală cu: **a)** 6 m **b)** 7 m **c)** 4,5 m **d)** 7,5 m

5p	**5.** În figura alăturată, punctele *A, B, C, D* și *E* se află pe cercul de centru O, astfel încât arcele mici *AB, CD, DE* și *EA* sunt congruente și au măsura egală cu 80°. Măsura unghiului $\sphericalangle BEC$ este egală cu: **a)** 40° **b)** 10° **c)** 80° **d)** 20°
5p	**6.** În figura alăturată este reprezentată o cutie în formă de cub ABCDA'B'C'D' care are diagonala feței ADD'A' egală cu $9\sqrt{2}$ cm. Diagonala cubului are lungimea egală cu: **a)** $9\sqrt{3}$ cm **b)** 9 cm **c)** $6\sqrt{2}$ cm **d)** $8\sqrt{3}$ cm

SUBIECTUL al III-lea
Scrie rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Numerele a și b sunt direct proporționale cu 5 și 8, numerele b și c sunt invers proporționale cu 3 și 2, iar $3a + 2b - c = 57$. **(2p) a)** Demonstrați că $c = 2{,}4 \cdot a$.

(3p) b) Aflați numerele a, b, c.

5p **2.** Se dă expresia $E(x) = \left(\frac{2}{x^2-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{x+1}{2}$, unde $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

(2p) a) Arătați că $E(x) = \frac{x+1}{x-1}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1; 1\}$.

(3p) b) Aflați numerele întregi x pentru care valoarea expresiei $E(x)$ este număr întreg.

5p

3. Se consideră numerele $a = \sqrt{5} \cdot \left(4\sqrt{2} + 3\sqrt{5}\right) - 2\left(2\sqrt{10} + 3\right)$ și

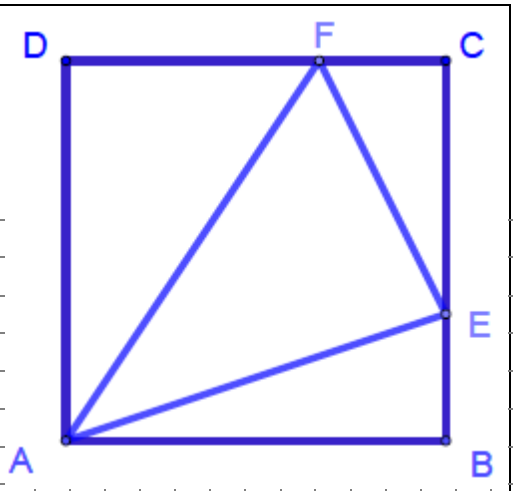
$$b = 2\sqrt{7} \cdot \left(3 + \sqrt{3}\right) - 2\left(3 + \sqrt{21}\right) - 6\left(\sqrt{7} - 7\right)$$

(2p) a) Arătați că a este număr întreg.

(3p) b) Calculați media geometrică a numerelor a și b.

5p

4. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 6 cm și punctele $E \in BC, F \in CD$ astfel încât $BE = FC = \frac{1}{3} \cdot BC$.

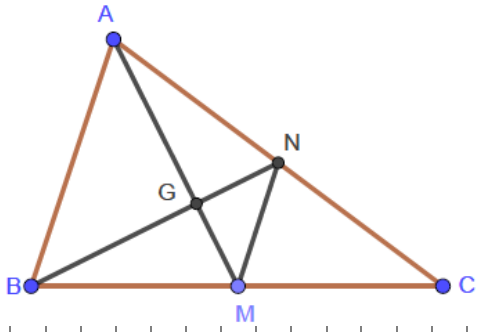


(2p) a) Calculați aria triunghiului AEF.

(3p) b) Arătați că distanța de la punctul E la latura AF este în intervalul $(3; 4)$.

5 p

5. În triunghiul ABC, AM și BN sunt mediane, $M \in BC, N \in AC$, iar $AM \cap BN = \{G\}$. Se știe că aria triunghiului ABC este egală cu 120 cm^2.

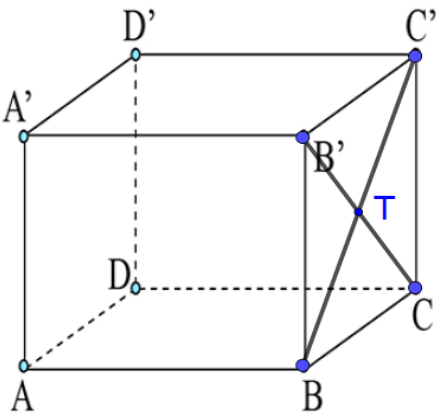


(2p) a) Arătați că $\Delta MNG \sim \Delta ABG$

(3p) b) Calculați aria triunghiului ABG.

5p **6.** Fie cubul $ABCDAA'B'C'D'$ cu lungimea laturii de 6 cm, $BC' \cap B'C = \{T\}$.

a) **(2p)** Calculați distanța de la D' la AC.



(3p) b) Calculați cosinusul unghiului dintre AT și D'C.

Prezenta lucrare conține_____pagini

Numele:……..
……
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
……
Școala de proveniență: …….....
……
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

SIMULARE JUDEȚEANĂ

EVALUAREA NAȚIONALĂ CLASA a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023

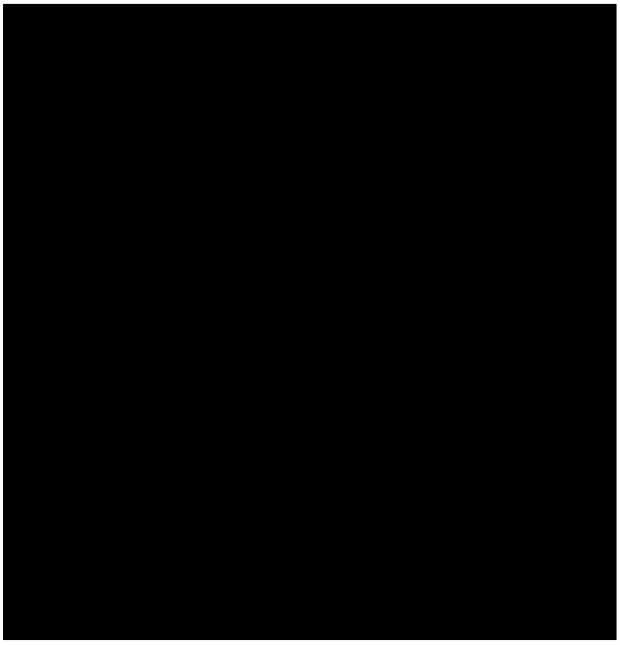
Ianuarie 2023

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

Mate.info.ro
profu' de mate

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $2+216:2$ este egal cu: **a)** 19 **b)** 110 **c)** 20 **d)** 109
5p	**2.** Știind că $\frac{a}{3}=\frac{5}{b}$, atunci rezultatul calculului $30-2a\cdot b$ este egal cu: **a)** 8 **b)** 2 **c)** 15 **d)** 0
5p	**3.** Un obiect costă 240 lei. După o ieftinire cu 15%, noul preţ este: **a)** 204 **b)** 36 **c)** 276 **d)** 225
5p	**4.** Scris sub formă de fracţie ordinară ireductibilă , numărul $2,(3)$ este egal cu : **a)** $\frac{23}{10}$ **b)** $\frac{7}{3}$ **c)** $\frac{7}{30}$ **d)** $\frac{23}{9}$

5p	5.Suma numerelor intregi din intervalul $(-4, \sqrt{5}]$ este egala cu : **a)** - 9 **b)** - 7 **c)** – 3 **d)** 0
5p	**6.** Ana ,Gelu , Maria si Radu , au calculat media aritmetica a numerelor a= $2\sqrt{3}+\sqrt{2}$ si b= $\sqrt{12}-\sqrt{2}$. Rezultatele obtinute de ei sunt trecute in tabelul urmator:

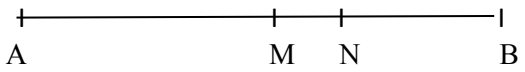
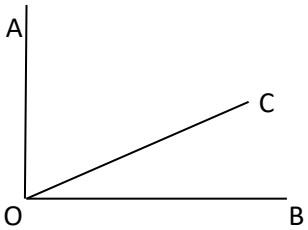
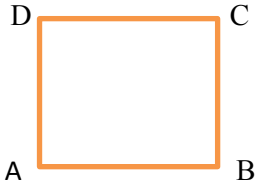
Ana	Gelu	Maria	Radu
$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$4\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$

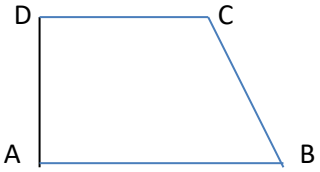
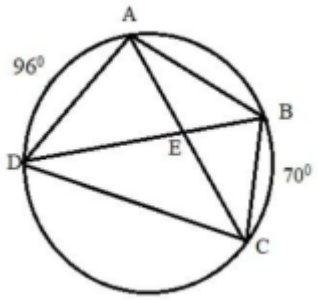
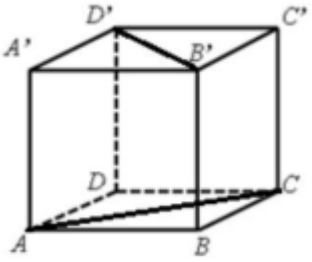
Dintre cei patru elevi, cel care a obtinut rezultatul corect este:

a) Ana
b) Gelu
c) Maria
d) Radu

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. ***(30 puncte)***

5p	1.In desenul alăturat , M este mijlocul segmentului AB, iar punctul N se află pe segmentul MB astfel încât 2·MN = NB. Dacă MN = 3cm , atunci lungimea lui AB este de :  **a)** 6 cm **b)** 9 cm **c)** 18 cm **d)** 12 cm
5p	2. Unghiurile ∢AOC şi ∢BOC , reprezentate în figura alăturată, sunt complementare. Dacă măsura unghiului ∢BOC este de 20°, atunci măsura unghiului ∢ AOC este de : a) 40° b) 20° c) 160° d) 70° 
5p	3.In figura alăturată ABCD este un pătrat cu diagonala de $6\sqrt{2}$ cm. Aria pătratului este de : a) 72 cm² b) 36 cm² c) $36\sqrt{2}$ cm² d) $72\sqrt{2}$ cm² 

5p	4. Trapezul dreptunghic ABCD din figura alăturată are ∢A=∢D= 90°, ∢B=45° şi AD = DC = 4cm. Aria triunghiului ACB este de : a) 16 cm² b) 8cm² c) 4cm² d) 6cm² 
5p	5.Punctele A,B,C,D,sunt pe cerc astfel incât arcul AD are măsura 96° și arcul BC are măsura de 70°. Dacă AC ∩ BD = {E} atunci măsura unghiului DEC este egală cu: a) 97° b) 83° c) 73° d)107° 
5p	6.In figura alăturată este reprezentat cubul ABCDA´B´C´D´. Măsura unghiului dintre dreptele AC și B´D´ este egală cu : a) 0° b) 180° c) 90° d) 45° 

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete. ***(30 puncte)***

5p	1. Un excursionist parcurge un traseu în trei zile. În prima zi parcurge $\frac{1}{4}$ din lungimea traseului, în doua zi $\frac{2}{3}$ din rest, iar în a treia zi, ultimii 24 km. (2p) a) Este posibil ca lungimea traseului să fie de 100km? Justificați răspunsul. (3p) b) Câți kilometri a parcurs excursionistul în a doua zi ?

5p 2.Numerele a , b , c sunt direct proporţionale cu 2 , 3 şi 5 .

(2p) a) Arătați că a + b = c .

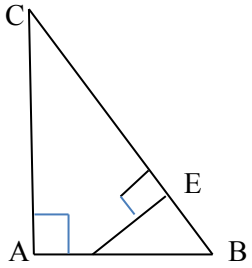
(3p) b) Ştiind că a + b + c = 200 , să se afle numerele a , b şi c.

5p 3. Fie $E(x)=(x-1)^2+(2x-1)^2-(x-1)(x+1)+2x$, unde $x\in R$.

(2p) a) Arătați că $E(x)=4x^2-4x+3$, oricare ar fi $x\in R$.

(3p) b)Arătați că $E(\frac{\sqrt{2}}{2})>2$

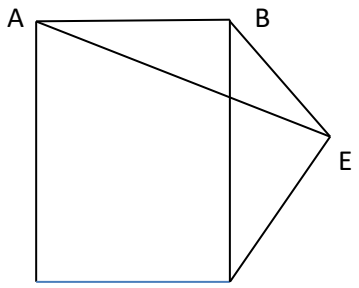
5p 4. Triunghiul dreptunghic ABC are ipotenuza *BC=25 cm* si cateta *AC =20 cm*



(2p) a) Arată că aria triunghiului ABC este egală cu *150 cm²*.

(3p) b) Dacă punctul D se află pe latura AB astfel incât *BD=2AD* , iar *DE* ⊥ *BC , E*∈*BC* calculează perimetrul patrulaterului *ADEC*.

5p 5.In figura alaturată este reprezentat dreptunghiul ABCD cu AB=12 cm.
Triunghiul isoscel BEC cu BE=EC=12 cm , are măsura unghiului BEC = 120°.

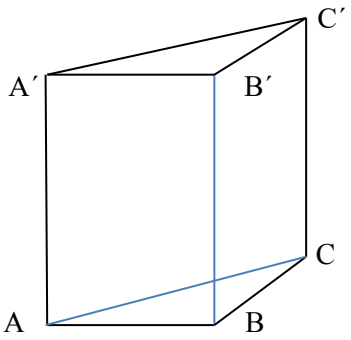


(2p) a) Arată că BC = $12\sqrt{3}$ cm.

(3p) b) Demonstrează că sin ($\sphericalangle$ADT)=$\frac{\sqrt{21}}{7}$, unde {T}=AE ∩ BC.

5p 6. O cutie de cadou este reprezentată în figura alăturată , sub forma prismei triunghiulare regulată ABCA′B′C′ cu AB = 6cm şi AA′ = 12cm. Fie M mijlocul lui BC.

(2p) a)Aflaţi măsura unghiului format de dreptele A′M şi BC.



(3p) b) Pe suprafaţa laterală a prismei este prins un şnur în punctele A′ şi M . Arătaţi că lungimea cea mai scurtă a șnurului este mai mare decât $4\sqrt{14}$ cm.

Mate.info.ro
profu' de mate

SIMULARE JUDEŢEANĂ

EVALUAREA NAŢIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023

Ianuarie 2023

Matematică **Varianta 2**

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I ȘI SUBIECTUL al II-lea:

• Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.

• Nu se acordă punctaje intermediare.

SUBIECTUL al III-lea

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător

. • Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	b)	**5p**
2.	d)	**5p**
3.	a)	**5p**
4.	b)	**5p**
5.	c)	**5p**
6.	d)	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	c)	**5p**
2.	d)	**5p**
3.	b)	**5p**
4.	a)	**5p**
5.	a)	**5p**
6.	c)	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	a) x reprezintă lungimea traseului, prima zi $\frac{1}{4}x$,a doua zi $\frac{1}{2}x$, lungimea traseului = 96 km $<$100 km	1 1
	b)a treia zi = $\frac{1}{4}x$, $x=96$ *km* a doua zi =*48 km*	1 1 1
2.	a) direct proportionalitatea $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5}$ relatia $a+b=c$	1 1

	b) din relatia $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$=k (raport de proportionalitate), avem *a=2k,b=3k,c=5k* *din relatia a+b+c=200* ⇒ k=20 *a=40 , b=60, c=100*	1 1 1
3.	a)Dezvoltarea expresiei calculul lui E(x)	1 1
	b)Calculul expresiei E($\frac{\sqrt{2}}{2}$) E($\frac{\sqrt{2}}{2}$) = 5- 2$\sqrt{2}$ E($\frac{\sqrt{2}}{2}$) > 2 ⇔ 3>2$\sqrt{2}$, adevarată	1 1 1
4.	a) Aflarea catetei AB=15cm Calculul ariei ΔABC	1 1
	b) ΔDEB ~ ΔABC, $\frac{EB}{AB}=\frac{DE}{AC}=\frac{DB}{BC}$ DE=8 cm , EB=6cm , EC=19 cm Perimetrul patrulaterului ADEC=52 cm	1 1 1
5.	a) ΔBEC isoscel cu ∢BEC = 120° si BE=EC=12cm Calculul lui BC	1 1
	b) ΔABE isoscel,AB=BE=12 si ∢ABE = 120°, ∢ABT=90°,BT=$\frac{1}{2}$AT, AT=6$\sqrt{5}$ cm CT=8$\sqrt{3}$ cm ,DT=4$\sqrt{21}$ cm Aria ΔADT scrisă in două moduri ⇒sin (∢ADT)= $\frac{\sqrt{21}}{7}$	1 1 1
6.	a) ΔABC este isoscel A´M este mediană , in A´BC⇒ A´M înălțime ⇒A'M ⊥ BC ⇒ ∢(A'M, BC) = 90o	1 1
	b) b) Prin desfășurarea în plan a prismei se obţine cea mai scurtă lungime cea a segmentului A'M In triunghiul dreptunghic A´AM, avem A´M²=A´A² +AM², A´M =$\sqrt{12^2+9^2}$, A´M=$\sqrt{225}$ 4$\sqrt{14}$ = $\sqrt{224}$ ⇒ A´M > 4$\sqrt{14}$	1 1 1

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:……..
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....
Școala de proveniență: …….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023

Matematică

Simulare județeană

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

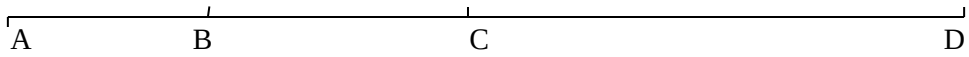
SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului: $(2023^0 + \sqrt{36}) : 1^{2023}$ este: a) 2023 ; b) 6 ; c) 1 ; d) 7 .
5p	**2.** Dacă 6 kg de mere costă 15 lei, atunci 4 kg de mere de aceeași calitate vor costa: a) 12 lei ; b) 12,5 lei ; c) 10 lei ; d) 11 lei .
5p	**3.** Prețul unui telefon s-a mărit cu 15%. Dacă prețul initial a fost de 1400 lei, prețul final, după mărire, este: a) 1190 lei; b) 1580 lei; c) 1610 lei; d) 1710 lei.
5p	**4.** Dacă media aritmetică a două numere este 50 și diferența lor este 60, atunci media geometrică a lor este: **a)** 40 **b)** $30\sqrt{2}$; **c)** 30 **d)** $40\sqrt{2}$;
5p	**5.** Numărul elementelor mulțimii $A= \{ x \in \mathbf{Z} \mid |2x - 3| \leq 7 \}$ este egal cu: a) 7; b) 8 ; c) 9 ; d) 6.
5p	6. Descompunerea în factori a expresiei $E(x)= x^2 - 6x + 9$ este **a)** $(x+3)^2$ **b)** $(x-3)^2$ **c)** $(x-3)(x+3)$ **d)** $(x-6)(x+3)$

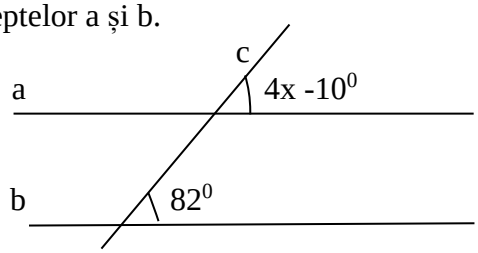
SUBIECTUL al II-lea
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.
(30 de puncte)

5p **1.** Se dau punctele A,B,C și D coliniare, în această ordine. Dacă AB = 8 cm , AD = 40 cm iar C este mijlocul lui AD , atunci segmentul BC va avea lungimea de :



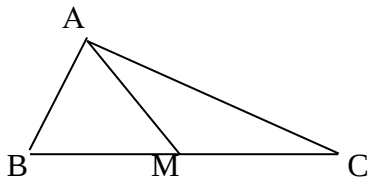
a) 12,5 cm;
b) 20 cm;
c) 12,2 cm ;
d) 12 cm .

5p **2.** În figura alăturată a | | b, iar dreapta c este secantă dreptelor a și b. Valoarea lui x în grade este:



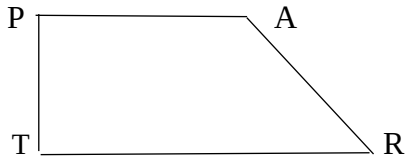
a) 41^0 ;
b) 82^0 ;
c) 23^0 ;
d) 24^0 .

5p **3.** Un △ABC dreptunghic în A are catetele AB = 5 cm și AC =12 cm. Mediana AM , corespunzătoare ipotenuzei, are lungimea de :



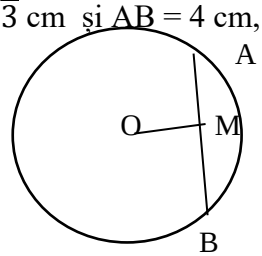
a) 13 cm ;
b) 8,5 cm ;
c) 6,5 cm ;
d) 17 cm .

5p. 4. Trapezul dreptunghic TRAP cu TR || AP , TR > AP , AP = AR = 12 cm și $\sphericalangle ART = 60^0$ are perimetrul de :



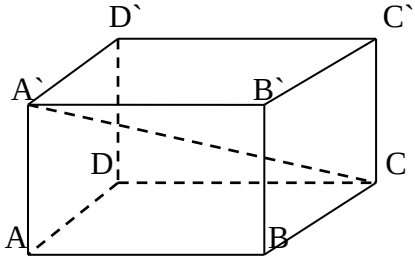
a) 48 cm ;
b) $48\sqrt{3}$ cm;
c) $12(\sqrt{3}+3)$ cm;
d) $6(\sqrt{3}+7)$ cm.

5p 5. Se dă cercul *C* (O; r). Dacă distanța de la O la coarda AB este OM = $2\sqrt{3}$ cm și AB = 4 cm, atunci lungimea cercului va fi de :



a) 10π cm ;
b) 8π cm ;
c) 12π cm ;
d) $8\sqrt{3}\pi$ cm.

5p 6. Dacă ABCDA`B`C`D`este un paralelipiped dreptunghic în care AB = 4 cm, BC = 3 cm și CC`= 5 cm, atunci măsura unghiului făcut de dreptele A'C și AC este de:



a) 30^0;
b) 90^0 ;
c) 45^0 ;
d) 60^0.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Scrieți rezolvările complete.

5p **1.** Dacă elevii unei clase se așază câte doi în bancă, rămân 3 elevi în picioare, iar dacă se așază câte trei în bancă rămân trei bănci goale .

a) **(2p)** Pot fi în clasă 33 de elevi? Justificați răspunsul.

b) **(3p)** Câte bănci și câți elevi sunt în clasă?

5p **2.** Fie E(x) = $(2x+1)^2 - 2(x-1)^2 - (x-4)(x+4)$, x ∈ **R**

(3p) a) Arătați că E(x) = (x + 3)(x + 5) ;

b.) (2p) Rezolvați ecuația E(x) – x(x + 2) = 3 .

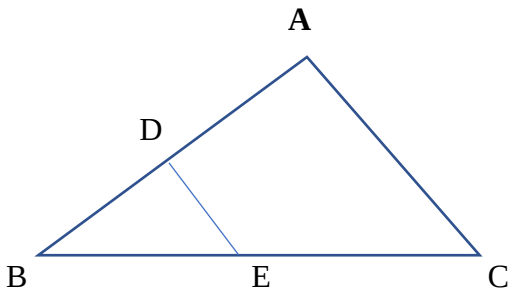
5p **3.** Fie numerele a = $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ și b = $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}$

a) (3p) Arătați că $a^2 = 4$.

b) (2p) Arătați că $a^2 + 20 \cdot b$ este pătrat perfect.

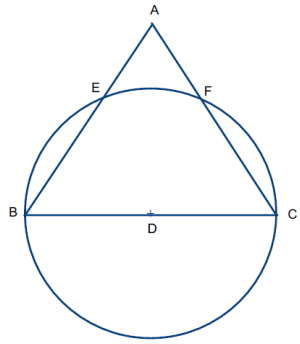
5p **4,** În △ABC, DE || AC, D∈(AB) , E ∈ (BC) Dacă BD = 6 cm, AB = 18 cm, DE = 8 cm și BE = 10 cm.

(2p) a) Arătați că perimetrul △ABC **= 72cm**



(3p) b) Calculați sinusului unghiului ECA.

5p **5.** În figura alăturată, ABC este un triunghi isoscel, cu AB=AC= 50, BC=60, iar D este mijlocul laturii BC. Cercul $\mathcal{C}(D;DB)$ intersectează laturile AB și AC în E, respectiv F.



(2p) a) Aflați lungimea segmentului CF.

a) **(3p)** Stabiliți natura patrulaterului BCFE și determinați perimetrul acestuia.

5p

6. Piramida patrulateră VABCD are baza ABCD un pătrat, cu AB=6 cm și fețele laterale triunghiuri echilaterale. Dacă M și N sunt mijloacele muchiilor VD și VC, iar AC ∩ BC = { O} aflați :

(3p) a) Perimetrul △MON;

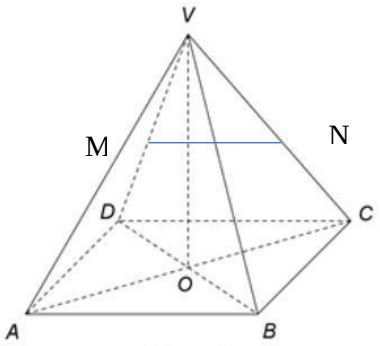


Figura 3

(2p) b) Demonstrați că (MON) || (VAB).

Prezenta lucrare conține____pagini

SIMULAREA EXAMENULUI DE EVALUARE NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022-2023

Matematică

Numele: .....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele: .....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Numărul 242 este multiplu al numărului: **a)** 7 **b)** 11 **c)** 12 **d)** 17
5p	**2.** Valoarea lui x care verifică egalitatea $\frac{x}{30}=\frac{7}{15}$ este egală cu: **a)** $\frac{7}{3}$ **b)** 8 **c)** 14 **d)** 16
5p	**3.** Opusul numărului $a=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{36}$ este: **a)** -6 **b)** -3 **c)** 3 **d)** 6
5p	**4**. Cel mai mare dintre numerele raționale $2,(4)$; $2,4(2)$; $2,22$; $2,(42)$ este: **a)** $2,4(2)$ **b)** $2,(4)$ **c)** $2,(42)$ **d)** $2,22$

5p **5.** Dacă $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$ și $b=\sqrt{15}$, atunci a^2-2b+1 este egal cu:

a) $\sqrt{15}$

b) $9-2\sqrt{15}$

c) 8

d) 9

5p **6.** În tabelul următor sunt înregistrate temperaturile medii zilnice dintr-o săptămână.

Ziua	L	M	M	J	V	S	D
Temperatura	$-4°C$	$-3°C$	$-2°C$	$1°C$	$x°C$	$1°C$	$2°C$

Dacă temperatura medie din aceea săptămână a fost $-1°C$, atunci x este egal cu:

a) -2 **b)** 0 **c)** 1 **d)** 3

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

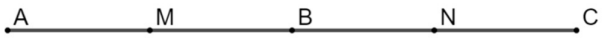
5p **1.** În figura alăturată, punctul *M* este mijlocul segmentului *AB*, *N* este mijlocul segmentului *BC,* iar *C* este simetricul punctului *A* față de punctul *B*. Valoarea raportului $\frac{AN}{MN}$ este:

a) $\frac{2}{3}$

b) 1

c) $\frac{4}{3}$

d) $\frac{3}{2}$



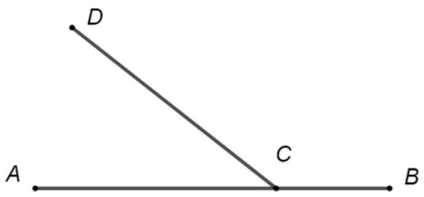
5p **2.** În figura alăturată, unghiurile *ACD* și *DCB* sunt adiacente suplementare. Măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor *ACD* și *DCB* este :

a) 90°

b) 100°

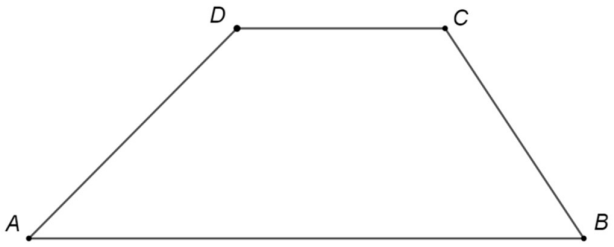
c) 120°

d) 150°



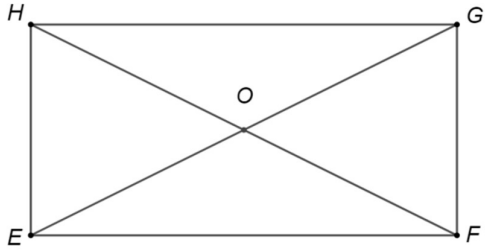
5p **3.** Figura alăturată reprezintă schița unui teren în formă de trapez $ABCD$ cu aria de 144 m^2 și lungimea liniei mijlocii de 36 m . Distanța dintre laturile AB și DC este egală cu:

a) 2 m
b) 4 m
c) 8 m
d) 12 m



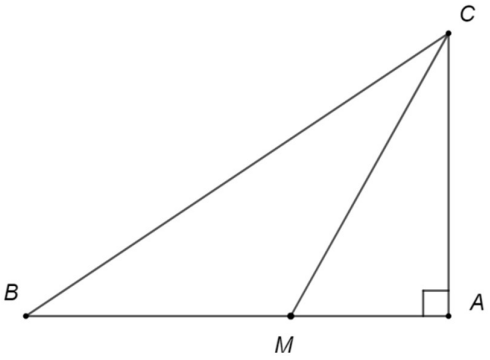
5p **4**. Dreptunghiul $EFGH$ din figura alăturată are lungimea $EF = 15\,\text{cm}$ și lățimea $FG = 5\sqrt{3}\,\text{cm}$. Dacă $HF \cap EG = \{O\}$, măsura unghiului GOF este :

a) 60°
b) 90°
c) 120°
d) 150°



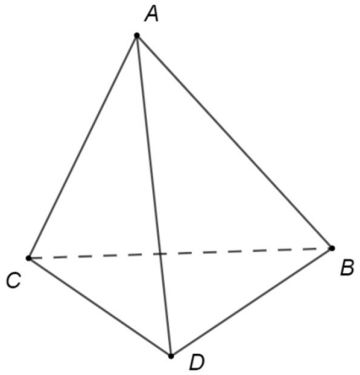
5p **5.** În figura alăturată ABC este un triunghi dreptunghic în A cu măsura unghiului B de $30°$. Dacă lungimea bisectoarei CM este egală cu 10 cm, atunci lungimea catetei AB este egală cu:

a) 8 cm
b) 10 cm
c) 15 cm
d) 15 cm



5p **6.** În figura alăturată $ABCD$ este un tetraedru regulat cu aria feței ABC egală cu $9\sqrt{3}$ dm^2 . Suma lungimilor tuturor muchiilor tetraedrului este egală cu:

a) 18 dm
b) 36 dm
c) 72 dm
d) 81 dm



SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete **(30 de puncte)**

5p **1.** Radu și Tudor au împreună 800 de lei. Dacă Radu i-ar da lui Tudor o cincime din suma pe care o are, atunci cei doi copii ar avea sume egale.

(2p) a) Este posibil ca Radu sa aibă 600 de lei? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Află ce sumă are Tudor.

5p **2.** Se consideră numerele $a=\left(\frac{18}{\sqrt{20}}-\frac{6}{\sqrt{45}}+\frac{32}{\sqrt{80}}\right)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^{-1}$ și $b=5^3\cdot 25^3:125^2$.

(2p) a) Arată că numărul $a=5$.

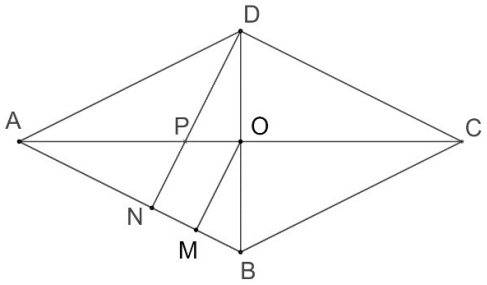
(3p) b) Demonstrează că media geometrică a numerelor a și b este pătrat perfect.

5p **3.** Se consideră expresia $E(x)=(3x-2)^2+\left(1-x\sqrt{5}\right)\left(x\sqrt{5}+1\right)+4$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(2p) a) Arată că $E(x)=4x^2-12x+9$, pentru orice număr real *x*.

(3p) b) Determină valorile întregi ale lui n pentru care $E(n)<36$.

5p **4.** Rombul $ABCD$ din figura alăturată are înălțimea $DN = 8$ cm. Se știe că $AC \cap BD = \{O\}$ și proiecția AM a segmentului OA pe dreapta AB are lungimea de 8 cm.

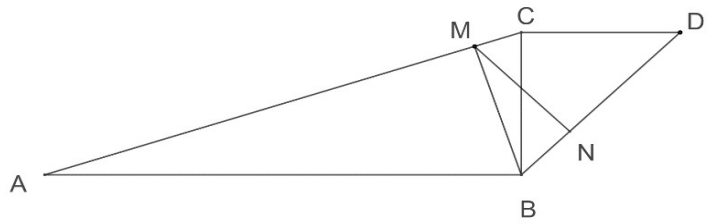


(2p) a) Arată că $OM = 4$ cm.

(3p) b) Dacă $AC \cap DN = \{P\}$, calculează aria patrulaterului $PNMO$.

5p

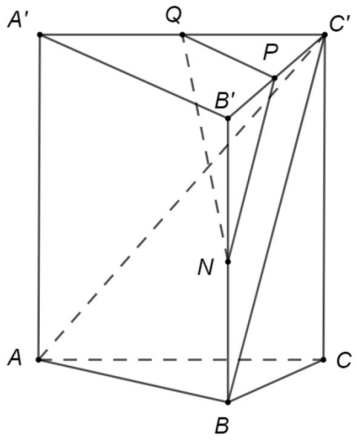
5. În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile ABC și BCD dreptunghice în B, respectiv în C. Se știe că $\sphericalangle BAC = 15^\circ$, $BC \equiv CD$, $BM \perp AC$ și $MN \perp BD$.



(2p) a) Arată că măsura unghiului BMN este de 30°.

(3p) b) Dacă $BN = 2$ cm, află distanța de la M la dreapta BC.

5p **6.** În figura alăturată este desenată o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $AB = 8\,\text{m}$ și $AA' = 6\,\text{m}$. Punctele N, P și Q sunt mijloacele segmentelor, BB', $B'C'$, respectiv $A'C'$.



(2p) a) Arată că planele (QPN) și $(C'AB)$ sunt paralele.

(3p) b) Calculează cosinusul unghiului determinat de dreptele QP și $C'B$.

Prezenta lucrare conține _____ pagini

SIMULAREA EVALUĂRII NAȚIONALE PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

IANUARIE 2023|

Matematică

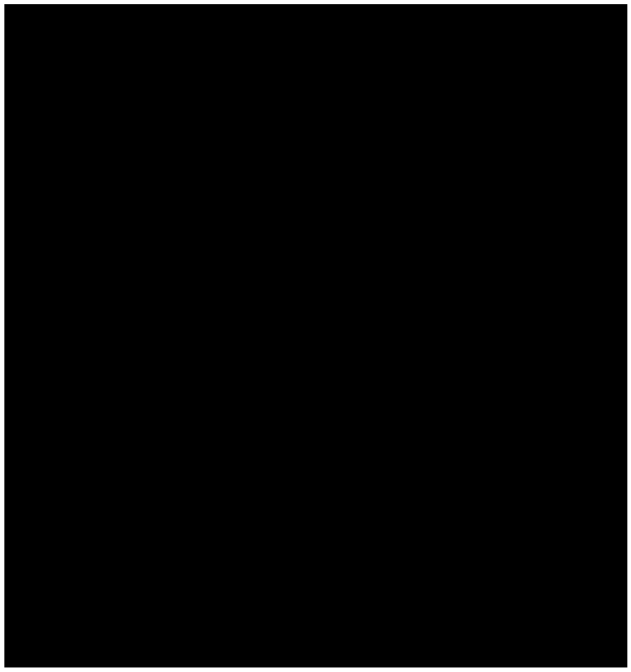
Numele:.....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume şi prenume asistent	Semnătura

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			



- Toate subiectele sunt obligatorii
- Se acordă 10 puncte din oficiu
- Timpul de lucru efectiv este de 2 ore

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p	1.Rezultatul calculului 10-10:(-2) este egal cu: a) 0 b) -10 c) 5 d) 15
5p	2. Scrierea fracției zecimale 1,(3) sub formă de fracție ordinară ireductibilă este: a) $\frac{13}{10}$ b) $\frac{13}{9}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{13}{90}$
5p	3. Suma cifrelor prime este: a) 18 b) 27 c) 17 d) 10

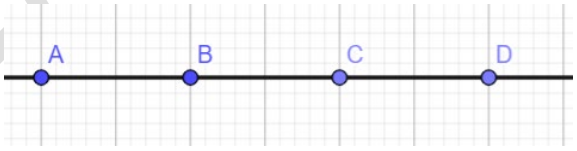
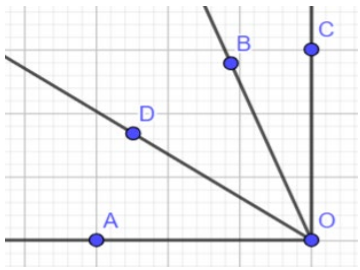
SIMULARE ILFOV

5p	4. Patru elevi Dan, Ana, Ion, Lara au calculat suma numerelor a și b , știind că a-b = 4 și a^2-b^2 =36. Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos. Dintre cei patru elevi , elevul care a răspuns corect este: a) Dan b) Ana c) Ion d) Lara
5p	5. Rezultatul calculului $(\sin 45^0+ \cos 45^0)^2$ este: a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) 1 c) 2 d) $\sqrt{2}$
5p	6. O serbare a început la ora 12:20 și s-a finalizat la ora 13:50, în aceeași zi. Un elev afirmă că : ” Serbarea a avut o durată de o oră și jumătate” . Știind că serbarea nu a avut pauză, afirmația elevului este: a) adevărată b) falsă

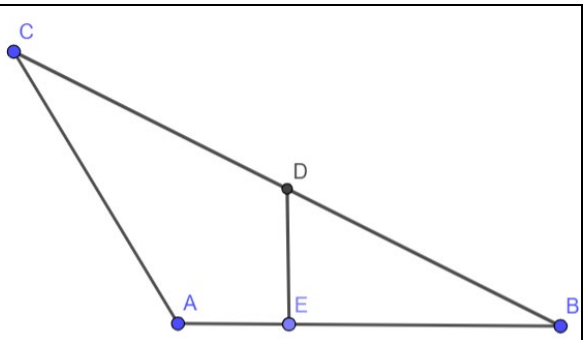
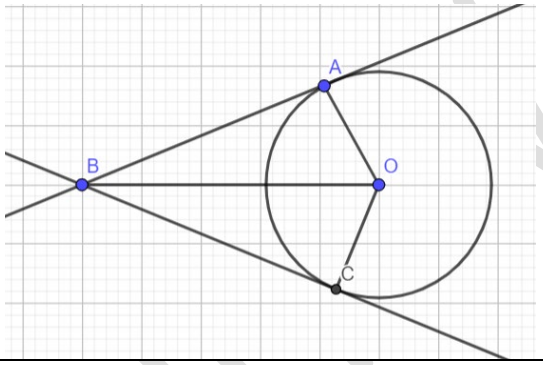
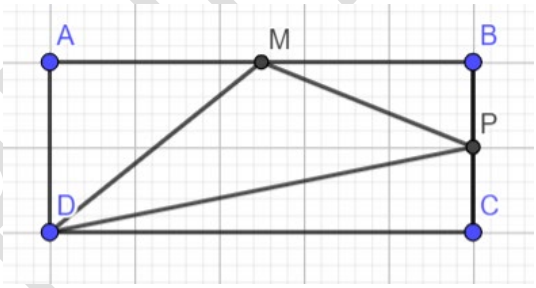
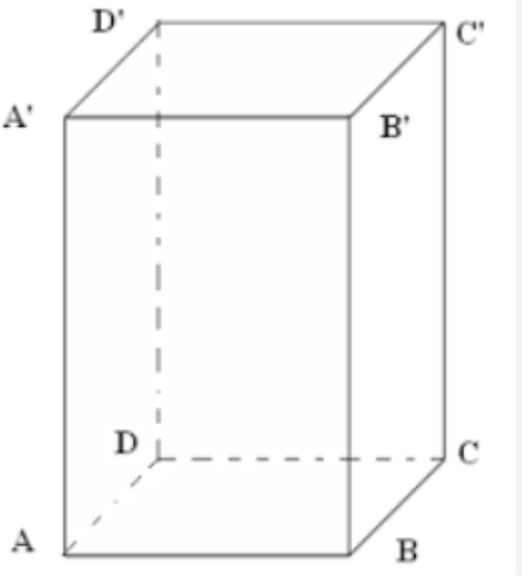
Dan	Ana	Ion	Lara
9	144	40	32

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. (30 de puncte)

5p	1. În figura următoare punctele A,B,C, D sunt coliniare, în această ordine , astfel încât B este mijlocul lui AC iar punctul D este simetricul punctului B față de punctul C. Dacă AC=8 cm, atunci lungimea segmentului BD este egală cu: a) 8 cm b) 4 cm c) 12 cm d) 16 cm 
5p	2. În figura următoare unghiurile AOB și BOC sunt adiacente complementare iar semidreapta OD este bisectoarea unghiului AOB. Dacă măsura unghiului BOC este egală cu 22^0 , atunci măsura unghiului AOD este egală cu: a) 22^0 b) 90^0 c) 68^0 d) 34^0 

SIMULARE ILFOV

5p	3. În figura alăturată este reprezentat triunghiul isoscel ABC de bază BC. Dacă CB= 8 cm , $\measuredangle B=30^0$, D mijlocul laturii BC, atunci distanța de la punctul D la dreapta AB are lungimea de: a) $4\sqrt{3}$ cm b) 4 cm c) $2\sqrt{3}$ cm d) 2 cm 
5p	4. În figura alăturată , OA și OC sunt raze, punctul B $\notin$ $\mathcal{C}$ (O, 3cm) , AB și BC sunt tangente cercului $\mathcal{C}$ (O, 3cm) . Dacă OB=6 cm, atunci suma lungimilor tangentelor AB și BC este egală cu: a) 12 cm b) $6\sqrt{5}$ cm c) 10 cm d) $6\sqrt{3}$ cm 
5p	5.În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi ABCD cu AB=12 cm , BC=8 cm și punctele M și P mijloacele laturilor AB, respectiv BC. Aria triunghiului PDM este egal cu: a) 96 cm^2 b) 36 cm^2 c) 60 cm^2 d) 24 cm^2 
5p	6. Se dă o prismă patrulateră regulată cu suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu 64 cm și aria bazei egală cu 25 cm^2. Aria unei fețe laterale este egală cu: a) 22 cm^2 b) 36 cm^2 c) 30 cm^2 d) 120 cm^2 

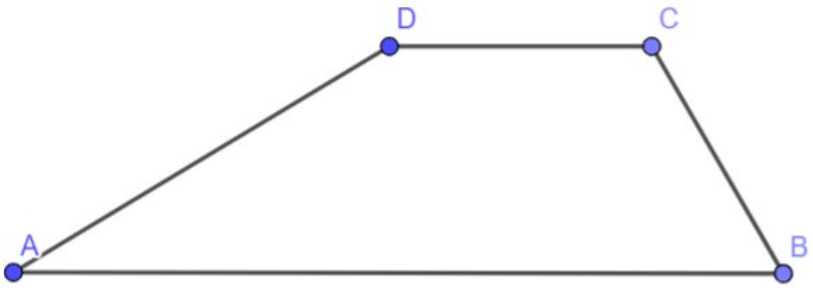
SIMULARE

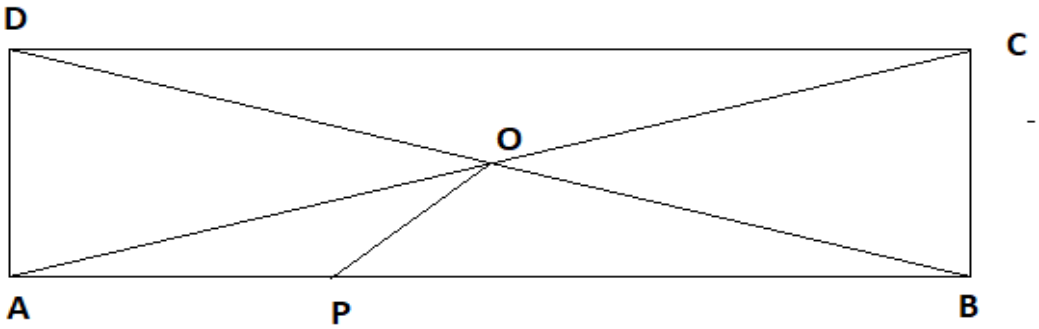
SUBIECTUL al III-lea

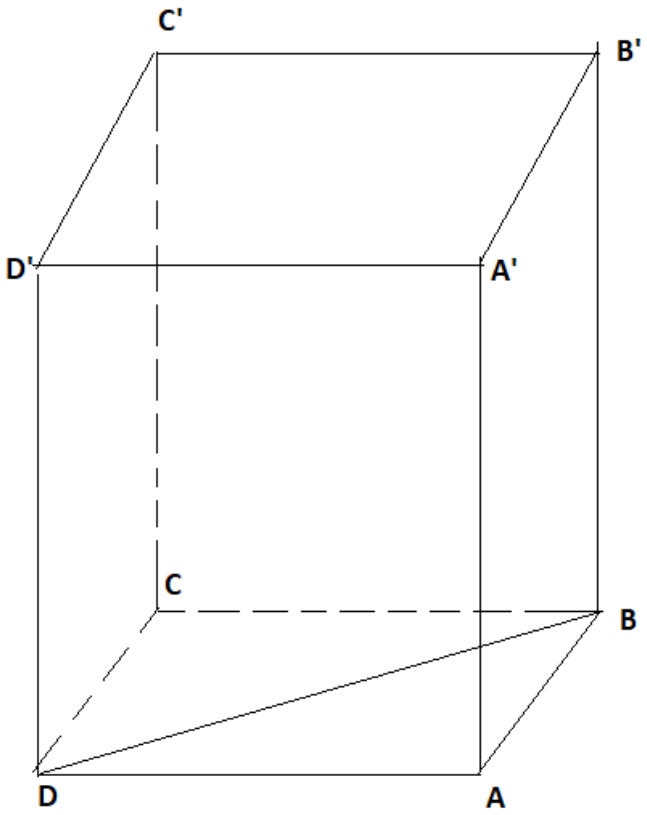
Scrieți rezolvările complete (30 de puncte)

5p	1.Trei frați Ana, Lia, Bogdan au împreună 1360 de lei. Ana are cu 170 de lei mai mult decât Bogdan iar Lia are cu 120 de lei mai puțin decât Ana. (2p) a) Poate avea Bogdan 390 de lei? Justifică răspunsul dat.
	(3p) b) Să se determine suma de bani pe care o are Lia.
5p	2. Se dau numerele a= $\left(2\frac{1}{3}+\frac{4}{5}:\frac{8}{15}\right)\cdot\left(\frac{-12}{23}\right)$ și b= $\frac{2}{2-\sqrt{2}}+6\sqrt{6}:(-2\sqrt{3})+\frac{4}{\sqrt{2}}$ (2p) a) Să se arate că a= - 2

	p) b) Calculează $(a+b-1)^{2023}$
5p	3. Se consideră expresia $E(x) = (2x-1)^2 - (x\sqrt{3}+2)(x\sqrt{3}-2) - 10$ (2p) a) Arată că $E(-2) = 7$.

	(3p) b) Să se determine suma numerelor reale a și b pentru care E(x) =(x+a)(x+b)
5p	4. În figura alăturată este reprezentat trapezul ABCD cu AB ∥ CD, AB> CD, ∢ BCD= 120^0 , CD=CB=12 cm. Fie F ∈ AB astfel încât CF⊥ AB. (2p) a) Calculați CF 

	(3p) b) Să se calculeze distanța de la punctul C la diagonala DB.
5p	5. În figura alăturată este reprezentat un dreptunghi ABCD cu AD = 6 cm , DB=12 cm iar OP este mediatoarea diagonalei DB, P ∈ AB.  (2p) a) Să se calculeze aria dreptunghiului ABCD.

	(3p) b) Să se calculeze lungimea segmentului OP.
5p	6. În figura alăturată se dă paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu AB=6 cm, BC= $6\sqrt{3}$ cm și CC' = 12 cm.  (2p) a) Să se calculeze măsura unghiului dintre diagonala A'C a paralelipipedului dreptunghic și planul bazei ABCD.

	(3p) b) Să se calculeze distanța de la punctul A’ la planul DBB’.

SIMULARE OV

Prezenta lucrare conține_____pagini

Numele:.....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: .....
Prenumele:.....
.....
Școala de proveniență: .....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: .....
Județul: .....

Nume și prenume asistent	Semnătura

SIMULARE - EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRUABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2022 – 2023
Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ŞI LITERE)	NUMELE ŞI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTA FINALĂ			

[redacted]

- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

Mate.info.ro
profu' de mate

SUBIECTUL I
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezultatul calculului $-15 + 7^2 : 7$ este egal cu :
a) -22
b) 8
c) -8
d) 22

5p **2.** Secvența care conține doar pătrate perfecte este :
a) $(49, 100, 289)$
b) $(25, 64, 194)$
c) $(16, -81, 121)$
d) $(8, 27, 125)$

5p **3.** Suma soluțiilor numere naturale ale inecuației $3x - 1 \leq 8$ este egală cu :
a) 3
b) 6
c) 10
d) 5

5p **4.** Numărul $-3\sqrt{3}$ aparține intervalului**:**
a) $[-4\sqrt{2}, -5]$
b) $(-\sqrt{27}, -1)$
c) $[-4, -\sqrt{3}]$
d) $[-5\sqrt{3}, -5\sqrt{2}]$

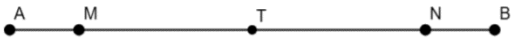
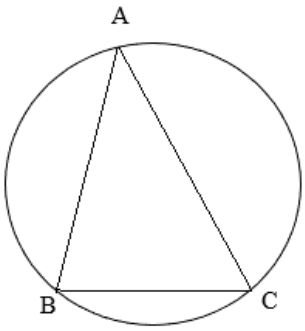
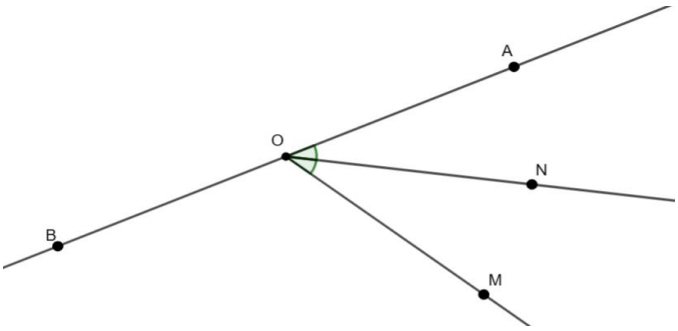
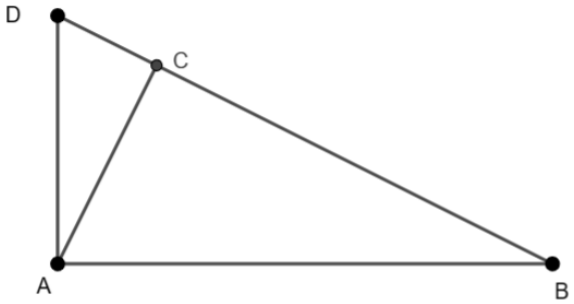
5p **5.** Patru elevi descompun expresia $x^3 + x^2 - 9x - 9$ în factori ireductibili și obțin rezultate diferite:

Anita	Bogdan	Corina	Dan
$x(x^2 + x - 9) - 9$	$(x + 1)(x - 3)(x + 3)$	$(x^2 + 3)(x - 3)$	$(x + 1)(x - 1)(x + 9)$

Rezultatul corect este dat de:
a) Anita
b) Bogdan
c) Corina
d) Dan

5p	**6.** Mihaela afirmă că numărul elementelor mulțimii $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \vdots 75\}$ este 6. Afirmaţia Mihaelei este: **a)** Adevărată **b)** Falsă

SUBIECTUL al II-lea
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** În figura alăturată sunt reprezentate, în această ordine, punctele coliniare A, M, T, N, B. Punctul T este mijlocul segmentului MN, $AM = NB = 3\ cm$ și $AB = 22\ cm$. Lungimea segmentului BT este egal cu : **a)** 1,9 dm **b)** 1,1 dm **c)** 8 cm **d)** 16 cm 
5p	**2.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABC înscris într-un cerc.Dacă $\measuredangle A = 30°$ şi $\measuredangle B = 80°$, atunci măsura arcului mic AB este egală cu : **a)** 35° **b)** 140° **c)** 70° **d)** 160° 
5p	**3.** În figura alăturată punctele A, O, B sunt coliniare, $\measuredangle BOM = 120°$ și ON este bisectoarea $\measuredangle$ AOM. Atunci măsura $\measuredangle$ BON este egal cu: **a)** 60° **b)** 120° **c)** 150° **d)** 100° 
5p	**4.** În figura alăturată este reprezentat triunghiul ABD dreptunghic în A, $AC \perp BD, C \in BD$. Dacă $DC = 9$ cm și $BD = 25$cm, atunci distanța de la A la DB este de: **a)** 15 cm **b)** 144 cm **c)** 12 cm **d)** 16 cm 

Mate.info.ro
profu' de mate

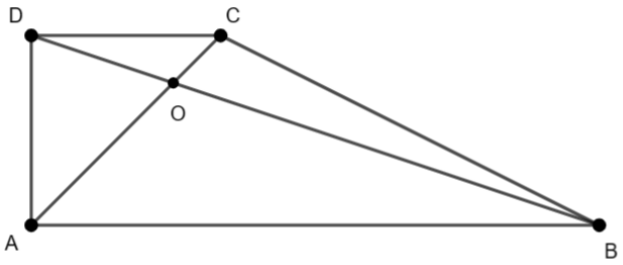
5p **5.** În figura alăturată este reprezentat un trapez ABCD, cu bazele 4 cm, respectiv 12 cm, iar diagonalele AC şi BD se intersectează în punctul O. Raportul dintre aria triunghiului DOC și AOB este egal cu:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{4}$

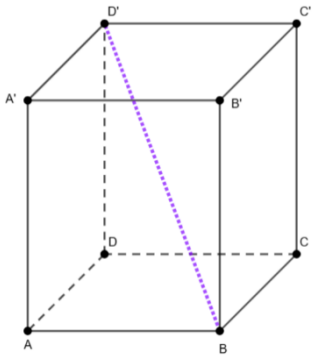
c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{1}{9}$



5p **6.** $ABCDA'B'C'D'$ este o prismă patrulateră regulată cu $AB = 6\sqrt{2}$ cm, $AA' = 9$ cm. Lungimea diagonalei BD' este:

a) 15 cm
b) $\sqrt{153}$ cm
c) 12 cm
d) 9 cm



SUBIECTUL al III-lea
Scrieți rezolvările complete. ***(30 de puncte)***

5p **1.** Un grup de prieteni plănuiesc o excursie de trei zile pe un traseu. In prima zi se va parcurge $\frac{1}{3}$ din traseu, a doua zi 40% din traseul rămas, iar a treia zi restul de 180 km.

(2p) a) Este posibil ca traseul rămas pentru a treia zi, să reprezinte 40% din toată excursia? Justificați răspunsul.

(3p) b) Care este numărul de km parcurşi în prima zi?

Mate.info.ro profu' de mate

5p

2. Se consideră expresia $E(x)=(2x-3)^2-3(x-2)^2-2(1+x)(x-1)+10$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(2p) a) Arătaţi că $E(x)=(3-x)(x+3)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

(3p) b) Calculaţi media geometrică a numerelor $E(1+\sqrt{3})$ şi $E(1-\sqrt{3})$.

Mate.info.ro profu' de mate

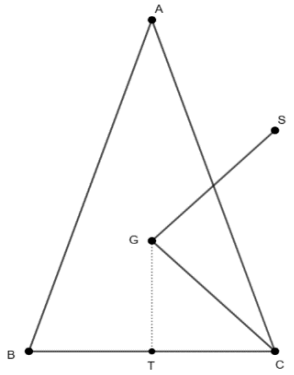
5p **3**. Fie numerele reale $a = \sqrt{51 + 10\sqrt{2}}$ şi $b = 0,(3) \cdot 12\sqrt{8} - \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{21}{\sqrt{18}} - \frac{99}{\sqrt{242}}\right) : 0,5$.

(2p) a) Arătaţi că $\left(1 + 5\sqrt{2}\right)^2 = a^2$.

(3p) b) Calculaţi $(b - a)^{2023}$.

Mate.info.ro profu' de mate

5p **4.** Se dă triunghiul isoscel ABC, cu $AB \equiv AC, BC = 14$ cm. Se notează cu G centrul de greutate al triunghiului, cu T mijlocul segmentului BC şi cu S simetricul punctului G faţă de mijlocul segmentului AC, $GT = 8$ cm.

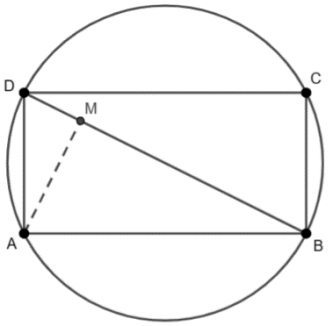


(2p) a) Arătaţi că perimetrul triunghiului ABC este de 64 cm.

(3p) b) Calculaţi distanţa de la punctul S la dreapta CG.

Mate.info.ro profu' de mate

5p **5.** Diagonala dreptunghiului ABCD este de 20 cm.
Fie AM ⊥ BD şi $MB = 3MD$.



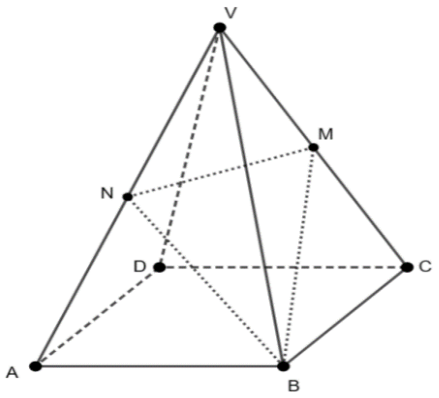
(2p) a) Arătaţi că aria dreptunghiului ABCD este $100\sqrt{3}$ cm^2.

(3p) b) Prelungirea segmentului AM intersectează cercul circumscris dreptunghiului ABCD în N. Demonstraţi că triunghiul ANB este echilateral.

Mate.info.ro profu' de mate

5p

6. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei $AB = 16\text{cm}$ şi muchia laterală $VA = 16\text{cm}$. BM este bisectoarea $\measuredangle VBC$, $M \in VC$ şi BN este bisectoarea $\measuredangle VBA$, $N \in VA$.



(2p) a) Arătaţi că $MN \,||(BDA)$.

Mate.info.ro
profu' de mate

(3p) b) Calculaţi aria triunghiului MNB.

Mate.info.ro
profu' de mate

SIMULARE - EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul şcolar 2022-2023
Probă scrisă - Matematică
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I şi SUBIECTUL al II-lea:

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**a)**	**5p**
3.	**b)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**b)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.	**b)**	**5p**
2.	**b)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**c)**	**5p**
5.	**d)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** $60\%\ din\ \left(\frac{2}{3} din\ T\right) = \frac{60}{100}\cdot\frac{2}{3}\cdot T = \frac{40}{100}\cdot T = 40\%\ din\ T$. (notăm T întregul traseu) **DA.**	**1p** **1p**
	b) $\frac{40}{100}\cdot T = 180 \Rightarrow T = 450$ km. In prima zi : $\frac{1}{3}\ din\ 450 = 150$ km.	**2p** **1p**
2.	**a)** $E(x) = 4x^2 - 12x + 9 - 3(x^2 - 4x + 4) - 2(x^2 - 1) + 10 =$ $= 4x^2 - 12x + 9 - 3x^2 + 12x - 12 - 2x^2 + 2 + 10 = 9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$	**1p** **1p**
	b) $E\left(1+\sqrt{3}\right) = 9 - \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 9 - \left(4 + 2\sqrt{3}\right) = 5 - 2\sqrt{3}$ $E\left(1-\sqrt{3}\right) = 9 - \left(1-\sqrt{3}\right)^2 = 9 - \left(4 - 2\sqrt{3}\right) = 5 + 2\sqrt{3}$ $M_g = \sqrt{a\cdot b},\ M_g = \sqrt{(5-2\sqrt{3})\cdot(5+2\sqrt{3})} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}.$	**1p** **1p** **1p**

Mate.info.ro profu' de mate

3.	**a)** $(1+5\sqrt{2})^2 = 1+10\sqrt{2}+50 = 51+10\sqrt{2}$ $a^2 = \left(\sqrt{51+10\sqrt{2}}\right)^2 = 51+10\sqrt{2}$	**1p** **1p**
	b) $b = \frac{1}{3}\cdot 12\cdot 2\sqrt{2} - \left(\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{21}{3\sqrt{2}} - \frac{99}{11\sqrt{2}}\right):\frac{1}{2} =$ $8\sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1} = 5\sqrt{2}$. Din a) $\Rightarrow a = 1+5\sqrt{2}$; $(b-a)^{2023} = \left(5\sqrt{2}-1-5\sqrt{2}\right)^{2023} = (-1)^{2023} = -1$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** AT = 24 cm; AB = 25 cm. P = AB + AC + BC = 25 + 25 + 14 = 64 cm.	**1p** **1p**
	b) $A_{\Delta BCG} = \frac{BC\cdot GT}{2} = 56cm^2$. În triunghiul BCS, CG este mediană, deci $A_{\Delta SCG} = 56\ cm^2 = \frac{GC\cdot d(S;GC)}{2}$ Cum din triunghiul dreptunghic GTC obține $GC = \sqrt{113}$, obținem $d(S,CG) = \frac{112\sqrt{113}}{113}$ cm.	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** DM = 5cm; MB = 15cm. $AD^2 = DM\cdot BD = 100 \Rightarrow AD = 10cm$. $AB^2 = BM\cdot BD = 300 \Rightarrow AB = 10\sqrt{3}$ cm. $\Rightarrow A = AB\cdot AD = 100\sqrt{3}cm^2$.	**1p** **1p**
	b) ΔABD dreptunghic $\Leftrightarrow$ BD = diametrul cercului = ipotenuza. $AD = \frac{BD}{2} \Rightarrow \widehat{DBA} = 30°$, $\widehat{ADB} = 60° \Rightarrow$ arcul $AB = 120° \Rightarrow \widehat{ANB} = 60°$ $AM \perp BD \Rightarrow \Delta ADM -$ dreptunghic $\Rightarrow \widehat{DAM} = 30° \Rightarrow \widehat{NAB} = 60°$. Deci ΔANB- echilateral.	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** $\Delta VAB \equiv \Delta VBC - \Delta$echilaterale. $M -$ mijl VC, $N -$ mijl VA $\Rightarrow MN -$ linie mijl ΔVAC $MN\|\|AC, AC \subset (BDA) \Rightarrow MN\|\|(BDA)$	**1p** **1p**
	b) $MN = \frac{AC}{2} = 8\sqrt{2}$ cm. $BM = BN = \frac{l\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ cm. $\Delta MNB -$ isoscel, $d(B,MN) = h = 4\sqrt{10}$ cm. $A_{\Delta MNB} = \frac{MN\cdot h}{2} = 32\sqrt{5}\ cm^2$.	**1p** **1p** **1p**

Mate.info.ro
profu' de mate

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3(2+5i)=6+15i$	**2p**
	$5(1+3i)=5+15i$	**2p**
	$a=1\in\mathbb{R}$	**1p**
2.	$f(x)=0\Rightarrow(x+5)^2=0$	**2p**
	$x=-5$ şi $y=0$	**3p**
3.	$x^2+x+1=x+2$	**3p**
	Rezultă $x=-1$ sau $x=1$, care verifică ecuaţia	**2p**
4.	Se notează cu x preţul înainte de ieftinire $\Rightarrow x-\frac{10}{100}\cdot x=90$	**3p**
	$x=100$	**2p**
5.	$d \parallel h\Rightarrow m_d=m_h=1$	**3p**
	$d: y-2=1\cdot(x-2)$, deci $d: y=x$	**2p**
6.	$\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}=\frac{25+36-49}{2\cdot 5\cdot 6}=$	**3p**
	$=\frac{1}{5}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(2)+A(6)=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1&0\\6&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&0\\8&2&2\\2&-2&2\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=2A(4)$	**2p**
b)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1&1&0\\x&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=3-x$	**3p**
	$3-x=0\Rightarrow x=3$	**2p**
c)	$\det(A(2))=1$	**2p**
	$(A(2))^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&1&-1\\-3&2&-1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(-1)=-1+1-m+m=0$	**2p**
	Rezultă $X+1$ divide polinomul f	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-1,\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=m$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1-2m$	**2p**
	$1-2m=11\Rightarrow m=-5$	**1p**

c)	$x_1=-1\Rightarrow \lvert x_2\rvert=\lvert x_3\rvert=1$	**2p**
	$x_1x_2x_3=-m$	**1p**
	$\lvert m\rvert=1\Rightarrow m=-1$ sau $m=1$; ambele valori verifică cerința	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=x'-(\ln x)'=$	**2p**
	$=1-\dfrac{1}{x}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**3p**
b)	$y-f(1)=f'(1)(x-1)$	**2p**
	$f(1)=1$, $f'(1)=0\Rightarrow$ ecuaţia tangentei este $y=1$	**3p**
c)	$f'(1)=0$, $f'(x)<0$, pentru $x\in(0,1)$ şi $f'(x)>0$, pentru $x\in(1,+\infty)$	**3p**
	$f(x)\geq f(1)\Rightarrow x\geq \ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_2^3\frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\int_2^3(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big\rvert_2^3=$	**3p**
	$=\dfrac{15}{2}-4=\dfrac{7}{2}$	**2p**
b)	$f(x)=x^3-x\Rightarrow$ primitiva F a funcției f este $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p**
	$F(1)=-1\Rightarrow c=-\dfrac{3}{4}\Rightarrow F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{4}$	**2p**
c)	$\displaystyle\int_2^e\frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\int_2^e x\ln x dx=$	**2p**
	$\displaystyle=\left(\frac{x^2}{2}\ln x\right)\Big\rvert_2^e-\frac{1}{2}\int_2^e x dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$	**3p**

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
Barem de evaluare şi de notare

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$3\left(4-\sqrt{3}\right)=12-3\sqrt{3}$ $12-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=12$	**2p** **3p**
2.	$f(-4)=0$ $f(4)=0\Rightarrow f(-4)+f(4)=0$	**2p** **3p**
3.	$(x-2)^2=x^2-4x+4$ $x=3$	**2p** **3p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot 100=30$ Preţul după ieftinire este 70 de lei	**2p** **3p**
5.	$AB=\sqrt{(2-2)^2+(1-4)^2}$ $AB=3$	**3p** **2p**
6.	$\sin^2 A+\cos^2 A=1\Rightarrow \cos^2 A=\frac{3}{4}$ $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4-0=$ $=4$	**3p** **2p**
b)	$A\cdot B=\begin{pmatrix}2b & 2-2b\\ 0 & 2b\end{pmatrix}$ $A\cdot B=2I_2\Leftrightarrow b=1$	**3p** **2p**
c)	$A+B=\begin{pmatrix}2+b & -1\\ 0 & 2+b\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A+B)=(2+b)^2$ $(2+b)^2=0\Leftrightarrow b=-2$	**3p** **2p**
2.a)	$f(1)=1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1=$ $=1-3+2=0$	**2p** **3p**
b)	Câtul este X^2-X Restul este 0	**2p** **3p**
c)	$x_1+x_2+x_3=3$, $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=2$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=3^2-2\cdot 2=5$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=(x^3+6x^2+12x+8)'=$	**2p**
	$=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$f'(x)=3(x+2)^2$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$	**3p**
c)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+12x+12}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2\left(3+\dfrac{12}{x}+\dfrac{12}{x^2}\right)}{x^2}=$	**3p**
	$=3$	**2p**
2.a)	$F'(x)=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)'=x^2+1$	**3p**
	$F'(x)=f(x)$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\Rightarrow F$ este o primitivă a funcţiei f	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_0^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\dfrac{x^3}{3}+x\right)\Big\rvert_0^1=$	**3p**
	$=\dfrac{4}{3}$	**2p**
c)	$\int_1^2\dfrac{f(x)}{x}dx=\int_1^2\dfrac{x^2+1}{x}dx=\int_1^2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)dx=$	**2p**
	$=\left(\dfrac{x^2}{2}+\ln x\right)\Big\rvert_1^2=\dfrac{3}{2}+\ln 2$	**3p**

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a
Anul școlar 2024-2025
Matematică

Varianta 1

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I și SUBIECTUL al II-lea

- **Se punctează doar rezultatul, astfel: pentru fiecare răspuns se acordă fie cinci puncte, fie zero puncte.**
- **Nu se acordă punctaje intermediare.**

SUBIECTUL al III-lea

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**d)**	**5p**
4.	**a)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**b)**	**5p**

SUBIECTUL AL II-lea **(30 de puncte)**

1.	**c)**	**5p**
2.	**c)**	**5p**
3.	**c)**	**5p**
4.	**b)**	**5p**
5.	**a)**	**5p**
6.	**a)**	**5p**

SUBIECTUL AL III-lea **(30 de puncte)**

1.	**a)** Dacă ar fi 20 elevi, suma strânsă ar fi de 2000 de lei în prima variantă de donație, respectiv 1600 de lei în cea de a doua variantă. $2000 - 1600 \neq 250 + 250$ și deducem că nu este posibil ca în acea clasă să fie 20 elevi	**1p** **1p**
	b) $100x - 250 = 80x + 250$, unde x este numărul elevilor din clasă $20x = 500$ de unde rezultă $x = 25$ $25 \cdot 100 - 250 = 2250\ lei$ prețul laptopului $2250 : 25 = 90\ lei$ este suma ce trebuie donată de fiecare elev	**1p** **1p** **1p**
2.	**a)** $a = 4\sqrt{6} + 3\sqrt{9} - 2\sqrt{24} - 6 =$ $= 4\sqrt{6} + 9 - 4\sqrt{6} - 6 = 3$	**1p** **1p**
	b) $\left\|5 - 3\sqrt{3}\right\| = 3\sqrt{3} - 5$ $b = 3\sqrt{3} - 5 + 3 - \sqrt{3} + \sqrt{4} = 2\sqrt{3}$ $m_a = \frac{a+b}{2} = \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$	**1p**

	Arată că $\frac{3+2\sqrt{3}}{2} > 3$ Arată că $\frac{3+2\sqrt{3}}{2} < 2\sqrt{3}$	**1p** **1p**
3.	**a)** $(2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$ $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ $(2x-3)(x+2) = 2x^2 + x - 6$ $E(x) = 4x^2 + 12x + 9 - (2x^2 + x - 6) - 2(x^2 - 4x + 4) =$ $= 4x^2 + 12x + 9 - 2x^2 - x + 6 - 2x^2 + 8x - 8 =$ $= 19x + 7.$	**1p** **1p**
	b) $E(n) = 19n + 7$ și $E(n) = -19n + 7$ $19n + 7 = -19n + 7$ implică $n = 0$ $Card\ A = 1$	**1p** **1p** **1p**
4.	**a)** $\Delta ADM \equiv \Delta BCM \Rightarrow \measuredangle ADM \equiv \measuredangle BCM$ Cum $ABCD$ este pătrat, deci $AD = BC$ și $\measuredangle EAD \equiv \measuredangle FBC$, obținem $\Delta ADE \equiv \Delta BCF$.	**1p** **1p**
	b) E este centrul de greutate al ΔABD, deci $\frac{OE}{OA} = \frac{1}{3}$ și F este centrul de greutate al ΔABC, deci $\frac{OF}{OB} = \frac{1}{3}$. $\frac{OE}{OA} = \frac{OF}{OB} \Rightarrow EF \parallel AB$ $\Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{1}{3}$, deci $EF = 5\ cm$.	**1p** **1p** **1p**
5.	**a)** ΔCDF este dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ măsura $\measuredangle CDF = 45^\circ$ și ΔDEF este dreptunghic isoscel $\Rightarrow$măsura $\measuredangle DFE = 45^\circ$, deci $\measuredangle CFE = \measuredangle CFD + \measuredangle DFE = 90^\circ \Rightarrow EF \perp BF$. F este mijlocul segmentului $BC \Rightarrow BF = CF = 12\sqrt{2}\ cm$ și ΔCDF este dreptunghic isoscel, deci $DF = 24\ cm$ și, cum ΔDEF este dreptunghic isoscel, obținem $EF = 24\sqrt{2}\ cm$, deci, cum ΔBEF este dreptunghic, $BE = \sqrt{EF^2 + BF^2} = 12\sqrt{10}\ cm$.	**1p** **1p**
	b) ΔABC este isoscel și F este mijlocul laturii $BC \Rightarrow AF \perp BC$ și, cum $EF \perp BC$, obținem că punctele A, F și E sunt coliniare. $EF \perp BC$ și $DC \perp BC \Rightarrow AE \parallel DC$ și, cum $AC = DE = 24\ cm$, obținem că $ACDE$ este trapez isoscel.	**1p** **1p** **1p**
6.	**a)** M este mijlocul lui BC și P este mijlocul lui BD, deci MP este linie mijlocie în ΔBCD $MP \parallel CD$ și $CD \subset (ACD)$, deci $MP \parallel (ACD)$.	**1p** **1p**

	b) NP este linie mijlocie în ΔABD, deci $NP \parallel AB \Longrightarrow \measuredangle(AB, MN) = \measuredangle(NP, MN)$, AM, DM sunt înălțimi în triunghiurile echilaterale ABC, respectiv BCD și $BC = 10\ cm$, deci $AM = DM = 5\sqrt{3}\ cm$. MN este înălțime în triunghiul isoscel AMD, deci $MN = \sqrt{DM^2 - DN^2} = 5\sqrt{2}\ cm$ și, cum $MP = NP = 5\ cm$, avem $MN^2 = MP^2 + NP^2$, adică ΔMNP este dreptunghic isoscel, de unde obținem $\measuredangle MNP = \measuredangle(NP, MN) = 45^\circ$.	**1p** **1p** **1p**

Prezenta lucrare conține _____ pagini

Numele:…….....
.....
Inițiala prenumelui tatălui: …….....
Prenumele:…….....
.....……...……
Școala de proveniență: .....…
….....
.....
Centrul de examen: .....
Localitatea: …….....
Județul: …….....

Nume și prenume asistent	Semnătura

EVALUAREA NAȚIONALĂ PENTRU ABSOLVENȚII CLASEI a VIII-a

Anul școlar 2024-2025

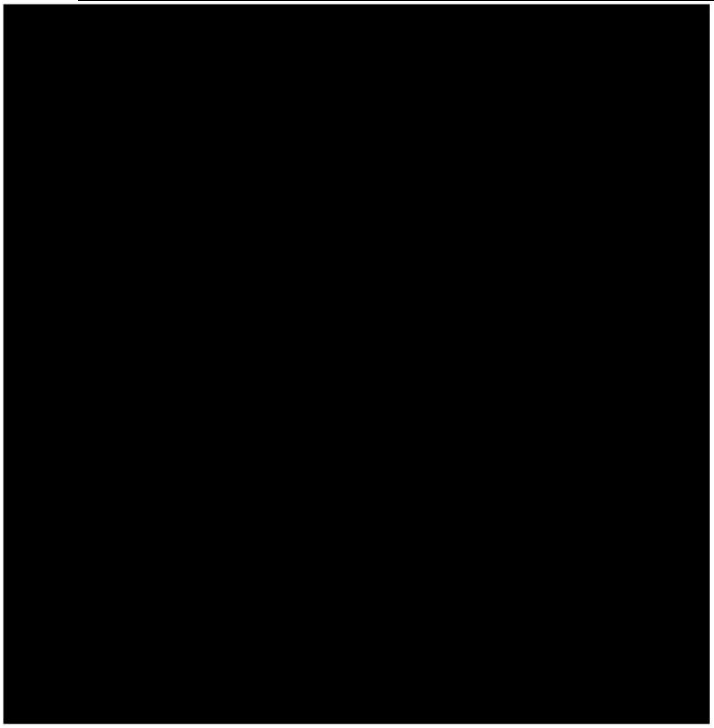
SIMULARE JUDEȚUL TIMIȘ

Matematică

A	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTĂ FINALĂ			

B	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTĂ FINALĂ			

C	COMISIA DE EVALUARE	NOTA (CIFRE ȘI LITERE)	NUMELE ȘI PRENUMELE PROFESORULUI	SEMNĂTURA
	EVALUATOR I			
	EVALUATOR II			
	EVALUATOR III			
	EVALUATOR IV			
	NOTĂ FINALĂ			



- **Toate subiectele sunt obligatorii.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de două ore.**

SUBIECTUL I

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Rezultatul calculului $20 - 24 : 2$ este egal cu: **a)** -2 **b)** 2 **c)** 8 **d)** 6
5p	**2.** Dacă $\frac{x}{5} = \frac{y}{2}$, atunci rezultatul calculului $2x - 5y + 3$ este egal cu: **a)** 0 **b)** 2 **c)** 3 **d)** 5
5p	**3.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale 20 și 24 este egal cu: **a)** 4 **b)** 40 **c)** 480 **d)** 120
5p	**4.** Dintre numerele $20{,}24;\ 20,(24);\ 20{,}2(4)$ și $202{,}4$ cel mai mic este egal cu: **a)** $20{,}24$ **b)** $20,(24)$ **c)** $20{,}2(4)$ **d)** $202{,}4$

5p

5. Patru eleve, Andra, Ianisa, Teodora și Nadia, au calculat produsul numerelor $x = \sqrt{2^2 + 2^2}$ și $y = \sqrt{2^4 + 2^4}$.

Rezultatele obținute sunt prezentate în tabelul de mai jos.

Andra	Ianisa	Teodora	Nadia
16	$8\sqrt{2}$	32	64

Dintre cele patru eleve, rezultatul corect a fost obținut de:

a) Andra
b) Ianisa
c) Teodora
d) Nadia

5p

6. Afirmația: „ Suma numerelor întregi negative din intervalul $(-6, 4]$ este -5.” este:

a) adevărată
b) falsă

SUBIECTUL AL II-lea

Încercuieşte litera corespunzătoare răspunsului corect. **(30 de puncte)**

5p

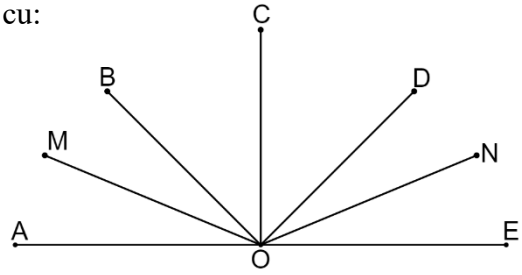
1. În figura alăturată, punctele A, B, C, D și E sunt coliniare, în această ordine, astfel încât $AB = 2\ cm, BC = 2AB, CD = 2BC$ și $DE = 3BC$. Lungimea segmentului CE este egală cu:

a) 12 cm
b) 16 cm
c) 20 cm
d) 24 cm

5p

2. În figura alăturată, punctele A, O și E sunt coliniare și unghiurile AOB, BOC, COD și DOE sunt congruente. Semidreapta OM este bisectoarea unghiului AOB și semidreapta ON este bisectoarea unghiului DOE. Măsura unghiului MON este egală cu:

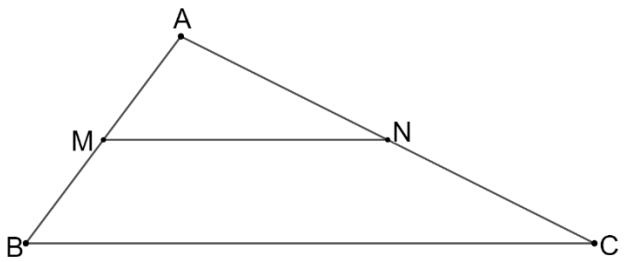
a) 90°
b) 120°
c) 135°
d) 150°

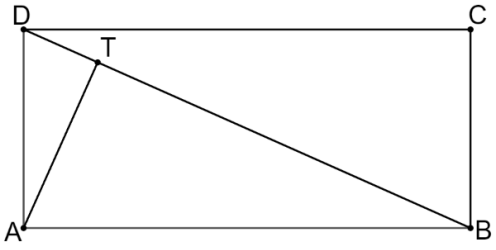
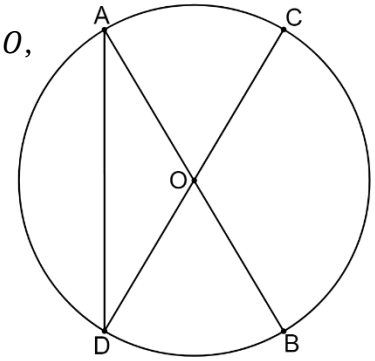
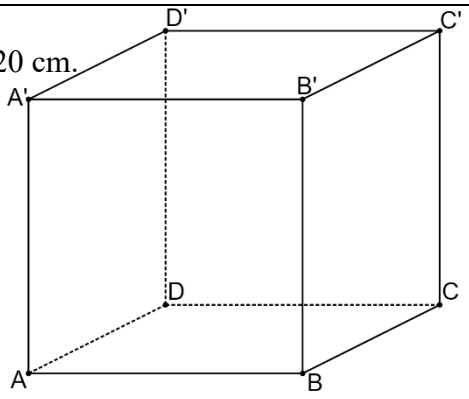


5p

3. În figura alăturată, MN este linie mijlocie în triunghiul ABC. Valoarea raportului dintre aria triunghiului AMN și aria triunghiului ABC este egală cu:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{3}$



5p	**4**. Figura alăturată reprezintă o rețea de drumuri care unesc cinci atracții turistice A, B, C, D și T. Punctele A, B, C, D sunt vârfurile unui dreptunghi. Drumul AT este perpendicular pe drumul BD. Știind că distanța dintre D și T este de 4 km și distanța dintre T și B este 9 km, atunci distanța parcursă de un turist care vizitează, pornind din A, atracția turistică T, este egală cu: **a)** 5 km **b)** 6 km **c)** 7 km **d)** 8 km 
5p	**5.** În figura alăturată , AB și CD sunt diametre în cercul de centru O, iar măsura arcului mic BD este egală cu 60°. Măsura unghiului CDA este egală cu: **a)** 30° **b)** 45° **c)** 60° **d)** 90° 
5p	**6.** Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este egală cu 120 cm. Aria unei fețe laterale ale cubului este egală cu: **a)** 100 cm^2 **b)** 144 cm^2 **c)** 225 cm^2 **d)** 400 cm^2 

SUBIECTUL AL III-lea

Scrieți rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p	**1.** Elevii unei clase își propun să strângă o sumă de bani (fiecare donând în mod egal) pentru a putea cumpăra un laptop unei familii nevoiașe cu ocazia sărbătorilor de iarnă. Dacă fiecare elev donează câte 100 de lei, atunci suma strânsă depășește cu 250 lei prețul laptopului. Dacă fiecare elev din clasă donează câte 80 de lei atunci mai trebuie încă 250 de lei pentru a putea cumpăra laptopul. **(2p) a)** Numărul elevilor din clasă poate fi egal cu 20? Justifică răspunsul dat.

(3p) b) Ce sumă trebuie să doneze fiecare elev din clasă pentru a putea strânge exact suma necesară achiziționării laptopului?

5p **2.** Se consideră numerele reale $a = \sqrt{3}\left(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}\right) - 2\left(\sqrt{24} + 3\right)$ și $b = \left|5 - 3\sqrt{3}\right| + 2\left(\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$.

(2p) a) Arată că $a = 3$.

5p

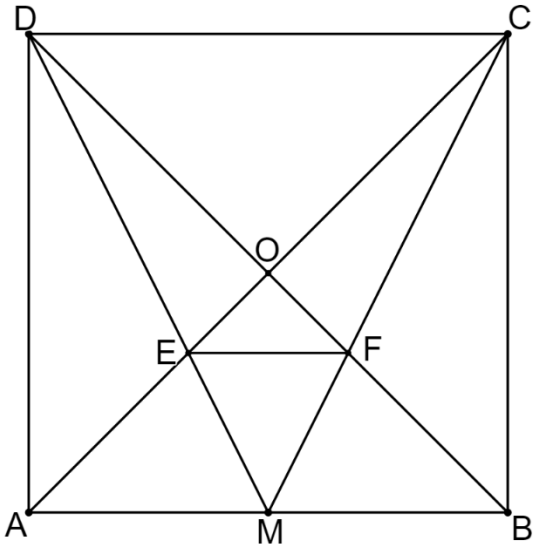
(3p) b) Arată că media aritmetică a numerelor a și b aparține intervalului $\left(3; 2\sqrt{3}\right)$.

3. Se consideră expresia $E(x) = (2x+3)^2 - (2x-3)(x+2) - 2(x-2)^2$, unde x este un număr real.

(2p) a) Arată că $E(x) = 19x + 7,$ pentru orice număr real x.

(3p) b) Se consideră mulțimea $A = \{n \in N \mid E(n) = E(-n)\}$. Determinați cardinalul mulțimii A.

5p **4.** În figura alăturată este reprezentat un pătrat $ABCD$ cu $AB = 15\ cm$, punctul M este mijlocul laturii AB și punctul O este intersecția diagonalelor pătratului. E și F sunt punctele de intersecție a dreptelor AC și DM, respectiv BD și CM.

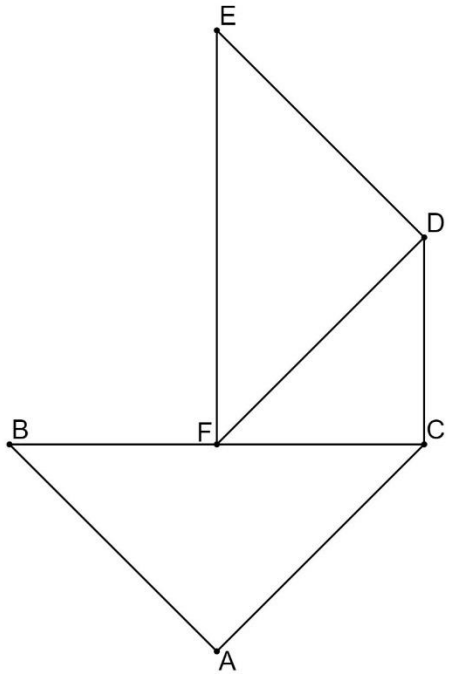


(2p) a) Demonstrează că triunghiurile ADE și BCF sunt congruente.

(3p) b) Calculează lungimea segmentului EF.

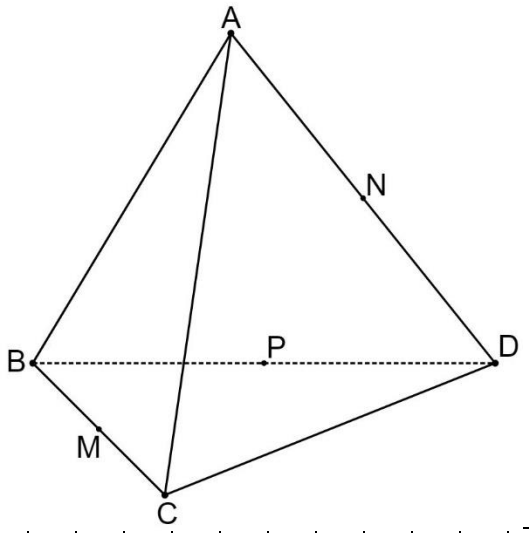
5p **5.** În figura alăturată sunt reprezentate triunghiurile dreptunghice isoscele ABC, CDF și DEF, cu ipotenuzele BC, DF și, respectiv EF. Punctul F este mijlocul segmentului BC și $AB = 24\ cm$.

(2p) a) Arată că $BE = 12\sqrt{10}\ cm$.



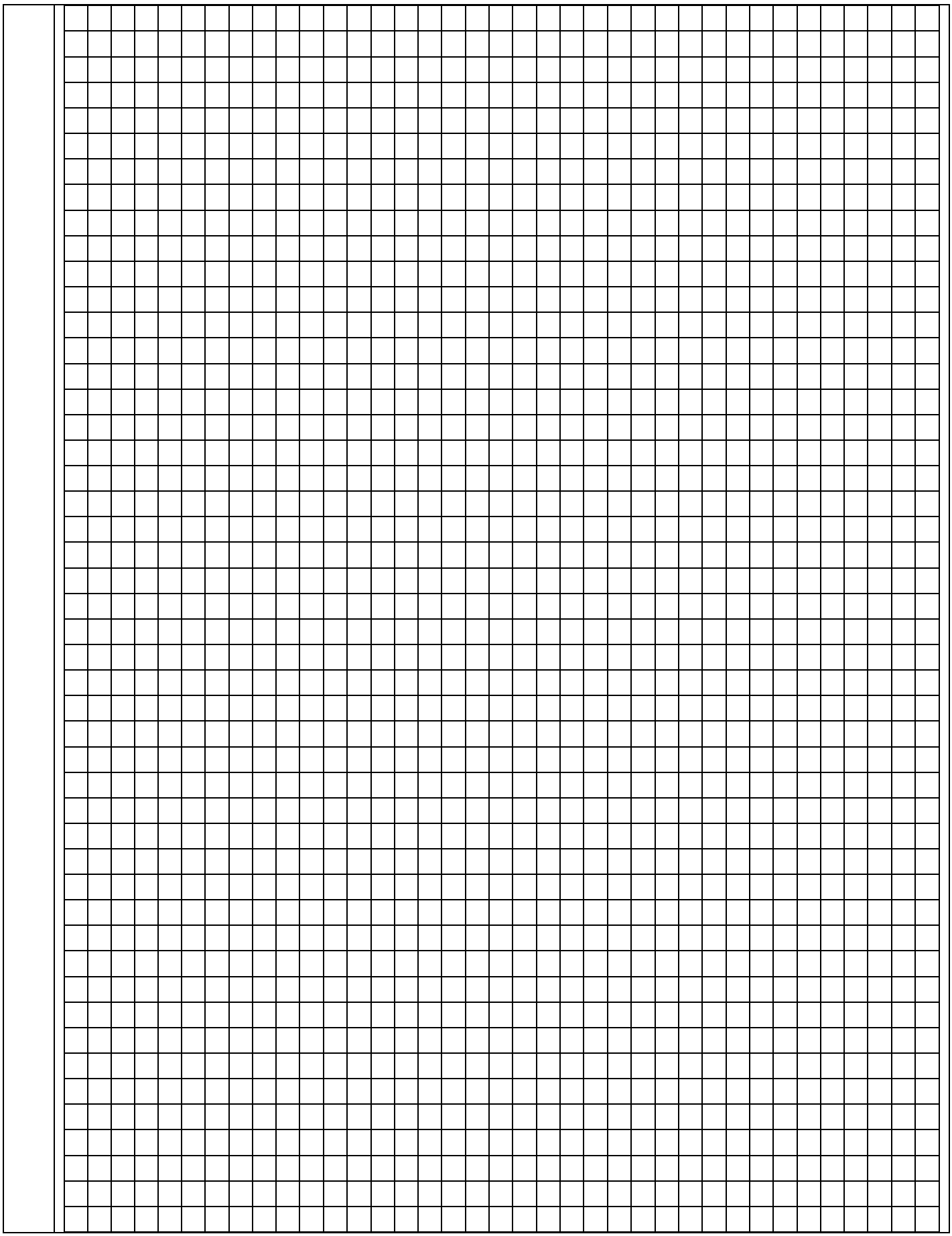
(3p) b) Demonstrează că patrulaterul $ACDE$ este trapez isoscel.

5p **6.** În figura alăturată este reprezentat un tetraedru regulat $ABCD$, cu $AB = 10\ cm$, iar punctele M, N și P sunt mijloacele segmentelor BC, AD și respectiv BD.



(2p) a) Arătați că dreapta MP este paralelă cu planul (ACD).

(3p) b) Demonstrează că unghiul dreptelor AB și MN are măsura egală cu $45°$.



Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătaţi că numărul $a=3(2+5i)-5(1+3i)$ este real.

5p **2.** Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie cu axa Ox a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+10x+25$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2+x+1\right)=\log_5(x+2)$.

5p **4.** După o ieftinire cu 10% preţul unui produs este 90 de lei. Calculaţi preţul produsului înainte de ieftinire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta h de ecuaţie $y=x-1$ şi punctul $A(2,2)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin A şi este paralelă cu h.

5p **6.** Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=5$, $AC=6$ şi $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ x & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(2)+A(6)=2A(4)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x))=0$.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

2. Se consideră x_1, x_2 şi x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X^2+mX+m$, unde m este un număr real.

5p **a)** Arătaţi că f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1^2+x_2^2+x_3^2=11$.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m ştiind că $|x_1|=|x_2|=|x_3|$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $x\geq\ln x+1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x+1)(x-1)$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_2^3\frac{f(x)}{x(x-1)}dx=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinaţi primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcţiei f ştiind că $F(1)=-1$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_2^e\frac{f(x)\ln x}{x^2-1}dx=\frac{e^2}{4}-2\ln 2+1$.

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 9

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $3\left(4-\sqrt{3}\right)+3\sqrt{3}=12$.

5p **2.** Calculaţi $f(-4)+f(4)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-16$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x-2)^2-x^2+8=0$.

5p **4.** Preţul unui obiect este 100 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o ieftinire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(2,1)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Calculaţi $\cos A$, ştiind că $\sin A=\frac{1}{2}$ şi unghiul A este ascuţit.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}b & 1\\ 0 & b\end{pmatrix}$, unde b este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numărul real b pentru care $A\cdot B=2I_2$.

5p **c)** Determinaţi numărul real b pentru care $\det(A+B)=0$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X$.

5p **a)** Calculaţi $f(1)$.

5p **b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X-2$.

5p **c)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^3$.

5p **a)** Verificaţi dacă $f'(x)=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x^2}$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Verificaţi dacă funcţia $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^3}{3}+x$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=0$ şi $x=1$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{x}dx=\frac{3}{2}+\ln 2$.

Examenul de bacalaureat național 2013
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2$ și $a_2=1$.

5p **2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-2x-m>0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x+\log_2(x-1)=\log_2 12$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr natural de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie egal cu 3.

5p **5.** Calculați $\vec{a}\cdot\vec{b}$, știind că $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ și unghiul vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ are măsura $\frac{\pi}{3}$.

5p **6.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(0,1)$ și $C(3,1)$. Determinați coordonatele ortocentrului triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru n număr natural se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2n+1 & n & 1 \\ 2n^2+1 & n^2 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculați suma elementelor matricei A.

5p **b)** Determinați numerele naturale n pentru care matricea A are determinantul diferit de zero.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ și $A_n(2n+1,n)$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Determinați valorile numărului natural n, $n\geq 2$ pentru care aria triunghiului $OA_nA_{n^2}$ este egală cu n^2-3.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x\circ y=x+ay+1$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $a=1$ calculați $2011\circ 2012$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care legea de compoziție „$\circ$” este asociativă.

5p **c)** Pentru $a=-1$ rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x\circ 2^x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\dfrac{3}{2}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră funcția $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_n(x)=(x+n)e^x$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că funcția f_{2011} este o primitivă a funcției f_{2012}.

5p **c)** Demonstrați că $\int_0^1 f_n(x)\,dx\geq\dfrac{9n+5}{6}$, pentru orice număr natural nenul n, folosind eventual inegalitatea $e^x\geq x+1$, adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3x+2)^2=4$.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+3mx+1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x}=9$.

5p **4.** Calculați $5C_4^2-A_5^2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,3)$ și $B(2,5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului (AB).

5p **6.** Calculați lungimea diagonalei BD a rombului $ABCD$ în care $AB=4$ și $m(\sphericalangle ABC)=120^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & x\\ 2 & -1 & x\\ x & x & 2\end{pmatrix}$ și se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$.

5p **a)** Calculați $\Delta(1)$.

5p **b)** Arătați că $\Delta(x)=6\left(x^2-1\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați inversa matricei $A(0)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+b$.

5p **a)** Calculați $a+b$, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=-1$ și $b=1$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numerele reale a și b, știind că $x_1=1$ și $x_2=2$ sunt rădăcini ale polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.

5p **a)** Verificați dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq-\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.

5p **a)** Verificați dacă funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcției *f*.

5p **b)** Calculați $\int_1^e x \cdot f\left(x^2\right) dx$.

5p **c)** Determinați numărul real $a > 1$, pentru care $\int_1^a \left(f(x) - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{3}{2}$.